EST5802 INFERÊNCIA AVANÇADA

PROVA 1 (ESBOÇO DE SOLUÇÃO)

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta), \; 0 < \theta < 1.$

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n I_{\{0,1\}}(x_i).$$

Com $t = \sum_{i=1}^n x_i$, o lado direito é $\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t \cdot (1-\theta)^n \cdot I_{\{0,1,\ldots,n\}}(t)$.

Teorema da fatoração $\Rightarrow T = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

$\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow T \sim \text{binomial}(1/2, n)$.

$$E[u(T)] = \sum_{t=0}^n (-1)^t \cdot \binom{n}{t} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\frac{1}{2}\right)^{n-t} = \frac{1}{2^n} \sum_{t=0}^n (-1)^t \binom{n}{t}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (-1)^t \cdot 1^{n-t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{resultado 2}}}{=} (-1+1)^n = 0.$$

$E[u(T)] = 0$ para $\theta = 1/2$ e $u(T) \neq 0$. Não se pode concluir que T não é completa, pois $E[u(T)] = 0$ deve ocorrer para todo $\theta \in \Omega = (0,1)$.

2. $\mu < x < \mu + \sigma \iff 0 < \frac{x-\mu}{\sigma} < 1.$

$$(x-\mu) \cdot (\mu + \sigma - x) = -(x-\mu)^2 + \sigma(x-\mu).$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-\mu)(\mu+\sigma-x)} = \sigma \cdot \sqrt{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + \frac{x-\mu}{\sigma}}.$$

Tomando $f_0(u) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{-u^2+u}} \times I_{(0,1)}(u)$,

temos $f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} \cdot f_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow$ a distribuição é da família localização e escala.

$$\Rightarrow \frac{X_{(j)} - X_{(k)}}{X_{(j)} - X_{(i)}} \text{ é uma estatística ancilar, } i \neq j \neq k.$$