ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – $2^{\underline{\text{o}}}$/2017

$6^{\underline{\text{a}}}$ lista de exercícios[1]

1. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias $\overset{\text{iid}}{\sim}$ $\mathsf{normal}(0,\sigma^2)$. Prove que $Y_n = k\sum_{i=1}^{n}\frac{|X_i|}{n}$ é um estimador consistente de σ se, e somente se, $k=\sqrt{\pi/2}$.

2. Utilize um teorema central do limite para provar que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!} = \frac{1}{2}.$$

3. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathsf{uniforme}\big([-2^{n/2},2^{n/2}]\big)$ para todo $n\geq 1$. Prove que a condição de Lindeberg não é satisfeita.

4. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathsf{normal}(0,2^{-n})$ para todo $n\geq 1$.
   (a) Pode ser afirmado que $T_n/s_n \xrightarrow{\text{D}} Z \sim \mathsf{normal}(0,1)$?
   (b) Pode ser afirmado que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\max_{i=1,\ldots,n}\big(\text{var}(X_i)\big)=0$?
   (c) A condição de Lindeberg é satisfeita?

5. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathsf{Poisson}(2^{-n})$ para todo $n\geq 1$.
   (a) Estude a convergência da sequência $(X_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Estude a convergência da sequência $(T_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Pode ser afirmado que $(T_n - s_n^2)/s_n \xrightarrow{\text{D}} Z \sim \mathsf{normal}(0,1)$?
   (d) Pode ser afirmado que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\max_{i=1,\ldots,n}\big(\text{var}(X_i)\big)=0$?
   (e) A condição de Lindeberg é satisfeita?

6. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathsf{uniforme}\big([0,n]\big)$ para todo $n\geq 1$. Aplique um teorema central do limite à sequência $(T_n)_{n\geq 1}$ devidamente padronizada.

7. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathsf{uniforme}\big([-n,n]\big)$ para todo $n\geq 1$. Prove que $T_n/s_n \xrightarrow{\text{D}} Z \sim \mathsf{normal}(0,1)$.
   Sugestão. Para $\alpha>0$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i^\alpha/n^{\alpha+1} = 1/(\alpha+1)$, de modo que $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha = O(n^{\alpha+1})$.

8. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade

$$f_n(x) = \frac{1}{2n}\exp(-|x|/n), \quad x\in\mathbb{R}.$$

   Prove que $\{T_n - \text{E}(T_n)\}/s_n \xrightarrow{\text{D}} Z \sim \mathsf{normal}(0,1)$.

9. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes definidas em $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tais que $P(|X_i|\leq M_n)=1$, para $i=1,\ldots,n$ e $n\geq 1$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} M_n/s_n = 0$. Prove que a condição de Liapounov é satisfeita.

[1] Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias em $(\Omega,\mathcal{A},P)$, definimos $T_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $s_n^2 = \text{var}(T_n)$.