

1. Os dados abaixo foram coletados de duas variáveis denotadas por X e Y . Deve ser estimada a razão $E(X)/E(Y)$. Um possível estimador é \bar{X}/\bar{Y} .
 - (a) Para diferentes números de amostras *bootstrap* B , represente graficamente uma estimativa de $E(X)/E(Y)$ corrigida em relação ao viés. Compare com a estimativa sem correção de viés. O eixo horizontal do gráfico (B) pode ser representado em escala logarítmica (base 10).
 - (b) Apresente estimativas do erro padrão do estimador \bar{X}/\bar{Y} com base nos métodos *bootstrap* e *jackknife*.

Observação	1	2	3	4	5	6	7	8
x	8406	2342	8187	8459	4795	3516	4796	10238
y	-1200	2601	-2705	1982	-1290	351	-638	-2719

2. A distribuição gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tem função densidade

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ se } x > 0; \quad f(x; \alpha, \beta) = 0, \text{ caso contrário,}$$

em que $\Gamma(\cdot)$ denota a função gama. A matriz de informação de Fisher de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$ é dada por

$$\mathbf{I}_F(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \psi'(\alpha) & 1/\beta \\ 1/\beta & \alpha/\beta^2 \end{bmatrix},$$

em que $\psi(\cdot)$ denota a função digama, dada por $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, para $x > 0$.

Implemente em linguagem R um código para o cálculo de estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros pelos métodos de Newton e do escore de Fisher.

Utilizando dados simulados (função `rgamma`), compare os resultados obtidos com as estimativas fornecidas pela função `fitdistr` do pacote MASS.

Notas 1. Em linguagem R, a função trigama $\psi'(\cdot)$ está implementada na função `trigamma`.

2. Em uma amostra aleatória de tamanho n , a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ é normal com vetor de médias $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $[\mathbf{I}_{F,n}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$, em que $\mathbf{I}_{F,n}(\boldsymbol{\theta}) = n\mathbf{I}_F(\boldsymbol{\theta})$.