

SMA 0333 Cálculo III - Lista 1

Eng. Aeronáutica

1. Verifique se a sequência numérica $\{a_n\}$ é limitada em cada um dos casos abaixo:

(a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2n}(n+1)$

(b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(c) $a_n = n + \frac{1}{n}$

2. Mostre, usando a definição e aplicando as propriedades, que:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

3. Verdadeiro ou Falso. Quando falso dê um contra-exemplo e se verdadeiro prove.

(a) Toda sequência monótona é convergente;

(b) Toda sequência convergente é limitada;

(c) Toda sequência limitada é monótona;

(d) Toda sequência monótona e limitada converge;

(e) A sequência $a_n = 1 + (-1)^n$ é não monótona e limitada;

(f) A sequência $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ é monótona e convergente;

(g) Toda sequência convergente é necessariamente monótona;

(h) A soma de duas sequências divergentes pode ser convergente;

(i) Toda sequência decrescente e limitada converge para zero.

4. Mostre que a sequência $\{a_n\}$, onde $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2}) + \cos(n\pi)$ é limitada e não convergente:

5. Dê exemplos de sequências $\{a_n\}$ infinitésimas e sequências $\{b_n\}$ tais que a sequência $\{a_nb_n\}$ não seja infinitésima.

Que condições a sequência $\{b_n\}$ deve satisfazer para que a sequência $\{a_nb_n\}$ seja convergente?

6. Em cada um dos itens abaixo diga se a sequência $\{a_n\}$ é monótona e se é limitada:

- (a) $a_n = \frac{2}{n}$;
- (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
- (c) $a_n = \frac{n}{2^n}$;
- (d) $a_n = \frac{n+1}{n}$;
- (e) $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

7. Verifique se a sequência $\{a_n\}$ converge em cada um dos casos abaixo. Nos casos afirmativos encontre seu limite.

- (a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
- (b) $a_n = \sqrt{n}$;
- (c) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$;
- (d) $a_n = \cos(n\pi)$;
- (e) $a_n = \sin(n\pi)$;
- (f) $a_n = \frac{(n)^2}{n+1}$;
- (g) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2}$;
- (h) $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$

8. É possível construir duas sequências, $\{a_n\}$ convergente em \mathbb{R} e $\{b_n\}$ divergente em \mathbb{R} tal que a sequência $\{a_n + b_n\}$ seja convergente em \mathbb{R} ?

9. Mostre que se a sequência $\{a_n\}$ é convergente para L , então a sequência $\{|a_n|\}$ é convergente para $|L|$.

Vale a recíproca? Se a resposta for afirmativa prove, caso contrário de um contra-exemplo.

10. Seja (a_n) uma sequência de números reais satisfazendo

$$|a_{n+1}| \leq K|a_n|, \quad \forall n \geq N,$$

onde K é uma constante, com $0 < K < 1$. Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

11. Seja (a_n) uma sequência de números reais não nulos tais que

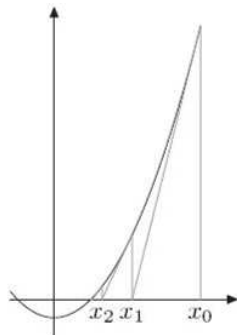
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

Mostre que se $|L| < 1$, então (a_n) é convergente e tem limite zero. (*Sugestão:* use o exercício anterior.)

Verifique que esse resultado é falso se $|L| = 1$, exibindo um contra-exemplo.

12. Considere a sequência $\{a_n\}$ onde $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$, $n = 2, 3, \dots$.
Mostre que $\{a_n\}$ é convergente e seu limite é 3.
13. (Método de Newton) A sequência a seguir é definida pela fórmula recursiva dada pelo método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



(Figura 1: Ilustração das três primeiras iterações do método de Newton)

Em cada item a seguir, responda se a sequência converge. Em caso afirmativo, qual é o valor do limite? Em cada caso, comece identificando a função f envolvida:

- (a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$.
- (b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$.
- (c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - 1$.