1. **(Resolução de EDO por Séries de Fourier)** Siga os passos a seguir para determine uma solução particular da equação

$$y'' + 2y = f(x),$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período 2π é dada por $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ (sistema massa-mola com força externa periódica).

Passo 1 Desenvolva a função dada em uma série de Fourier e use os teoremas de convergência para mostrar que

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

Passo 2 Vamos tentar uma solução particular da forma (Por quê?)

$$y_p = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Vamos admitir por um momento que a série é derivável, duas vezes, termo a termo. Assim $y_p'' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 a_n \cos(nx)$. Mostre que

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{(2 - n^2)n^2}.$$

Passo 3 Escreva a série que define y_p. Conclua que y_p é de fato derivável, duas vezes, termo a termo e que y_p é uma solução particular para a equação dada.

2. **(Resolução de EDO por Séries de Fourier: caso ressonante)** Siga os passos a seguir para determine uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = f(x),$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período 2π é dada por $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$.

Passo 1 Desenvolva a função dada em uma série de Fourier e use os teoremas de convergência para mostrar que

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

Passo 2 Reescreva a equação como

$$y'' + 4y = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos 2x + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{(4-n^2)n^2}\cos(nx).$$

Considere $f_1(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x)$ e determine uma solução particular y_1 para a equação

$$y'' + 4y = f_1(x).$$

(sugestão: tentativa $y_1(x) = A + B\cos x$ com A e B a serem determinados)

Passo 3 Vamos agora determinar uma solução particular y_2 para a equação

$$y'' + 4y = \cos(2x). \tag{1}$$

Temos aqui o fenômeno de ressonância (a frequência da solução geral da equação homogênea coincide com a frequência do termo forçante $\cos(2x)$). O método utilizado no item anterior não funciona neste caso. Verifique que $y_2(x) = \frac{1}{4}x\sin(2x)$ é uma solução particular de (1). *(Você pode usar os métodos estudados em EDO para encontrar y_2).*

Passo 4 Mostre que

$$y_3(x) = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{(4-n^2)n^2}\cos(nx)$$

é uma solução particular para

$$y'' + 4y = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

(Perceba a necessidade do passo 3.)

Passo 5 Mostre que $y_p = y_1 + y_2 + y_3$ é uma solução particular da equação dada.

3. Um problema do calor um pouco diferente daquele que estudamos na aula mas que também pode ser tratado pelo método de separação de variáveis é obtido quando as extremidades da barra estão isoladas (condição de Neumann). Siga os passos a seguir para enuncie um teorema de existência de solução e exibir uma fórmula da solução do problema do calor com condição de Neumann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \quad \text{(Equação do Calor)} \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t \geq 0 \quad \text{(Fluxo zero nos extremos)} \\ u(0,x) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \quad \text{(Condição inicial)} \end{cases}$$

(a) Use o método de separação de variáveis $u(t,x) = T(t)X(x)$ para obter

$$T'' + \lambda T = 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

(b) Verifique que $\lambda = 0$ ou $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, e que para cada $n \in N \cup \{0\}$ as respectivas soluções são

$$X_0(x) = 1, \quad T_0(t) = 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

(c) Defina $u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = 1$ e $u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, e considere

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x).$$

(d) Verifique que se $f \in C([0,L])$ é diferenciável, exceto um número finito de pontos, e $f' \in SC([0,L])$ então u satisfaz $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$, desde que a_n sejam os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de cossenos de f (aproveite para discutir a necessidade de estender a função f a toda reta a uma função par, contínua e periódica de período $2L$.

(e) Verifique que

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a_n são os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de f, define uma função contínua em $[0,\infty) \times [0,L]$ e que a série pode ser derivada termo a termo com respeito a t (uma vez) e a x (duas vezes) para todo $t > 0$ e $x \in [0,L]$.

Sugestão: use o mesmo argumento que empregamos para o problema do calor estudado na aula para a condição de fronteira nula (Dirichlet).

(f) Conclua que $u(t,x)$ definida acima é a solução do problema do calor com condição de Neumann.

(g) Note que se $f(x) = k$, uma constante, então $u(x,t) = k$.

(h) Estude $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ e interprete o resultado obtido.

4. Use o exercício 3 e o exercício 7b da Lista 9 para encontrar a solução do problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & 0 \le t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

onde a condição inicial é dada por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$