

5ª Lista de Exercícios - SME0812 Modelos Lineares - 11/10/2012

Entregar exercícios 2, 4, 5 e 6 em 25/10/2012

Exercício 1. Seja $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ um modelo com X de posto incompleto e $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{m}'\boldsymbol{\beta}$ duas funções estimáveis.

- (a) Mostre que $\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}$ é invariante com a solução $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ de $X'X\boldsymbol{\beta} = X'\mathbf{Y}$.
- (b) Calcule $\text{Cov}(\mathbf{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}}^*, \mathbf{m}'\hat{\boldsymbol{\beta}}^*)$.

Exercício 2. Considere o modelo de análise de variância com dois fatores $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$, $i = 1, \dots, a$ e $j = 1, \dots, b$ com $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ variáveis aleatórias independentes. Prove que

- (a) μ não é estimável.
- (b) α_i não é estimável, $i = 1, \dots, a$.
- (c) $\alpha_i - \alpha_p$ é estimável se $i \neq p$ e $i, p = 1, \dots, a$.
- (d) $\beta_j - \beta_l$ é estimável se $i \neq l$ e $j, l = 1, \dots, b$.
- (e) $\mu + \alpha_i + \beta_j$ é estimável para $i = 1, \dots, a$ e $j = 1, \dots, b$.

Exercício 3. Prove que qualquer combinação linear das funções estimáveis $\mathbf{a}'_1\boldsymbol{\beta}, \dots, \mathbf{a}'_k\boldsymbol{\beta}$ também é uma função estimável.

Exercício 4. No modelo linear geral $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ com X de posto incompleto, prove que $\mathbf{q}'\boldsymbol{\beta}$ é estimável se e somente se $\mathbf{q}'H = \mathbf{q}'$ onde $H = GX'X$ e G é uma inversa generalizada de $X'X$.

Exercício 5. Adotando o modelo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, n$ com $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$ para os dados da tabela a seguir

Nível de escolaridade	Índice de investimento (Y)
Ensino fundamental	74, 68, 77, 60
Ensino médio	76, 80, 70
Ensino superior	85, 93, 90

- (a) Obtenha o sistema de equações normais e uma solução $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$ do mesmo
- (b) Escreva o modelo acima como um modelo de posto completo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 W_{1i} + \beta_2 W_{2i} + \epsilon_i$, onde

$$(W_1, W_2) = \begin{cases} (0, 0) & \text{para o ensino fundamental} \\ (1, 0) & \text{para o ensino médio} \\ (0, 1) & \text{para o ensino superior.} \end{cases}$$

Apresente a matriz de planejamento X

- (c) Para o modelo obtido no item (b), teste a hipótese de igualdade dos investimentos médios para os três grupos.

Exercício 6. No modelo $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$ e $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$:

- (a) Represente o modelo e seus elementos matricialmente.
- (b) Prove que $\tau_1 + \tau_2$ não é estimável.
- (c) Mostre que $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = (\bar{Y}, 0, \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)'$ é uma solução do sistema de equações normais.
- (d) Com base em (c), obtenha o estimador não viesado de variância uniformemente mínima de $\tau_1 - \tau_2$.

Exercício 7. No problema anterior, obtenha $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* X'\mathbf{Y}$ e verifique que coincide com $\hat{\boldsymbol{\beta}}^0 X'\mathbf{Y}$ onde $\hat{\boldsymbol{\beta}}^0 = (0, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2)'$ é outra solução do sistema de equações normais.

Exercício 8. Em um modelo com posto incompleto, mostre que todas as linhas de $X'X\boldsymbol{\beta}$ são estimáveis.