
SCC0216 - Modelagem Computacional em Grafos

Introdução a Grafos

Prof. Alneu (alneu@icmc.usp.br) / Profa. Rosane (rminghim@icmc.usp.br)

PAE: Alan (alan@icmc.usp.br) / Henry (henry@icmc.usp.br)

Baseado no material de aula original: Prof^a. Josiane M. Bueno

Divisão do arquivo

- 1ª parte:

- Motivação
 - Definição: Ordem, Multigrafo, Grafo Simples, Grafo Trivial, Grafo Vazio, Laço, Vértices Adjacentes, Arestas Adjacentes, Grafo Completo.
 - Exercícios
-

Divisão do arquivo

■ 2ª parte

- Aplicações

- Grafo Orientado

- Grau, Grau de Saída, Grau de Entrada, Grafo Regular

- Exercícios

Divisão do arquivo

■ 3ª parte

- Grafo Valorado
 - Caminho e Caminho Simples
 - Circuito, Ciclo, Grafo Cíclico
 - Caminho e Grafo: Hamiltoniano e Euleriano.
 - Subgrafo
 - Grafo: Conexo e (Totalmente) Desconexo
 - Dígrafo Fortemente Conexo
 - Componente Conexa
 - Exercícios
-

Divisão do arquivo

■ 4ª parte

- Grafo Bipartido, Bipartido Completo
 - Complemento
 - Isomorfismo
 - Árvore, Árvore Enraizada, Floresta
 - Subgrafo, Subgrafo Gerador, Árvore Geradora, Subgrafo Induzido
 - Exercícios
-

Divisão do arquivo

- 1ª parte:

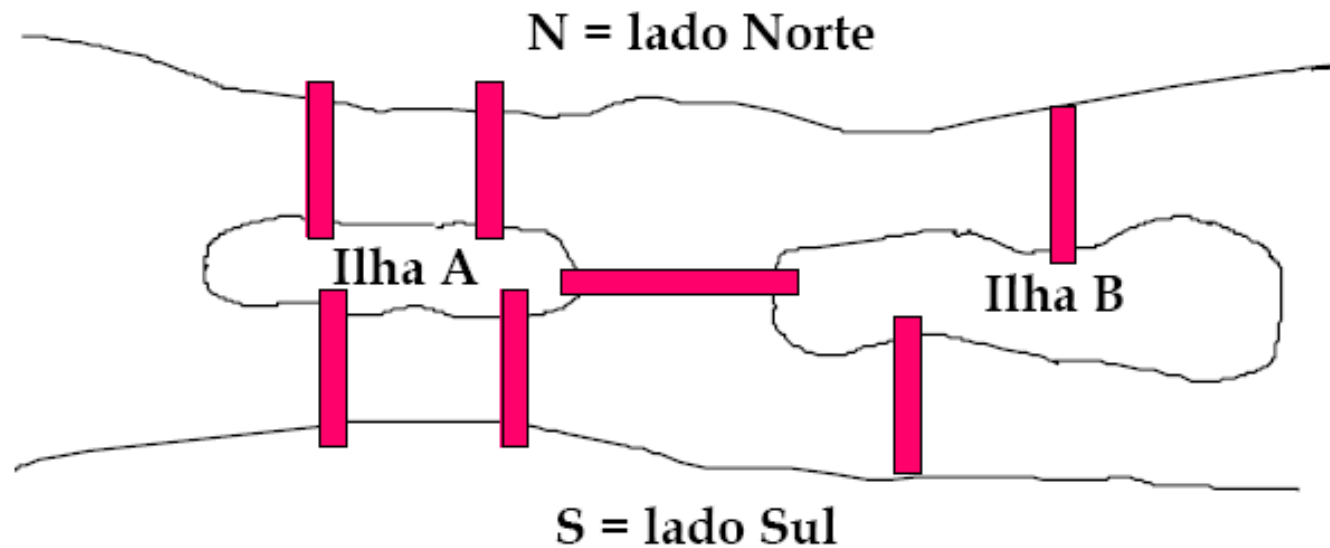
- Motivação
 - Definição: Ordem, Multigrafo, Grafo Simples, Grafo Trivial, Grafo Vazio, Laço, Vértices Adjacentes, Arestas Adjacentes, Grafo Completo.
 - Exercícios
-

Motivação

- Grafos: conceito introduzido por Euler, em 1736
 - Problema da Ponte de Königsberg
 - Modelos matemáticos para resolver problemas práticos do dia a dia...
 - Muito usados para modelar problemas em computação -
> ênfase em aspectos computacionais
-

Um problema famoso

As 7 pontes de Königsberg

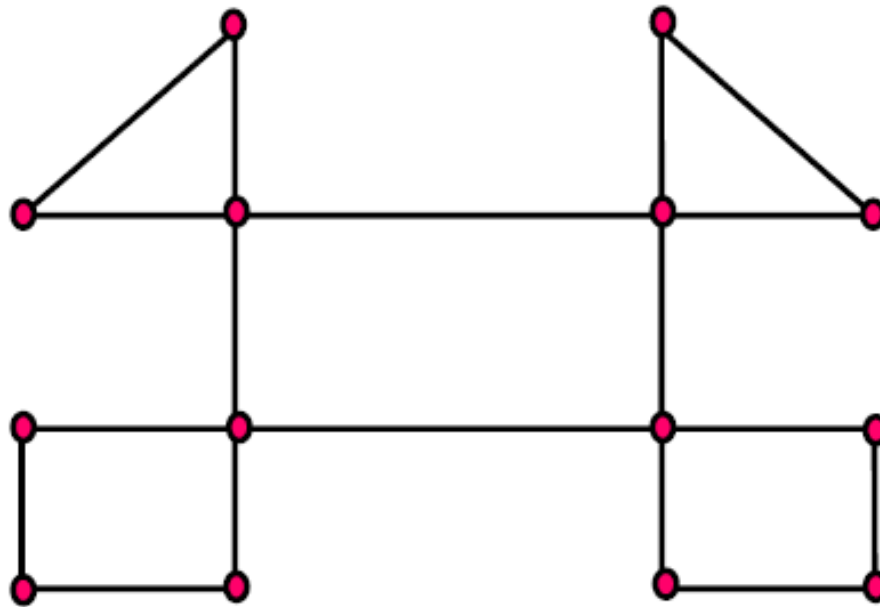


Motivação

O problema do carteiro chinês...

- ❑ Não é exatamente um problema de Ciência da Computação...
 - ❑ Mas a Teoria dos Grafos permite que ele seja resolvido automaticamente, usando o computador como ferramenta!
 - ❑ Você acha que o problema tem solução?
 - ❑ Se tem, qual seria uma 'rota ideal'?
-

Problema do carteiro chinês

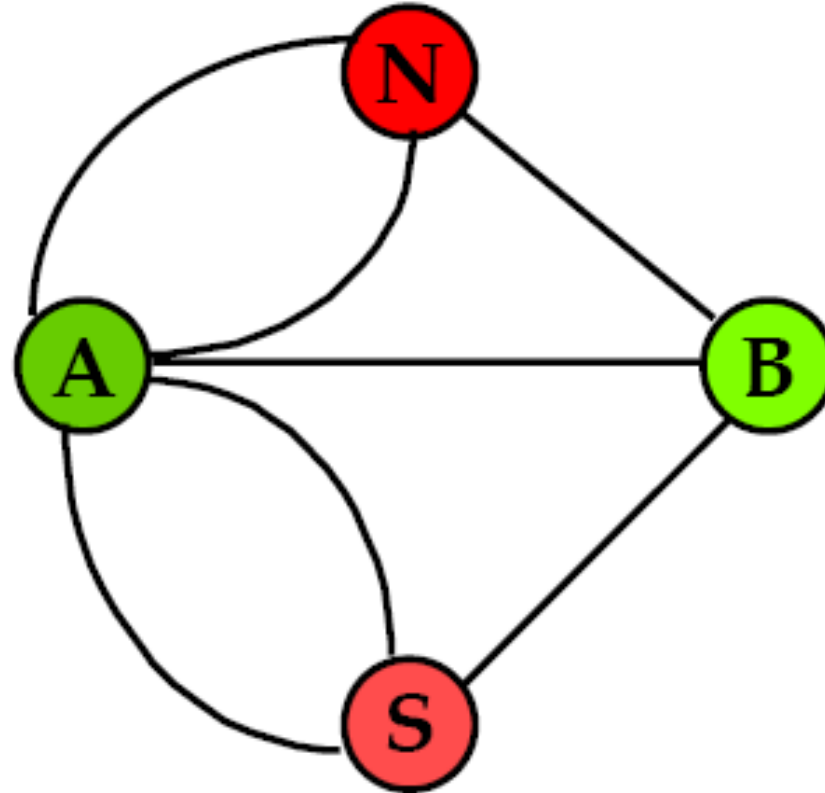


Um problema simples do carteiro chinês

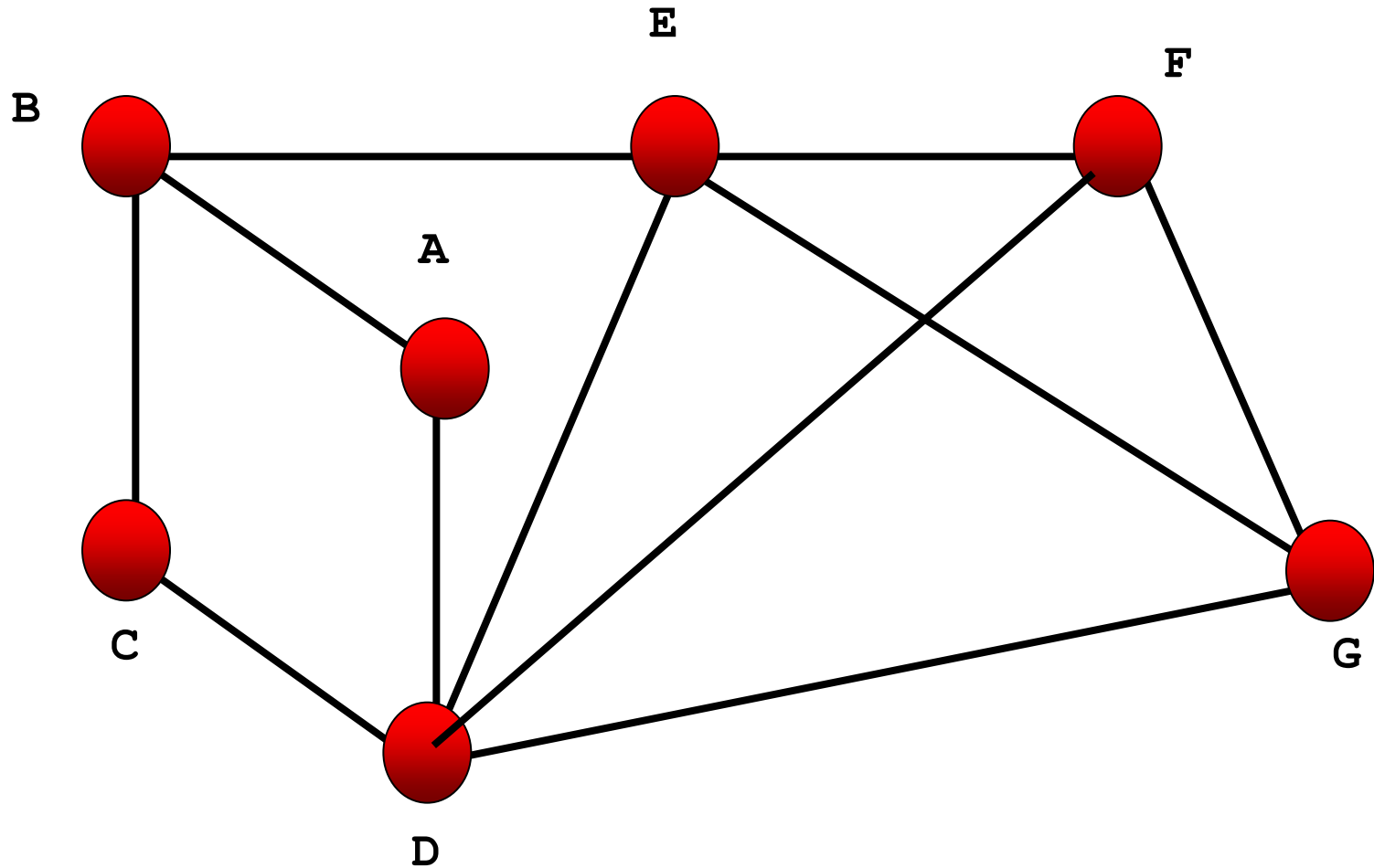
Exemplos de estruturas que podem ser representadas como grafos

- Circuitos elétricos
 - Redes de distribuição
 - Relações de parentesco entre pessoas
 - Outras Redes Sociais
 - Rede de estradas entre cidades/vôos
 - Redes (físicas e lógicas) de computadores
 - Páginas da Web
-

Exemplo



Exemplo



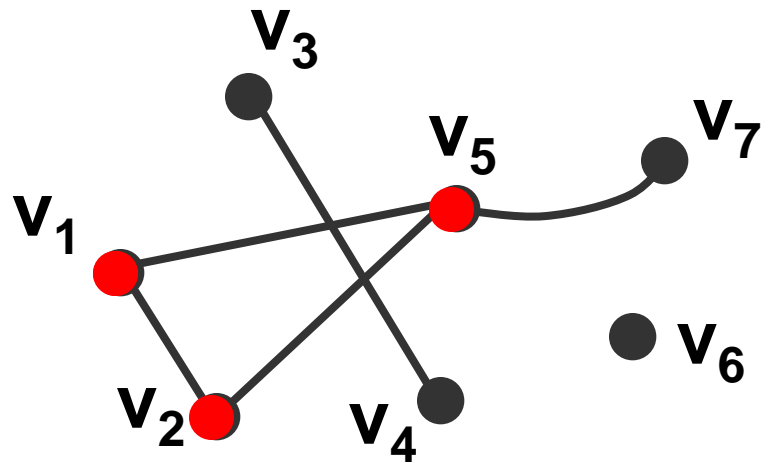
Definição

- Grafo é um modelo matemático que representa relações entre objetos. Um grafo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto de vértices V , ligados por um conjunto de arestas ou arcos E .

Representação:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2); (v_1, v_5); (v_2, v_5); (v_3, v_4); (v_5, v_7)\}$$

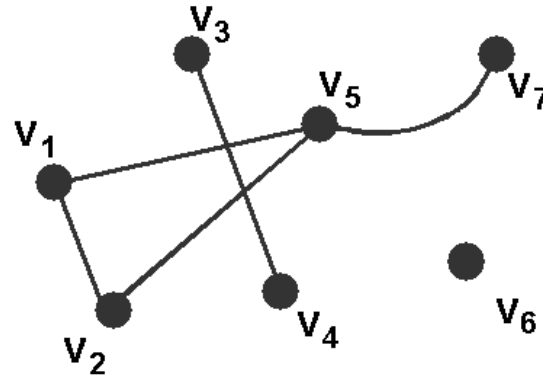


Definição

- A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices $|V(G)|$, ou seja, pelo número de vértices de G .
- O **número de arestas** de um grafo é dado por $|E(G)|$. Assim, para o grafo do exemplo anterior:

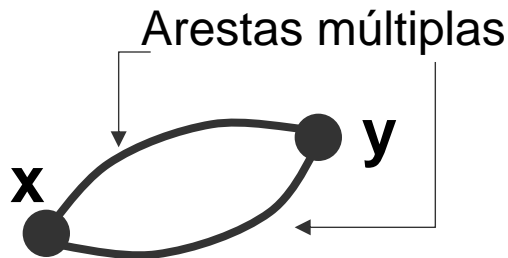
$$|V(G)| = 7$$

$$|E(G)| = 5$$



Multigrafo

- Quando um grafo possui mais de uma aresta interligando os mesmos dois vértices diz-se que este grafo possui **arestas múltiplas** (ou **arestas paralelas**). Ele é chamado de **multigrafo** ou **grafo múltiplo**. Por exemplo:



$$V = \{x, y\}$$

$$E = \{(x, y); (y, x)\}$$

$$|V| = 2 \text{ e } |E| = 2$$

- Um grafo **simples** é um grafo que não possui arestas múltiplas.



Grafo Trivial e Grafo Vazio

- Um grafo é dito **trivial** se for de ordem 0 ou 1.
Por Exemplo:

v_1 ●

$$V = \{v_1\}$$

$$E = \emptyset$$

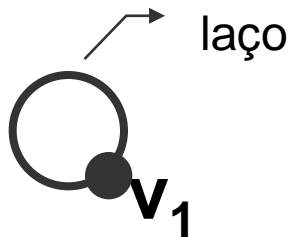
$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 0$$

- Um grafo **vazio** $G=(\emptyset, \emptyset)$ pode ser representado somente por $G = \emptyset$.

Laço

- Se houver uma aresta e do grafo G que possui o mesmo vértice como extremos, ou seja, $e=(x,x)$, então é dito que este grafo possui um **laço**.

Exemplo:



$$V = \{v_1\}$$

$$E = \{(v_1, v_1)\}$$

$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 1$$



Vértices Adjacentes

- Diz-se que os vértices x e y são **adjacentes** (ou vizinhos) quando estes forem os extremos de uma mesma aresta $e=(x,y)$.

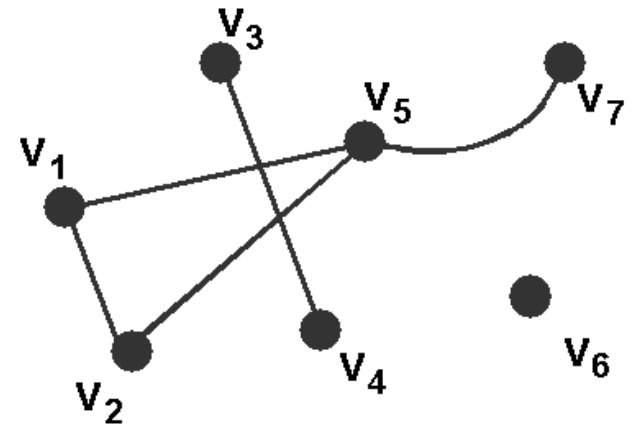
Assim:

v_3 é adjacente a v_4

v_4 é adjacente a v_3

v_5 NÃO é adjacente a v_4

v_7 NÃO é adjacente a v_2



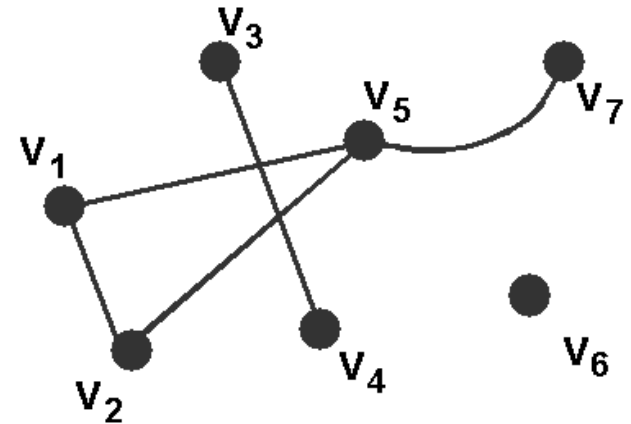
Arestas Adjacentes

- Diz-se que duas arestas são **adjacentes** (ou vizinhas) quando estas possuírem um mesmo extremo, ou vértice.

Assim:

(v_1, v_2) é **adjacente** a (v_2, v_5)

(v_1, v_2) **NÃO** é **adjacente** a (v_3, v_4)



- A aresta $e = (v_3, v_4)$ é dita **incidente** a v_3 e a v_4
- Ou, duas arestas adjacentes são incidentes a um vértice comum.

Grafo Completo

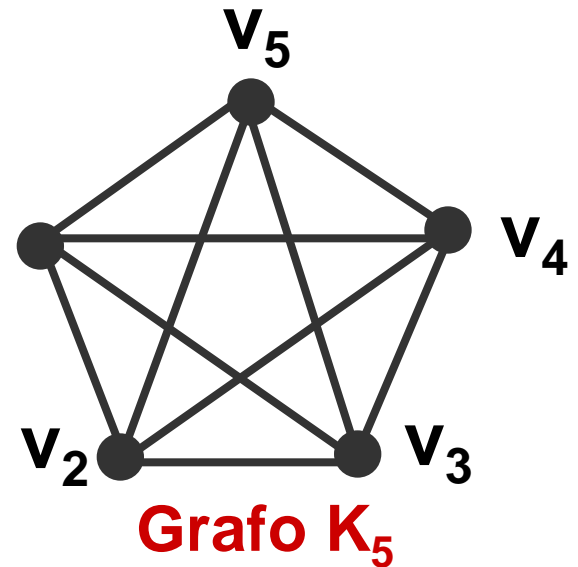
- Um grafo é **completo** se todos os seus vértices forem adjacentes. Um grafo completo K_n possui $n(n-1)/2$ arestas.

Exemplo:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), \\ (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), \\ (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$$

$$|V| = 5 \text{ e } |E| = 5(5-1)/2 = 10$$

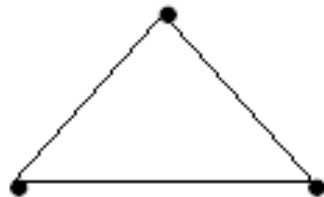


Grafos Completos



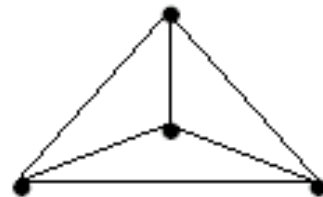
K_2

(a)



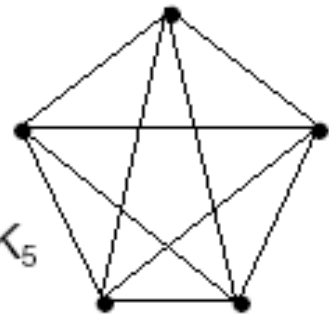
K_3

(b)



K_4

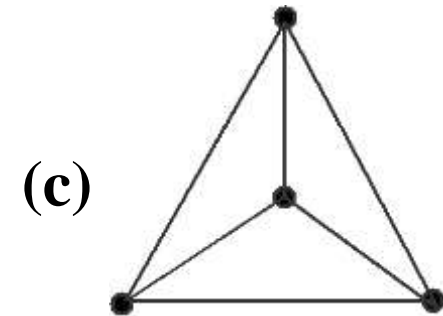
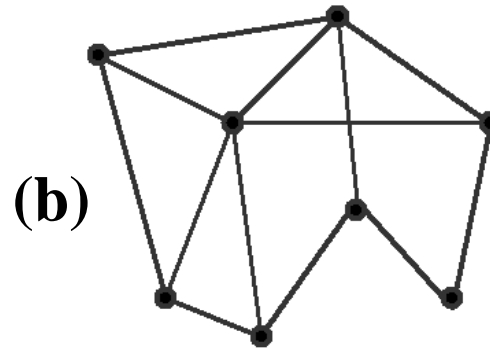
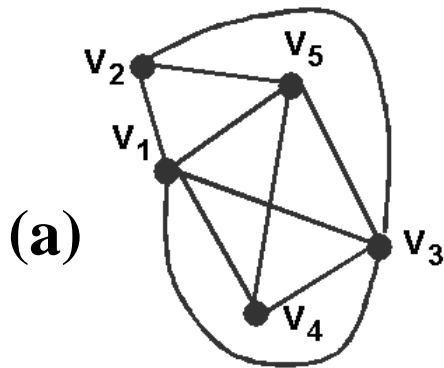
(c)



K_5

(d)

Exercícios de Fixação



- Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
- Quais dos grafos acima são completos?
- Quais dos grafos acima são simples?
- No grafo (a), quais vértices são adjacentes a v_3 ? E quais arestas são adjacentes a (v_3, v_5) ?

Divisão do arquivo

■ 2ª parte

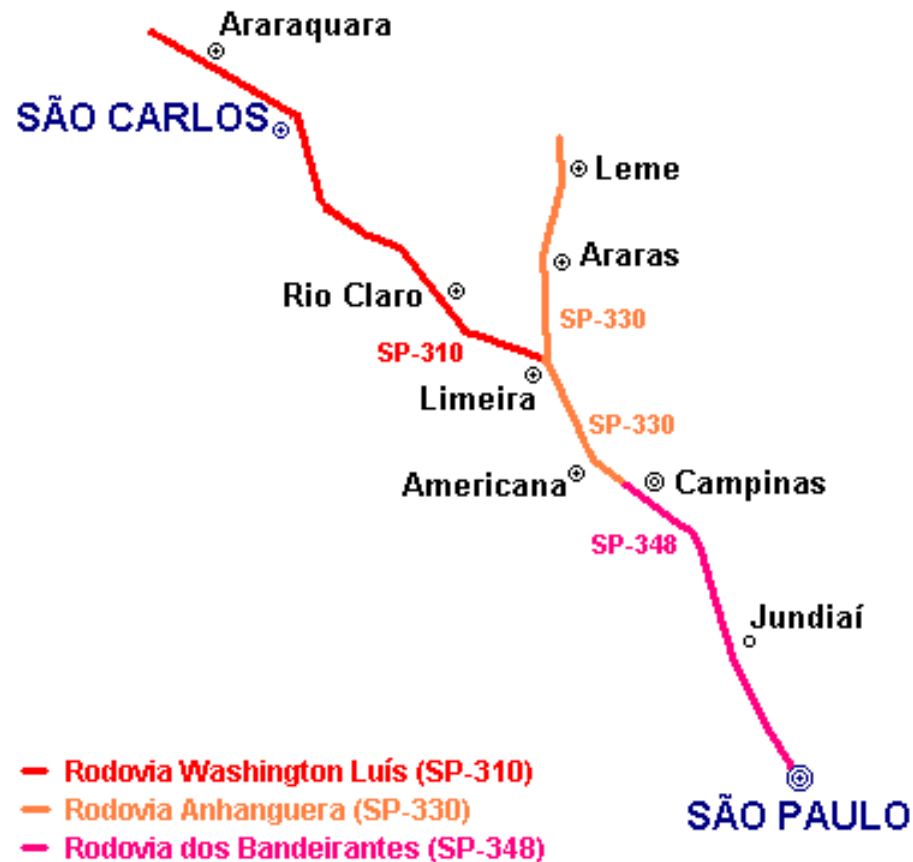
- Aplicações

- Grafo Orientado

- Grau, Grau de Saída, Grau de Entrada, Grafo Regular

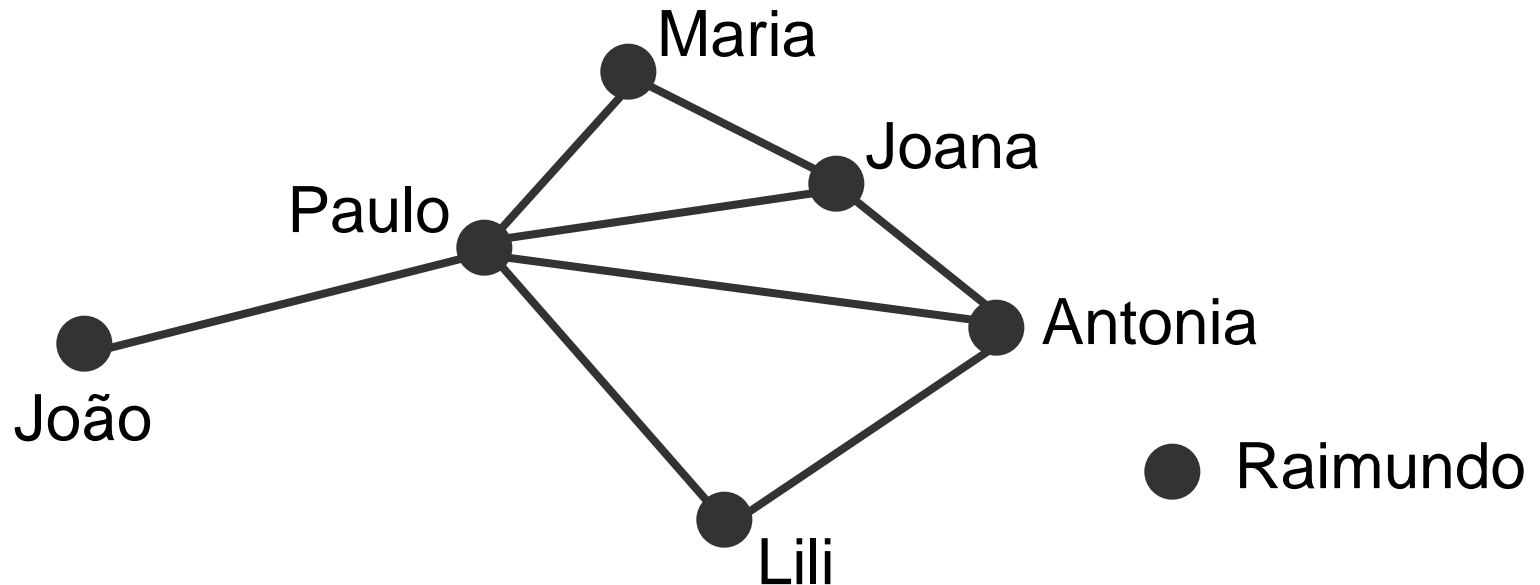
- Exercícios

Aplicações



Aplicações

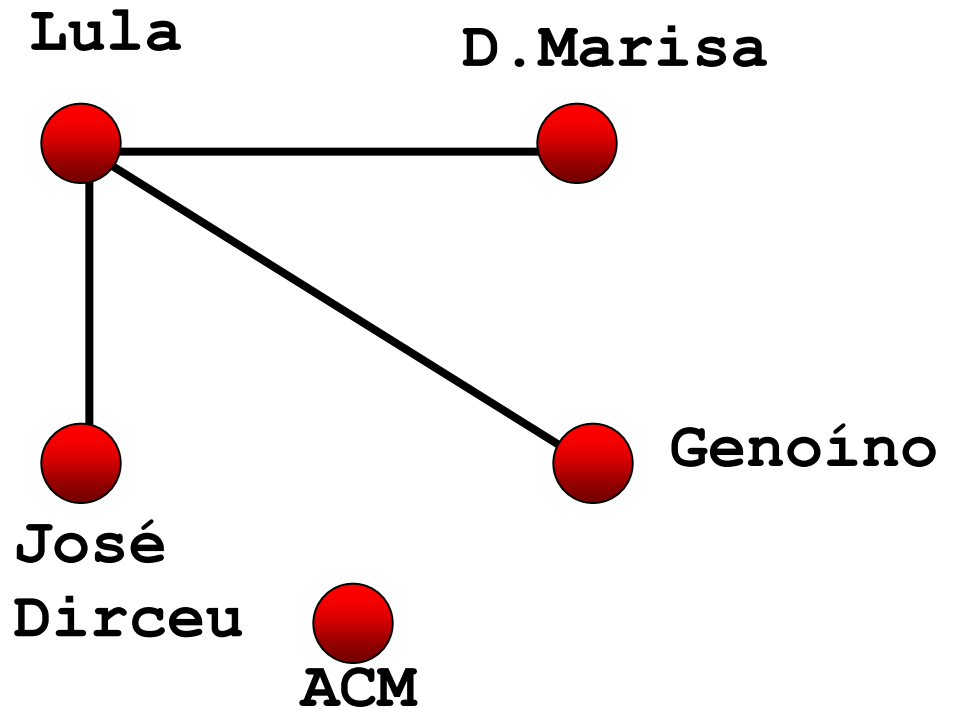
Rede de Relacionamentos (**relação** “Conhecer”):



Aplicações

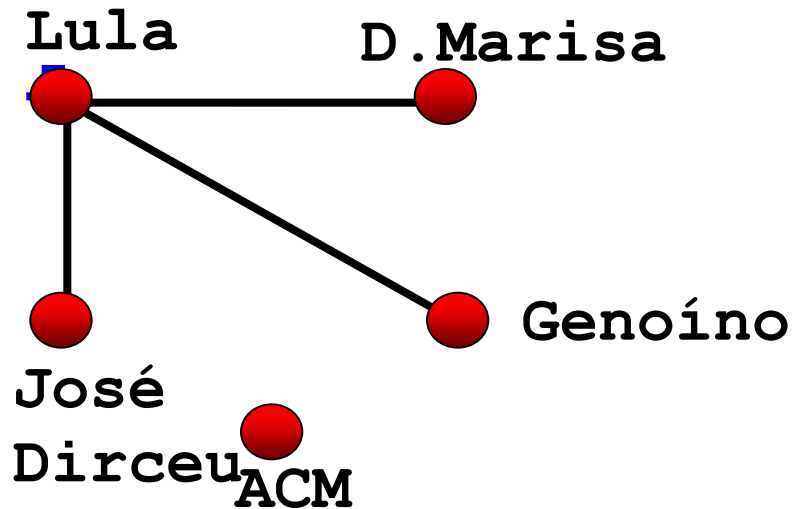
Rede de
Relacionamentos
(**relação** “amizade”):

*Quem possui mais amigos?
E menos amigos?*

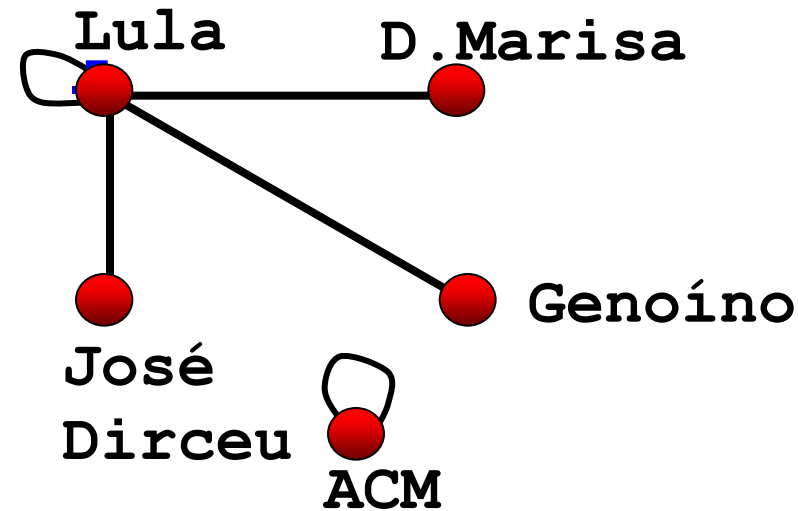


Aplicações

Grafo sem laço



Grafo com laço

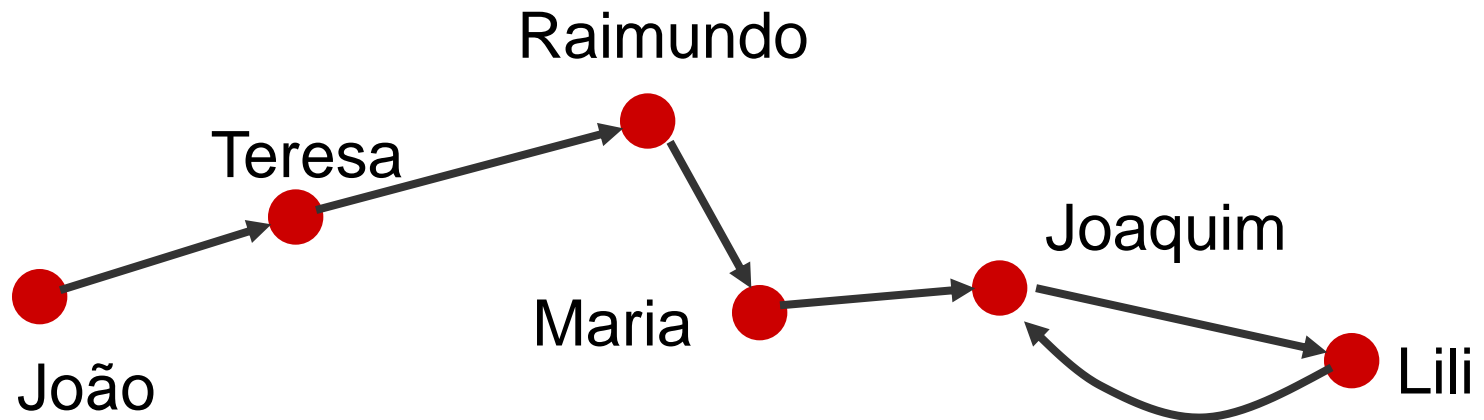


Aplicações

- Cada vértice é uma tarefa de um grande projeto. Há uma aresta de x a y se x é pré-requisito de y , ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar.
- Cada vértice é uma página na teia WWW. Cada aresta é um link que leva de uma página a outra (Há cerca de 2 milhões de vértices e 5 milhões de arcos).
- Outros: Redes de computadores, rotas de vôos, redes de telefonia, etc

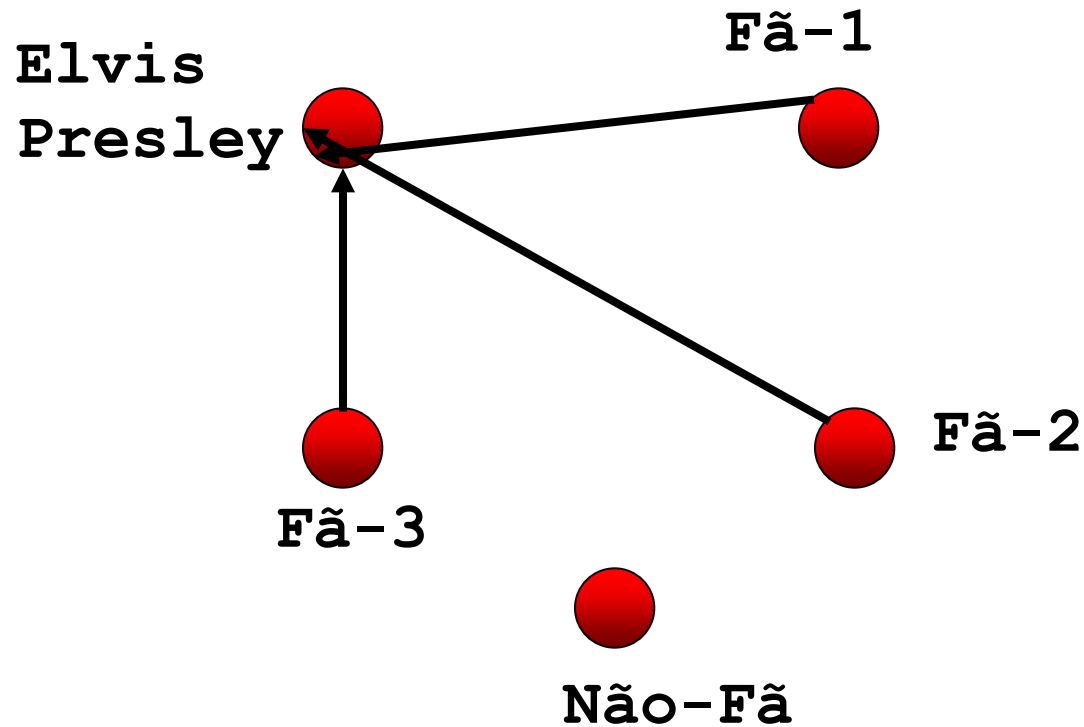
Aplicações

“João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém...” (Carlos Drummond de Andrade)



Aplicações

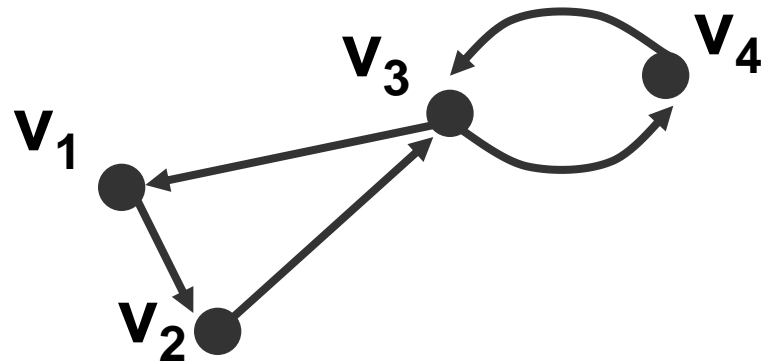
■ O Grafo “sou fã de...”



Orientados

- Um grafo **orientado** (ou **dígrafo**) $D = (V, E)$ consiste de um conjunto V (vértices) e de um conjunto de E (arestas) de pares ordenados de vértices distintos.

Representação :



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

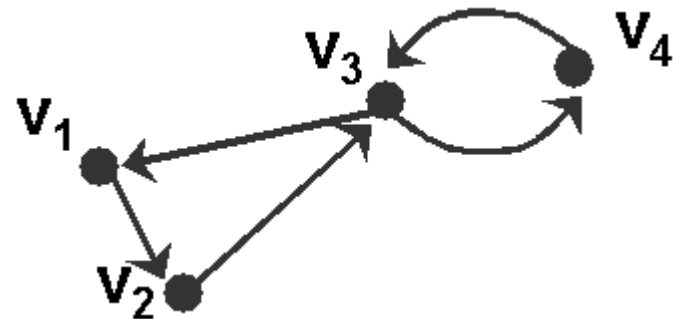
$$E(G) = \{(v_1, v_2); (v_3, v_1); (v_2, v_3); (v_3, v_4); (v_4, v_3)\}$$

Orientados

- Em um grafo orientado, cada aresta $e = (x, y)$ possui uma única direção de x para y . Diz-se que (x, y) é **divergente** de x e **convergente** a y . Assim:

(v_3, v_1) é **divergente** de v_3

(v_3, v_1) é **convergente** a v_1



Grau

- O **Grau** $d(v)$ de um vértice v corresponde ao número de vértices adjacentes a v (ou ao número de arestas incidentes a v).

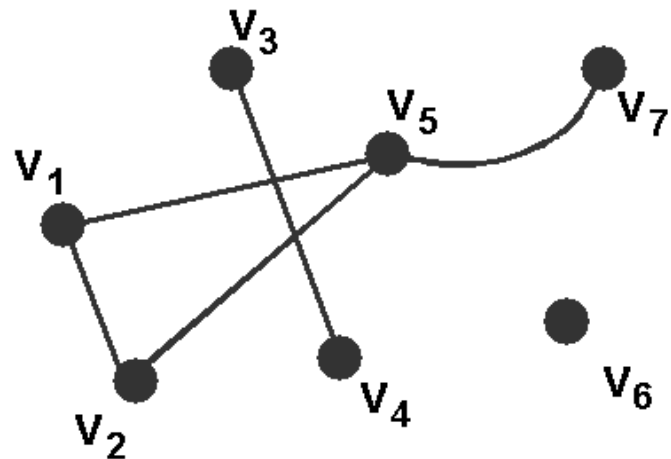
Exemplo:

$$d(v_6) = 0$$

$$d(v_3) = d(v_4) = d(v_7) = 1$$

$$d(v_1) = d(v_2) = 2$$

$$d(v_5) = 3$$



Grau

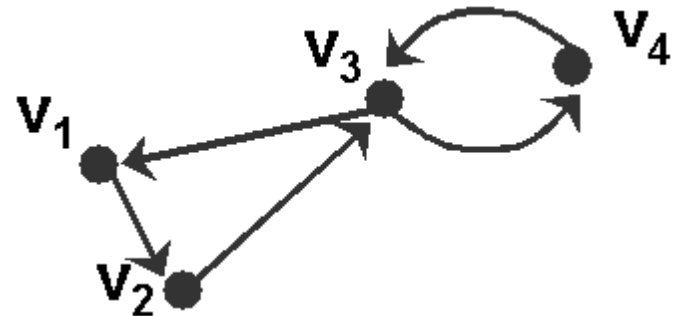
■ Em um grafo orientado:

- O **Grau de Saída** $d_{out}(v)$ de um vértice v corresponde ao número de arestas divergentes (que saem) de v .
- O **Grau de Entrada** $d_{in}(v)$ de um vértice v corresponde ao número de arestas convergentes (que chegar

$$d_{in}(v_3) = 2 \text{ e } d_{out}(v_3) = 2$$

$$d_{in}(v_1) = d_{in}(v_2) = d_{in}(v_4) = 1$$

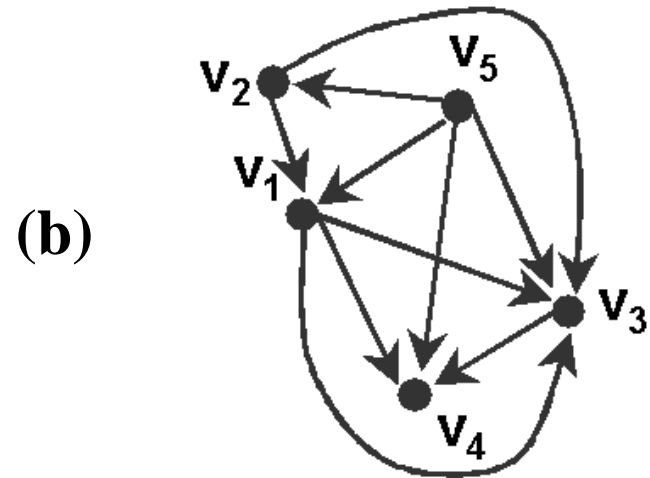
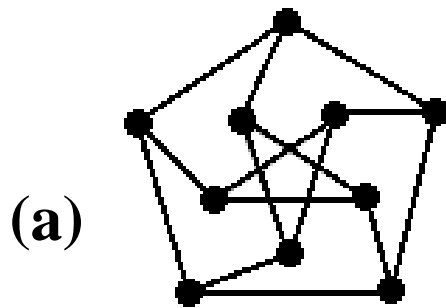
$$d_{out}(v_1) = d_{out}(v_2) = d_{out}(v_4) = 1$$



Grau

- Um vértice com grau de saída nulo, ou seja, $\text{dout}(v) = 0$, é chamado de sumidouro (ou sorvedouro).
- Um vértice com grau de entrada nulo, ou seja, $\text{din}(v) = 0$, é chamado de fonte.
- Diz-se que um grafo é **regular** se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau.

Exercício de Fixação



- O grafo (a) é regular? Por quê?
- Existe alguma **fonte** ou **sumidouro** no grafo (b)?

Divisão do arquivo

■ 3ª parte

- Grafo Valorado
 - Caminho e Caminho Simples
 - Circuito, Ciclo, Grafo Cíclico
 - Caminho e Grafo: Hamiltoniano e Euleriano.
 - Subgrafo
 - Grafo: Conexo e (Totalmente) Desconexo
 - Dígrafo Fortemente Conexo
 - Componente Conexa
 - Exercícios
-

Grafos Valorados

- Um grafo valorado $G(V, A)$ consiste de um conjunto finito não vazio de vértices V , ligados por um conjunto A de arestas (ou arcos) com pesos.
 - O conjunto A consiste de triplas distintas da forma (v, w, valor) , em que v e w são vértices pertencentes a V e valor é um número real.
-

Grafos Valorados

Quão minha amiga é uma certa pessoa ?

Grafos podem ter **arestas** com pesos representando a 'força' da relação entre os vértices:

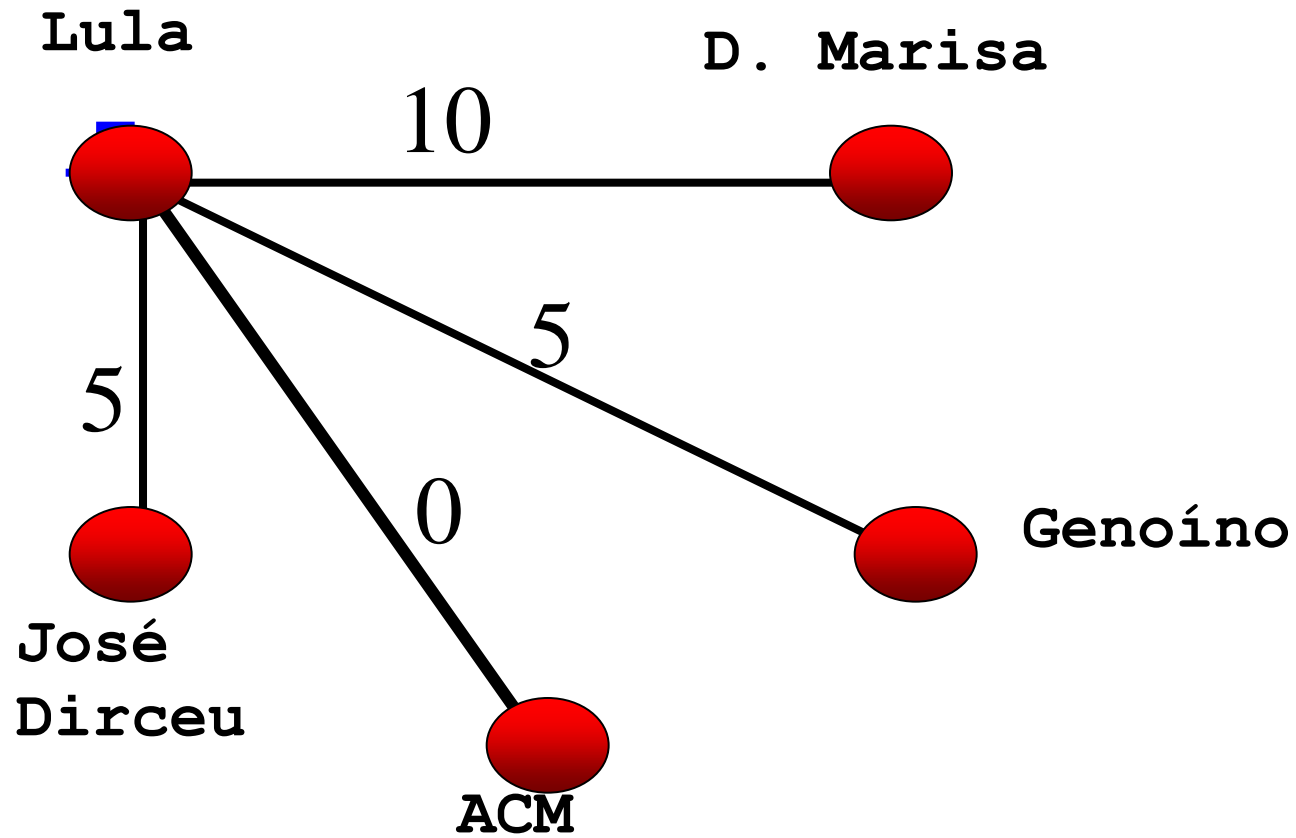
Ex.

0: inimiga

5: colega

10: amiga

Exemplo

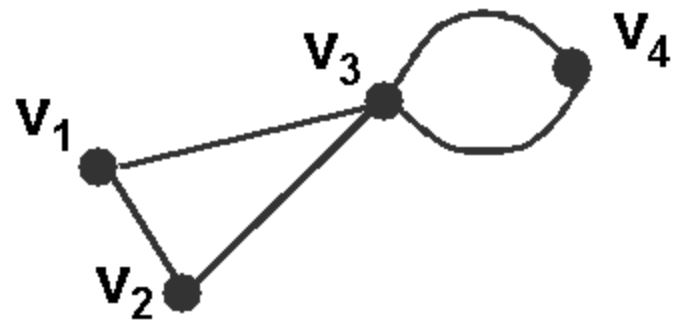


Caminho

- Um **caminho** entre dois vértices, x e y , é uma sequência de vértices e arestas que une x e y .
- Um caminho de **k -vértices** é formado por **$k-1$ arestas** $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots (v_{k-1}, v_k)$, e o valor de $k-1$ é o **comprimento** do caminho.

$$P = v_3, v_1, v_2 = P^2$$

$$P = v_3, v_4, v_3, v_1 = P^3$$

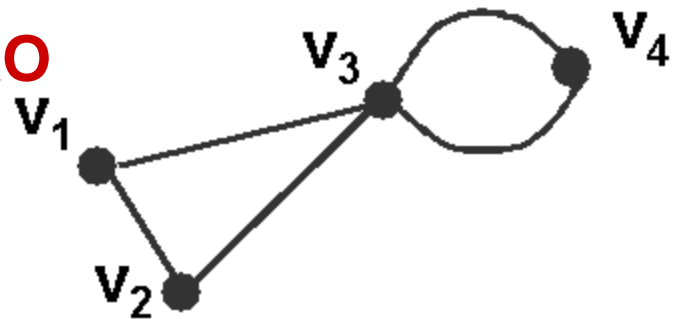


Caminho Simples

- Um caminho é **simples** se todos os vértices que o compõem forem distintos.

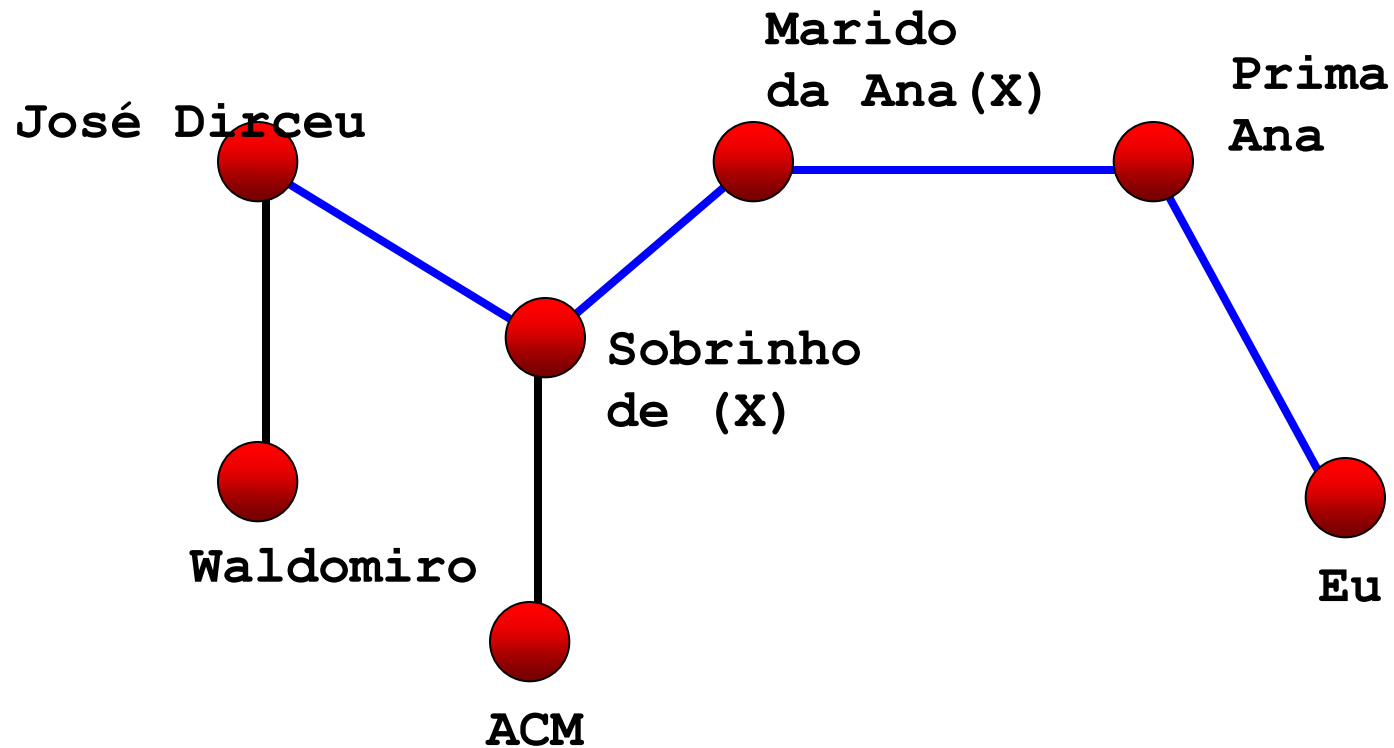
O caminho $P = v_3, v_1, v_2$ **é simples**

O caminho $P = v_3, v_4, v_3, v_1$ **NÃO é simples**



Caminho

O Grafo da Amizade...



Menor caminho

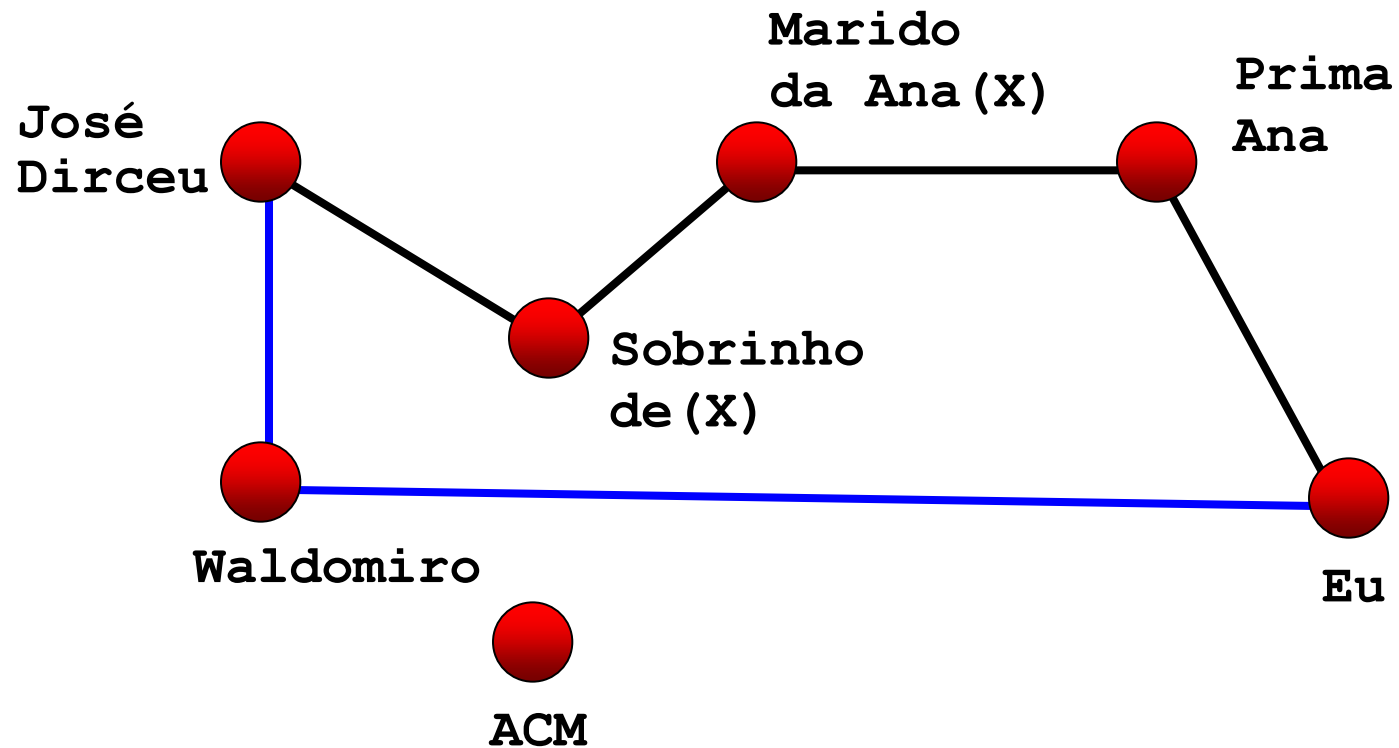
O Grafo da Amizade

Qual o **menor caminho** para me ligar a um político?

A multiplicidade de possíveis caminhos num grafo pode gerar a necessidade de buscar o menor caminho a um determinado vértice.

Exemplo de menor caminho

O Grafo da Amizade

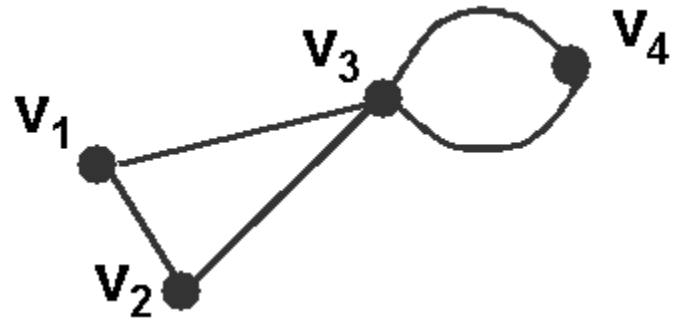


Circuito e Ciclo

- Um **circuito** é um caminho $P = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$, onde $v_1 = v_{k+1}$. Um **ciclo** é um circuito onde todos os vértices são distintos (exceto pelo primeiro e pelo último).
- Um grafo é **cíclico** se apresentar ao menos um ciclo.

v_3, v_1, v_2, v_3 é um ciclo

Portanto, este grafo é cíclico

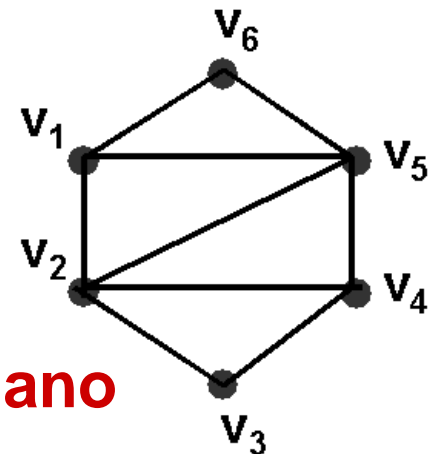


Caminho Hamiltoniano

- **Caminho Hamiltoniano** é aquele que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez.
- Um ciclo $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ é hamiltoniano quando o caminho v_1, v_2, \dots, v_k for um caminho hamiltoniano.

$v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$ **é hamiltoniano**

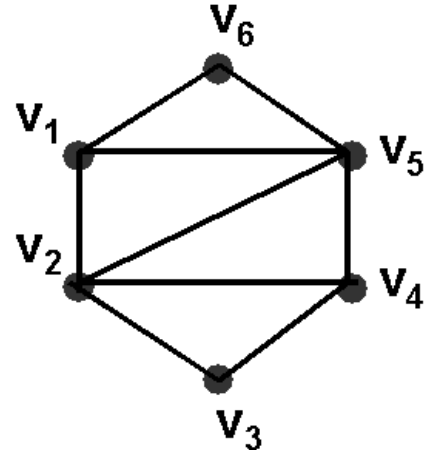
$v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ **é um ciclo hamiltoniano**



Grafo Hamiltoniano

- **Um grafo é Hamiltoniano** se contiver um ciclo hamiltoniano.

$v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ é um ciclo hamiltoniano, portanto o **grafo é hamiltoniano**

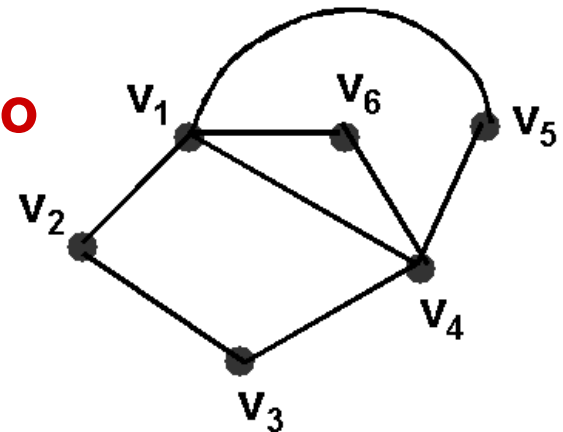


Caminho Euleriano

- **Caminho Euleriano** é aquele que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez.
- Um grafo é **Euleriano** se há um circuito em G que contenha todas as suas arestas.

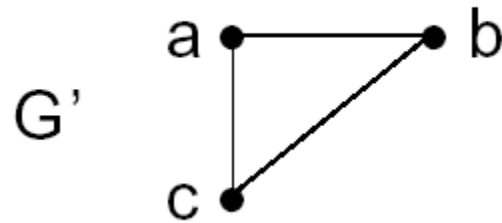
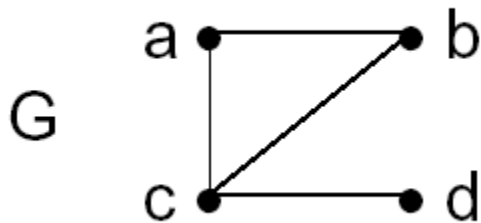
$V_1, V_6, V_4, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_1$ é euleriano

Portanto, este grafo é **euleriano**



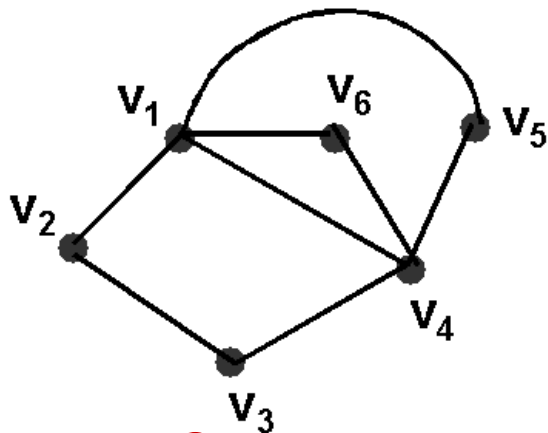
Subgrafo

- Um **subgrafo** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

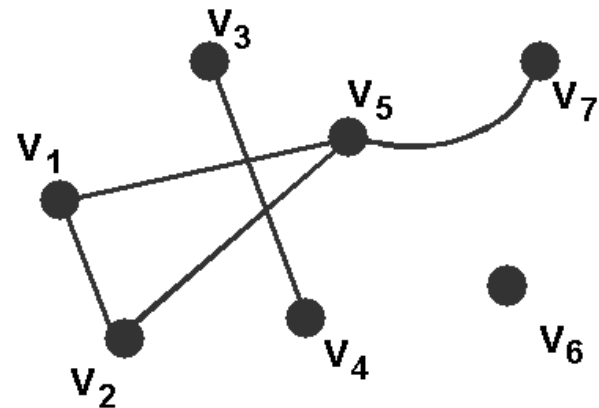


Grafo Conexo

- Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** quando existe um caminho entre cada par de vértices de G , caso contrário, G é **desconexo**. Para um grafo orientado, a decisão é feita SEM considerar a orientação da arestas.



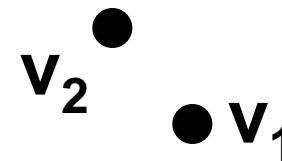
Conexo



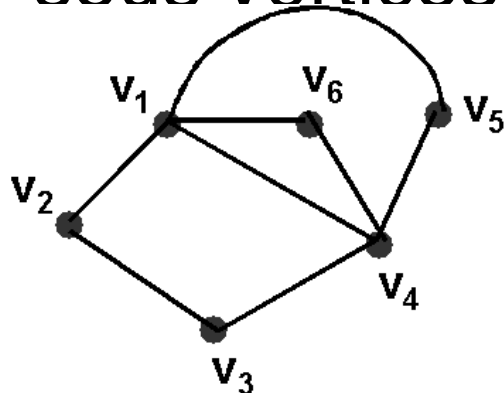
Desconexo

Grafo Conexo

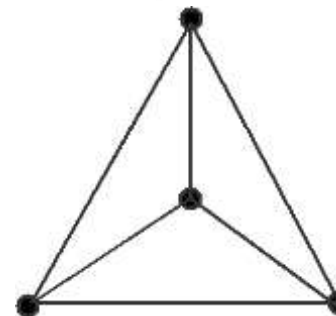
- Um grafo é **totalmente desconexo** quando não possui arestas.



- Todo grafo euleriano é **conexo** e todos os seus vértices possuem **grau par**.



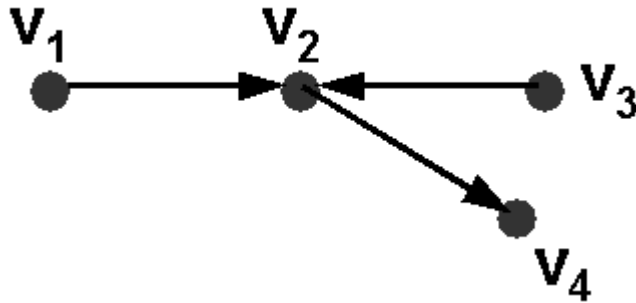
É euleriano



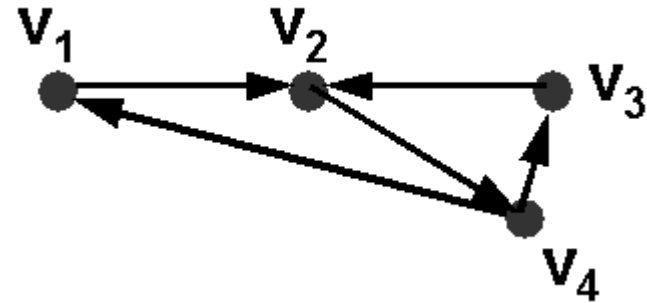
Não é euleriano

Dígrafo Fortemente Conexo

- Um grafo orientado $D = (V, E)$ é dito ser **fortemente conexo** quando existe um caminho entre cada par de vértices (x,y) e também entre (y,x) .



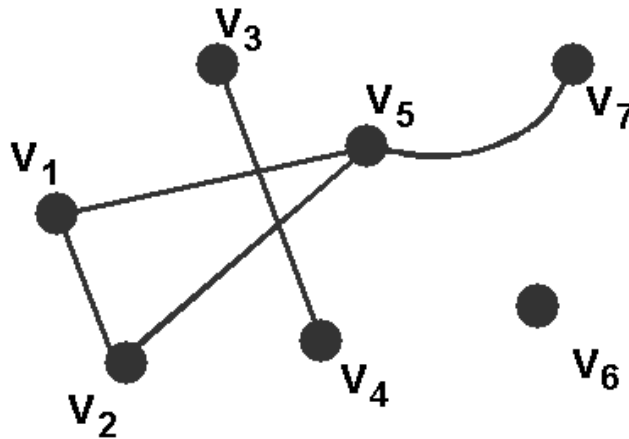
Conexo



Fortemente Conexa

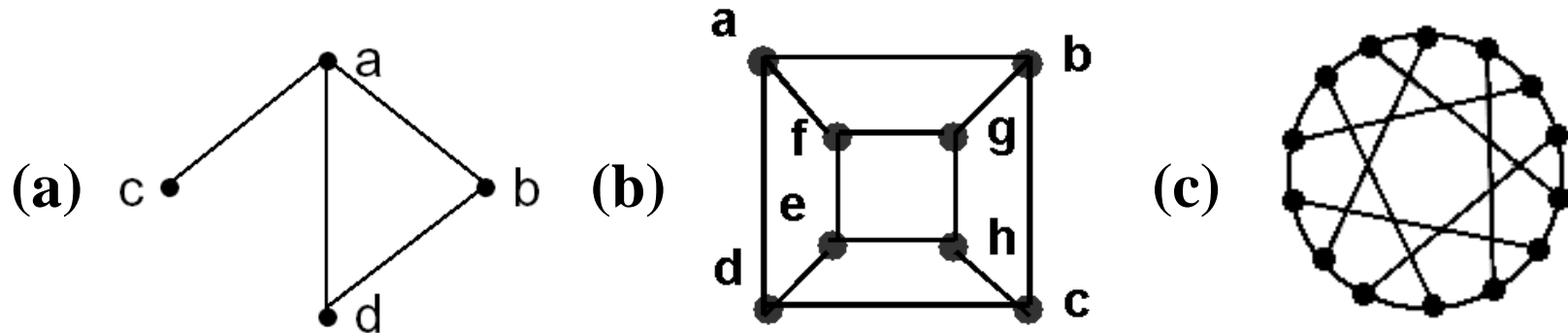
Componente Conexa

- Uma **componente conexa** corresponde a um **subgrafo** conexo maximal.



Contém 3 componentes conexas

Exercícios de Fixação



- Quais dos grafos acima são cíclicos?
- Indique os grafos que são conexos.
- Qual(is) dos grafos acima são Eulerianos? Quais são Hamiltonianos?

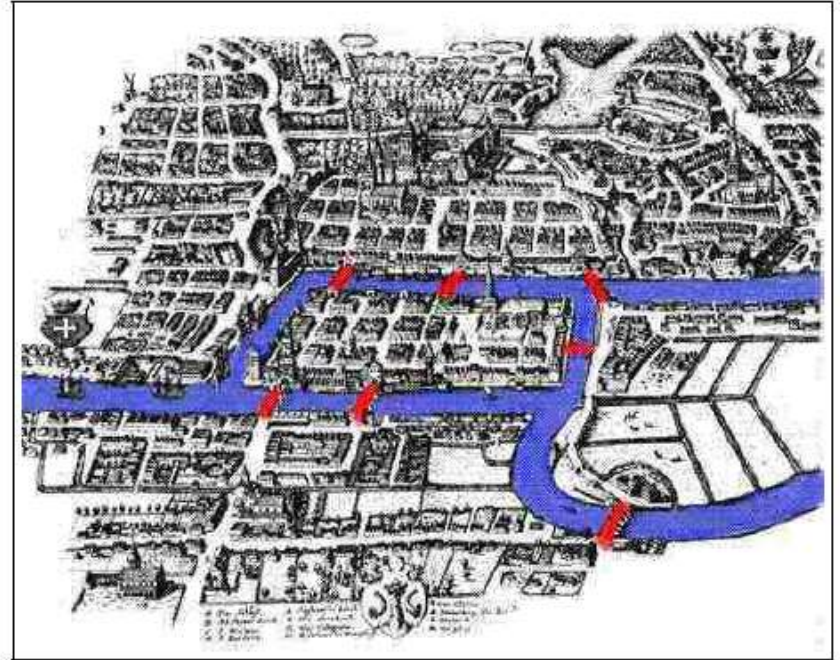
Exercício de Fixação

No século XVIII, na Prússia, havia uma controvérsia entre os moradores de Königsberg que chegou aos ouvidos do matemático Leonhard Euler.

Euler descreveu a controvérsia da seguinte forma:

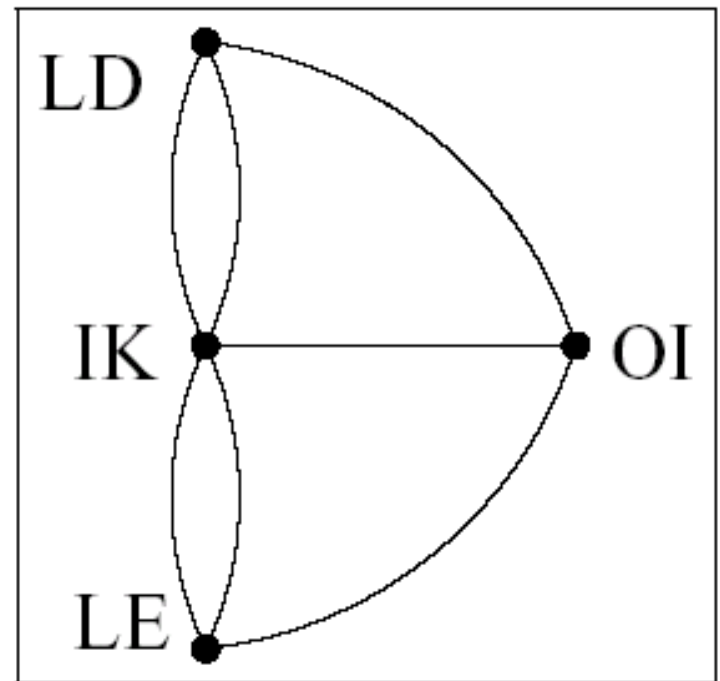
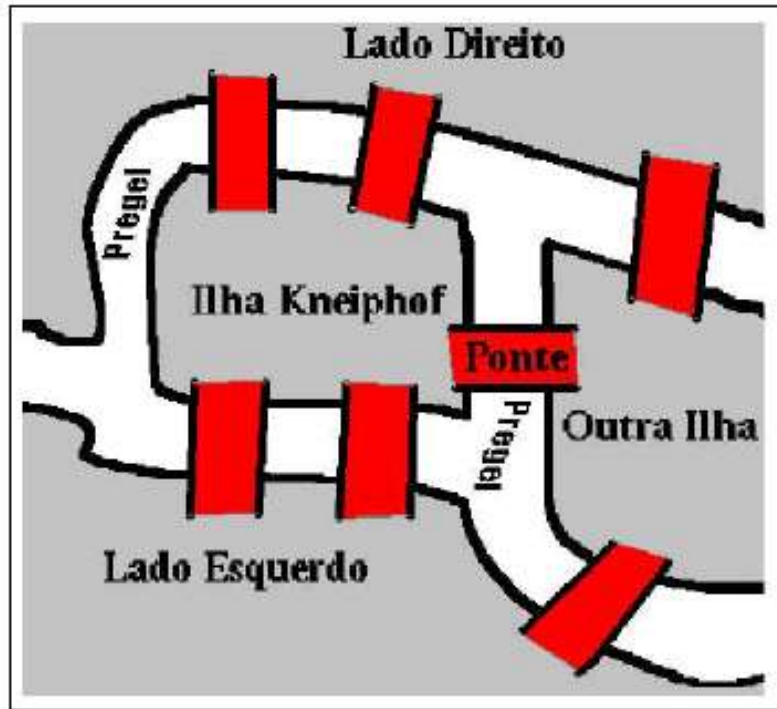
“... Na cidade de Königsberg, na Prússia, há uma ilha chamada Kneiphof, com os dois braços do rio Pregel fluindo em volta dela. Há 7 pontes – a, b, c, d, e, f e g – cruzando estes dois braços.

...A questão é se uma pessoa pode planejar uma caminhada de modo que ela cruze cada uma destas pontes uma única vez, e não mais que isso. . . ”



Como representar este problema?

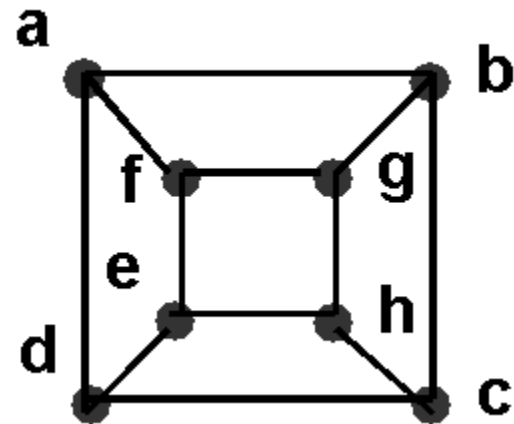
Exercício de Fixação



Por que não foi possível fazer tal trajeto?

Resposta

- Todos são cíclicos
- Todos são conexos
- Nenhum é Euleriano
- b) e c) Hamiltoniano.
- No grafo b)
(a,b,c,h,g, f,e,d,a)



Divisão do arquivo

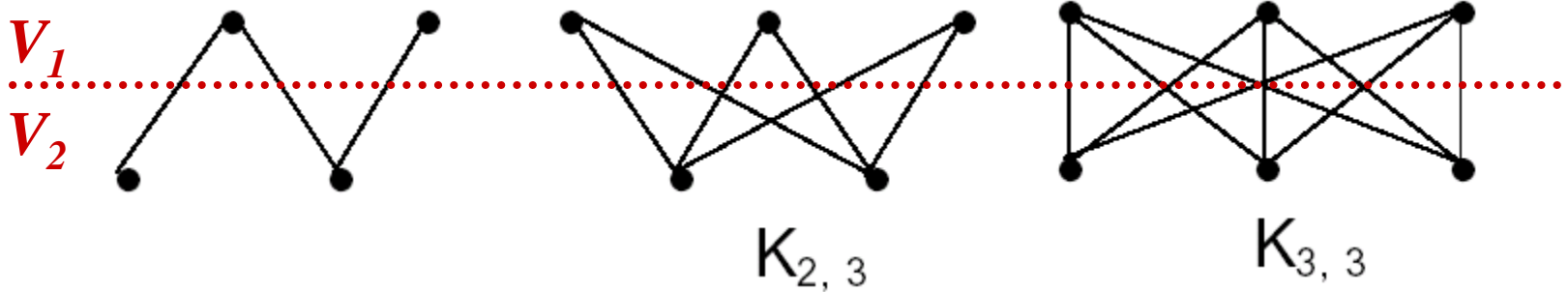
■ 4ª parte

- Grafo Bipartido, Bipartido Completo
 - Complemento
 - Isomorfismo
 - Árvore, Árvore Enraizada, Floresta
 - Subgrafo, Subgrafo Gerador, Árvore Geradora, Subgrafo Induzido
 - Exercícios
-

Grafo Bipartido

- Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** quando o seu conjunto de vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos V_1, V_2 tais que toda aresta do conjunto E une um vértice de V_1 a outro vértice de V_2 . Matematicamente:

$$V = V_1 \cup V_2; V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ e } \forall e = (u, v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2$$



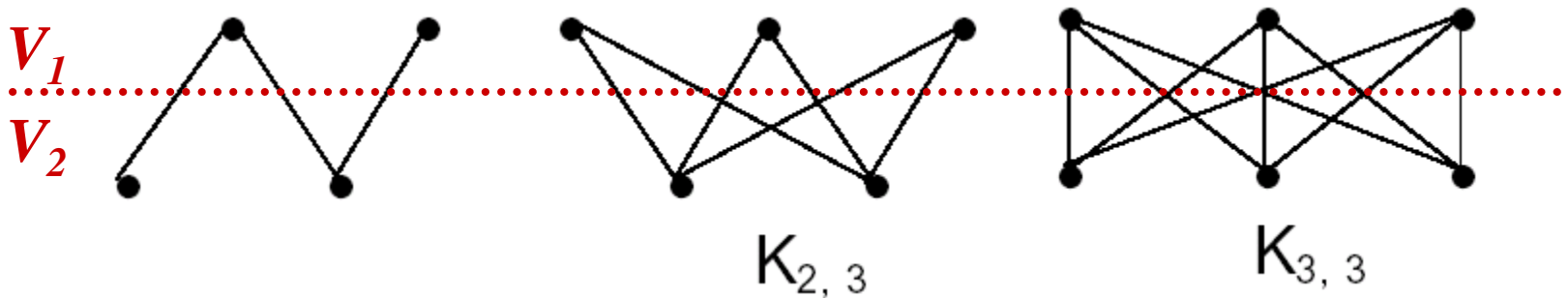
Grafo Bipartido Completo

■ Bipartido:

$$V = V_1 \cup V_2; V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ e } \forall e = (u, v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2$$

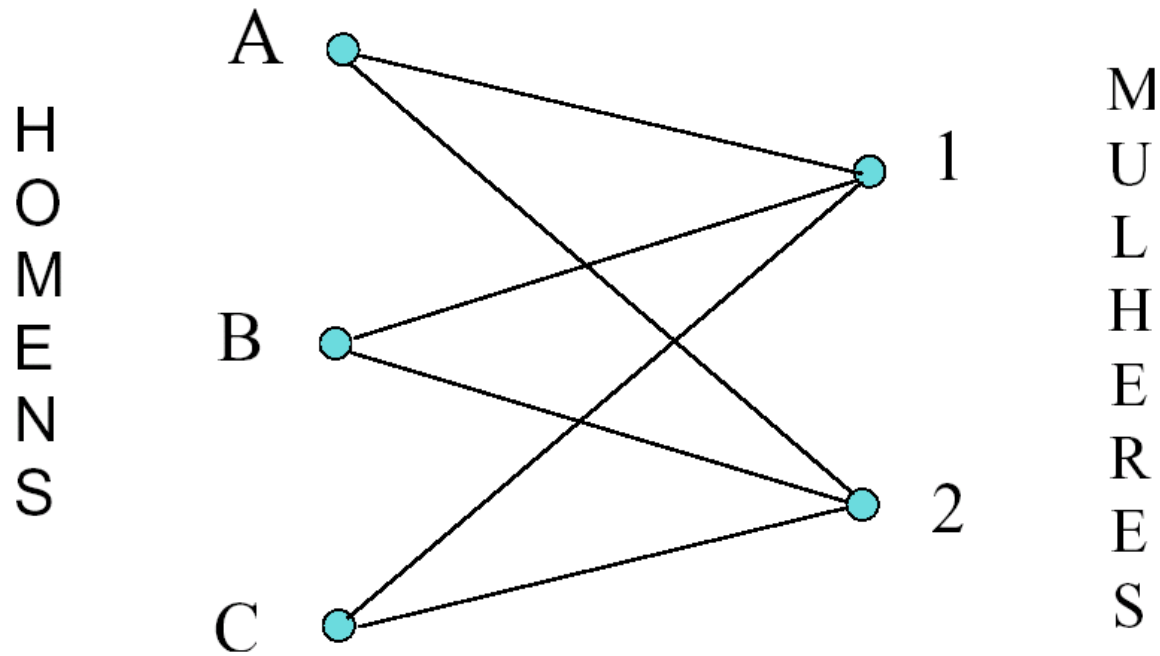
■ Bipartido Completo (notação $K_{|V_1|, |V_2|}$):

$$V = V_1 \cup V_2; V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ e } \forall e = (u, v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2 ; \\ \forall u \in V_1, \forall v \in V_2 \Rightarrow e = (u, v) \in E$$



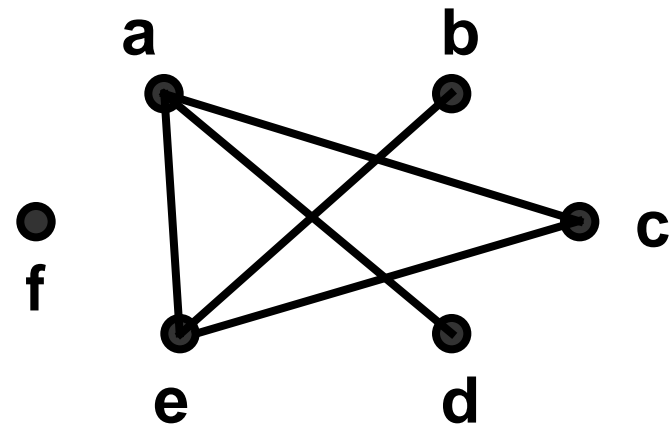
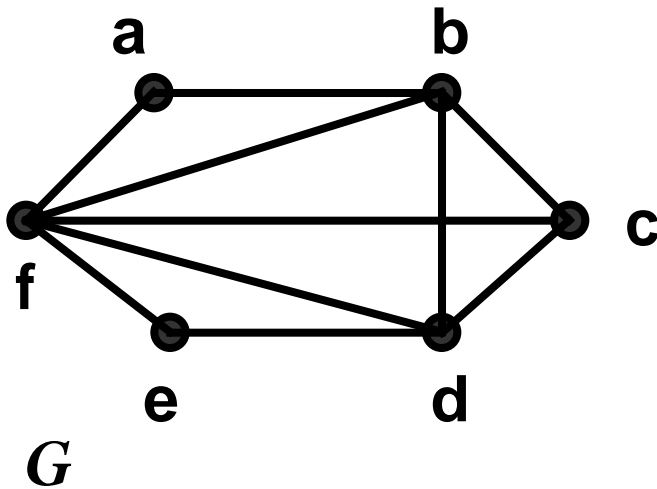
Grafo Bipartido

Namoro



Complemento

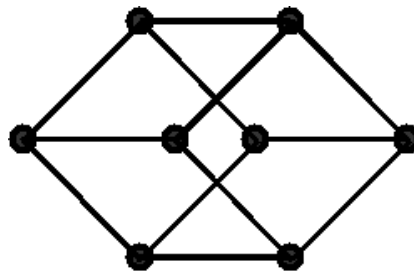
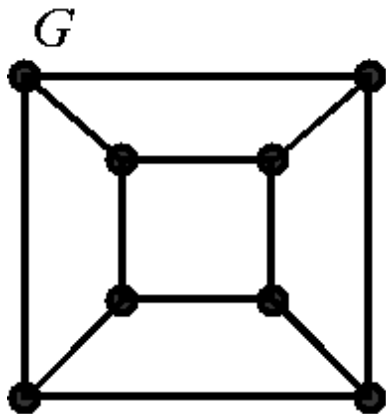
- Denomina-se **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ a um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' = V$ e E' é complementar a E .



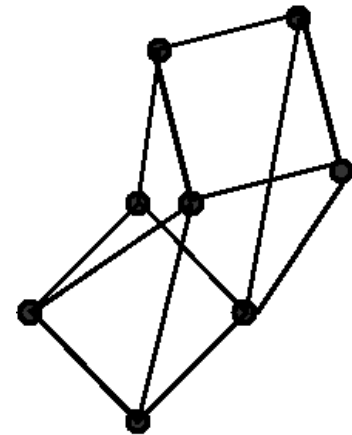
Complemento de G

Isomorfismo

- Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são **isomorfos entre si** se existe correspondência entre os seus vértices e arestas de forma a preservar a relação de incidência, ou seja, $|V| = |V'|$, $|E| = |E'|$ e existe uma função unívoca $f: V \rightarrow V'$, tal que $e=(x,y) \in E$ se e somente se $e'=(f(x),f(y)) \in E'$.



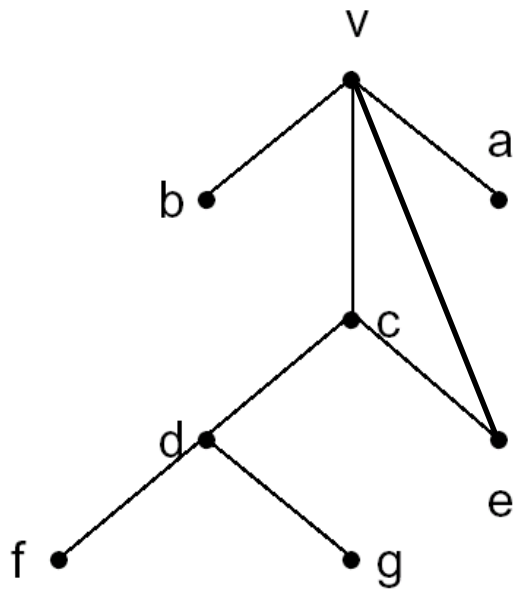
É isomorfo a G



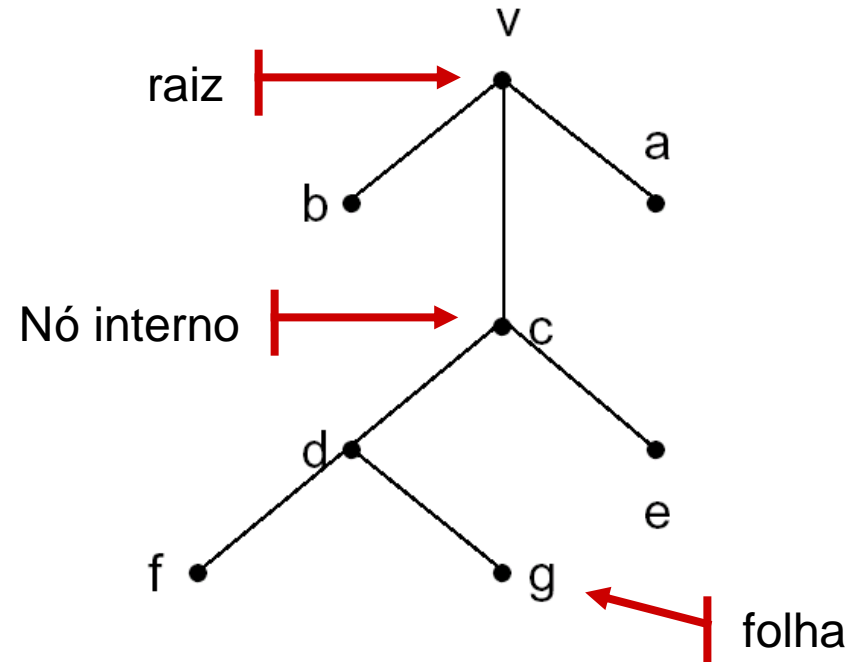
NÃO É isomorfo a G

Árvore

- Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico.



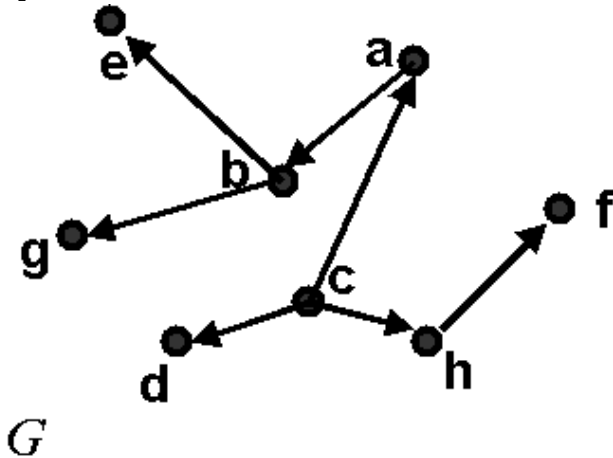
Não é uma árvore



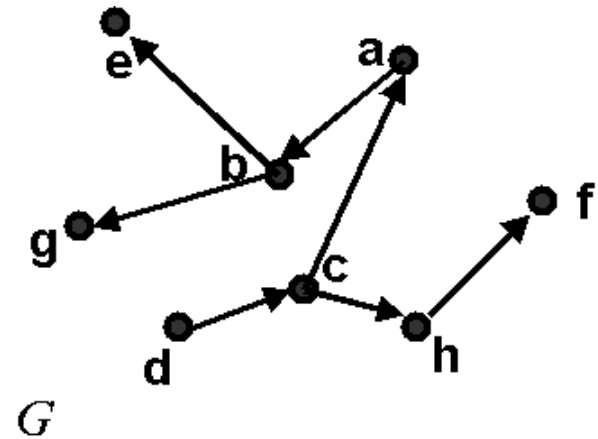
É uma árvore

Árvore Enraizada

- Uma **árvore enraizada** é uma árvore orientada em que há um vértice (**raiz**) do qual todas as arestas se afastam.



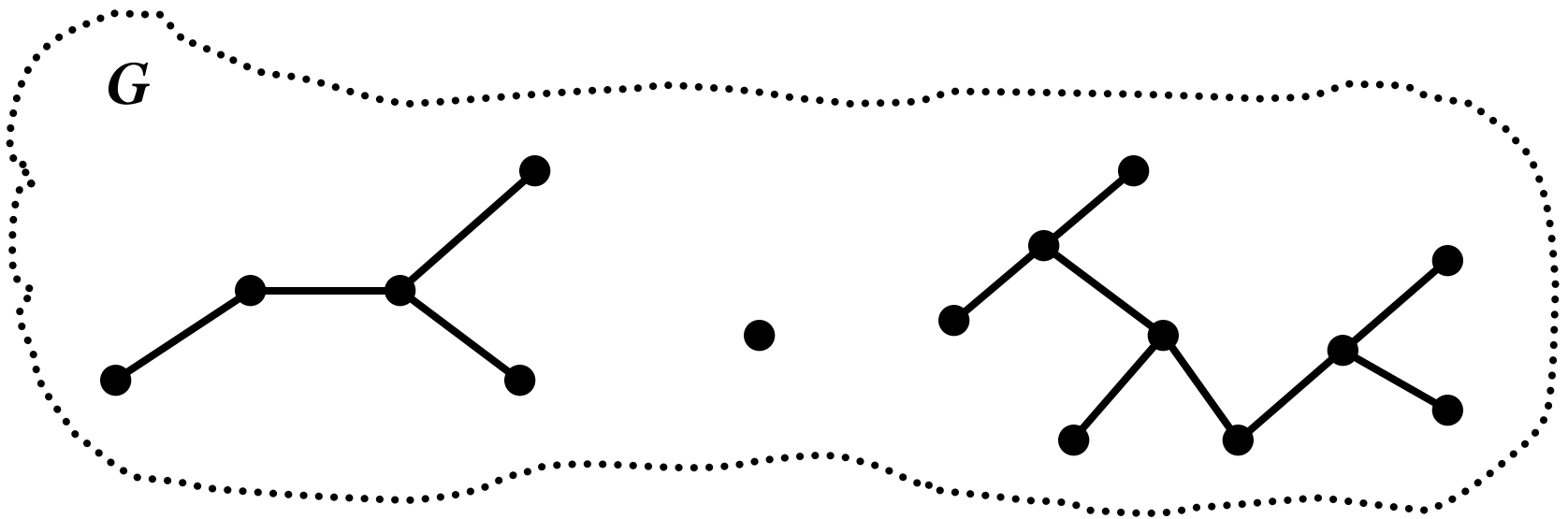
É árvore enraizada
(raiz c)



É árvore enraizada
(raiz d)

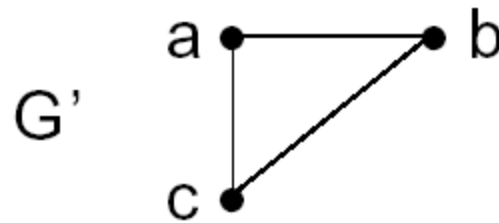
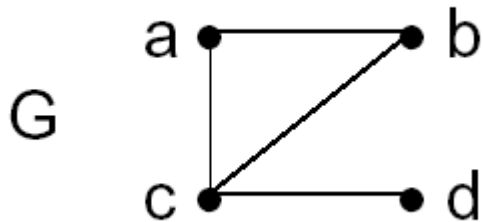
Floresta

- Uma **Floresta** é um conjunto de árvores.



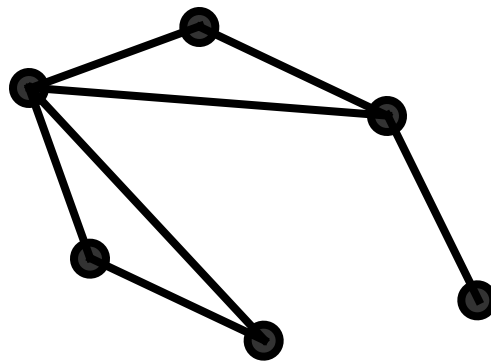
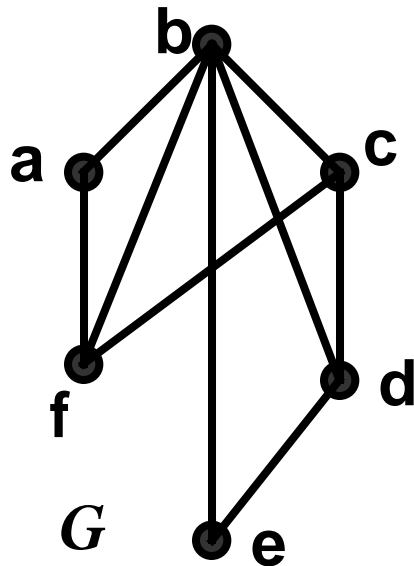
Subgrafo

- Um **subgrafo** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

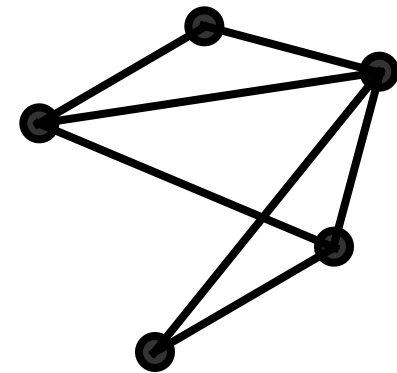


Subgrafo Gerador

- Um **subgrafo gerador** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' = V$ e $E' \subseteq E$.



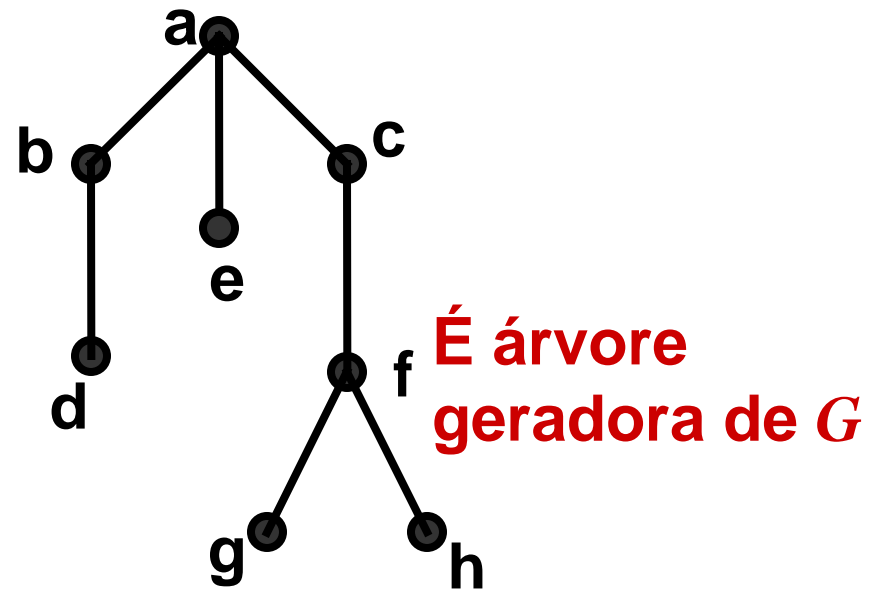
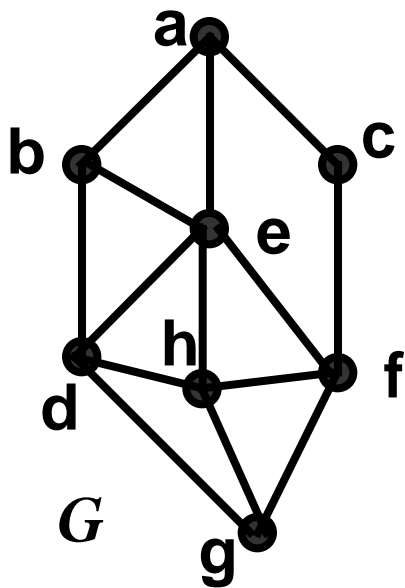
É subgrafo gerador de G



NÃO é subgrafo gerador de G

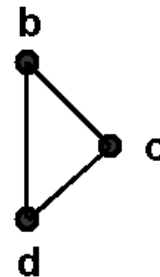
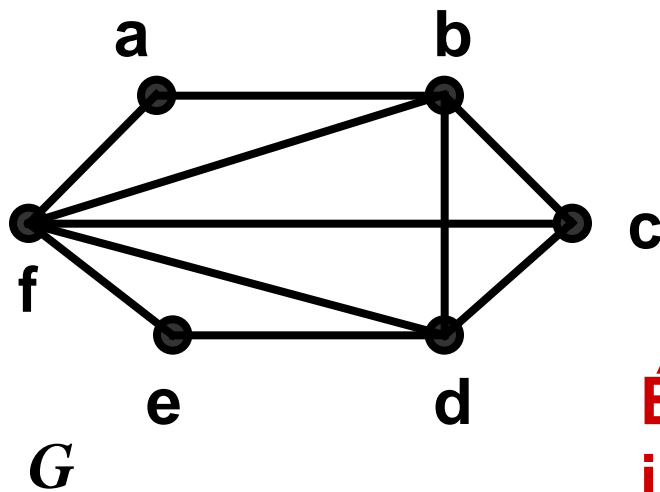
Árvore Geradora

- Uma **árvore geradora** $G' = (V', E')$ de um grafo é um subgrafo gerador que é uma árvore.

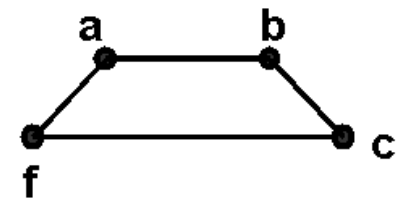


Subgrafo Induzido

- Um **subgrafo induzido** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e E' contém todas as arestas em E que tem as duas extremidades em V' .

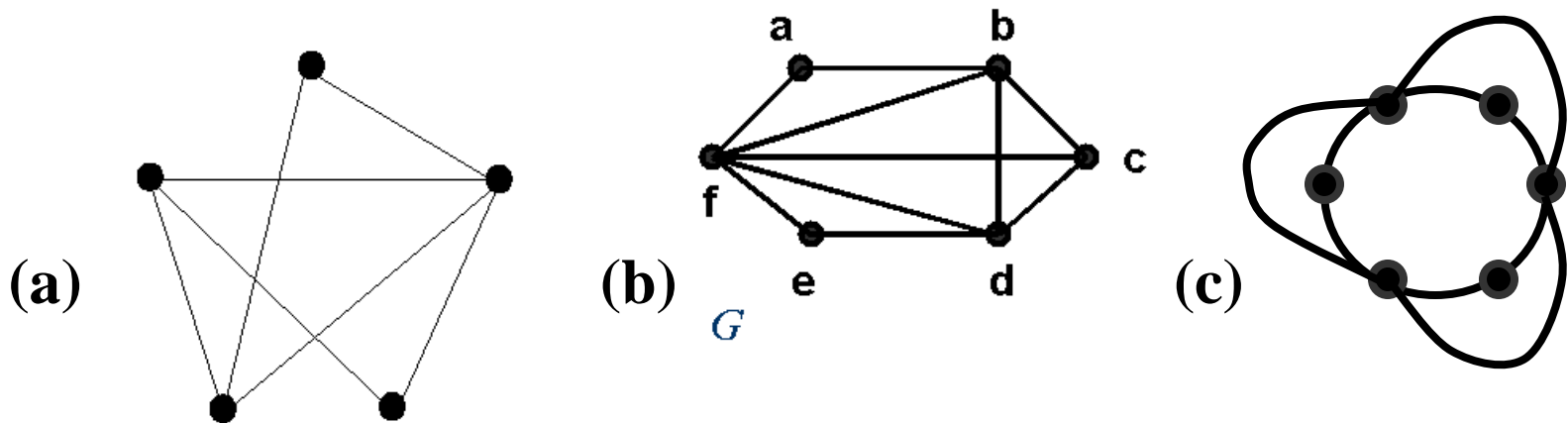


É subgrafo induzido de G



NÃO é subgrafo induzido de G

Exercícios de Fixação



- Quais os complementos dos grafos (a) e (c)?
- Os grafos (b) e (c) são isomorfos?
- Represente graficamente um grafo $K_{4,3}$.

Por fim

- No final das aulas referentes ao material deste arquivo, espera-se que você tenha aprendido todos os conceitos introdutórios sobre Grafos.
- Para ajudar no aprendizado procure realizar algumas coisas, como:
 1. Defina formalmente e intuitivamente (através das duas próprias palavras) os tópicos ensinados na aula apresentados no slide “Divisão do Arquivo”.
 2. Resolva todos os exercícios propostos, e os sugeridos em sala de aula .
 3. Revise os conceitos após a implementação.

Bons estudos!

SCC0216 - Modelagem Computacional em Grafos

Introdução a Grafos

FIM

Baseado no Material de aula
da Prof^a. Josiane M. Bueno