

Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Otimização discreta

Modelagem com variáveis binárias

Utilização de variáveis binárias

Decisão sobre uma atitude (fazer ou não fazer, comprar ou não comprar...).

$$x = \begin{cases} 1 & \text{se o evento ocorre} \\ 0 & \text{se o evento não ocorre} \end{cases}$$

Caso 1: implicações se-então

■ A) Custo fixo:

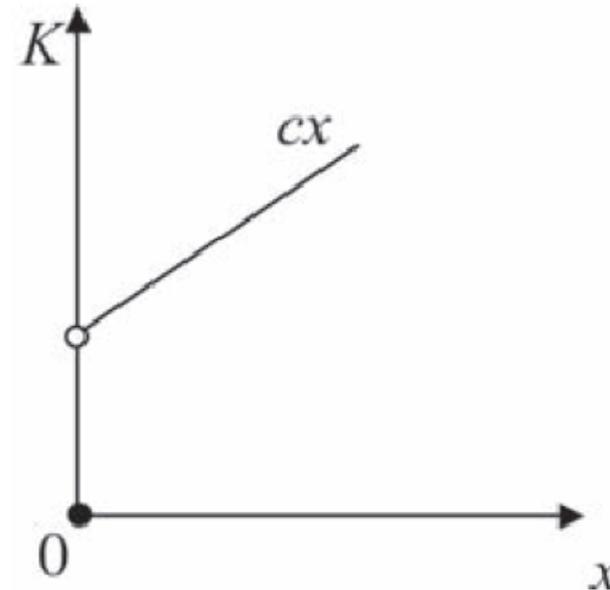
- A produção de um item (o envio de uma mercadoria, a decisão de se tomar um taxi, etc) implica em um custo fixo, por exemplo, de preparação da máquina (de pagamento do custo mínimo de envio, da taxa inicial do taxi, etc).

Antigamente tínhamos:

x = quantidade produzida do item

■ Custo de produção:

$$K(x) = \begin{cases} s + cx & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Como modelar de maneira linear ?

Dica: precisamos do auxílio de uma variável binária.

- Seja uma variável binária y , tal que y vale 1 se $x > 0$ e y vale 0 caso contrário.

$$K = sy + cx$$

Como associar x e y ?

$$x \leq My$$

M é um valor suficientemente grande
(produção máxima x)

Caso 1: implicações se-então

■ B) Produção de itens:

- Considere o caso em que, se o produto 1 é fabricado, o produto 2 também deve ser.

x_1 = quantidade produzida do item 1

x_2 = quantidade produzida do item 2

Seja y uma variável binária tal que

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad x_1 \leq My$$

logo, podemos forçar:

$$x_2 \geq my$$

m é um limitante inferior da quantidade a ser produzida do item 2.

Exemplo 3.5 Suponha que quatro itens podem ser produzidos em uma máquina denotada por k , e se o item 1 é produzido em k , então os outros itens, 2, 3 e 4, não podem ser processados em k e são processados em outras máquinas.

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o item } i \text{ é processado na máquina } k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$x_{2k} + x_{3k} + x_{4k} \leq 3y$ y é uma variável que indica se 2,3 ou 4 foram produzidos

$$x_{1k} \leq 3(1 - y)$$

Outra forma ?

Caso 2: restrições disjuntivas

- Às vezes, deseja-se aplicar apenas uma de um conjunto de restrições:

ex: quero um carro que faça 20km/litro

OU

que atinja 100km/h em 10s.

- De maneira geral:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

OU

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

Defina uma variável binária y tal que:

Se $y=1$, $f() \leq 0$ está ativada

Se $y=0$, $g() \leq 0$ está ativada

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1 - y)$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$$

Caso 3: Relações lógicas

- Variáveis binárias podem ser usadas para representar relações lógicas.

Suponha que existam cinco tipos de investimento financeiro, e seja x_j a variável binária de decisão tal que

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se o investimento } j \text{ é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- No máximo três investimentos são selecionados.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- O investimento 1 ou o investimento 2 é selecionado.

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

- Se o investimento 2 é selecionado, então o investimento 1 também é selecionado.

$$x_2 \leq x_1$$

- Se os investimentos 2, 3 ou 4 são selecionados, então o investimento 1 é selecionado.

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3x_1$$

ou

$$x_2 \leq x_1$$

$$x_3 \leq x_1$$

$$x_4 \leq x_1$$

O que é melhor ?

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3x_1$$

ou

$$x_2 \leq x_1$$

$$x_3 \leq x_1$$

$$x_4 \leq x_1$$

Caso 4: Representação de valores discretos

Considere um problema em que uma variável x só pode assumir valores do conjunto discreto $\{4, 6, 8, 12, 20, 24\}$. Para representar essa condição, defina as variáveis binárias $y_i, i = 1, \dots, 6$ e as restrições

$$\begin{aligned}x &= 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 12y_4 + 20y_5 + 24y_6 \\y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 &= 1\end{aligned}$$

Exercício

- Considere o problema de localização de armazéns cujo objetivo é escolher os armazéns que devem ser instalados para servir um conjunto de clientes. Neste modelo existem uma capacidade associada a cada local possível e uma procura associada a cada cliente. A procura dos clientes associados a um certo armazém não pode exceder a sua capacidade. O objetivo do problema é ainda satisfazer os pedidos a um custo global mínimo, que envolve os custos mensais da renda dos armazéns e os custos de transporte da mercadoria entre os armazéns e os clientes. Considere 4 possíveis armazéns (A,B,C e D) com capacidades de 35, 28, 22 e 28 respectivamente e com as rendas mensais indicadas na tabela. Existe um conjunto de 5 clientes (a,b,c,d, e e) que representam as procuras de 14, 12, 10, 12 e 8, respectivamente. Os custos de transporte unitários entre cada possível armazém e cada cliente são indicados na tabela.

Exemplo

	Rendas	Custos de Transporte					
		a	b	c	d	e	
A	50	2	5	1	2	5	35
B	32	4	4	9	1	4	28
C	28	1	8	5	6	2	22
D	36	7	1	2	1	8	28
		14	12	10	12	8	

- Formule um modelo de programação inteira que lhe permita determinar qual o conjunto ótimo de armazéns a selecionar. Considere as variáveis a_{ij} a quantidade a ser transportada do armazém i até o cliente j . As variáveis binárias x_i assumem o valor 1 se o armazém i é selecionado e 0, caso contrário. Para o problema é necessário respeitar as seguintes restrições:
- Dos locais C e D, exatamente 1 deve ser selecionado
- A seleção do local A ou do local B implica na exclusão do local C.
- A seleção do local A ou do local B implica a seleção do local D