



3. Representação de variáveis quantitativas

2011



3.1 VARIÁVEIS DISCRETAS

Dados: n observações de uma variável discreta x .

Existem k diferentes valores $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, $1 \leq k \leq n$.

Tabela de frequências: tabela com os valores de x_j e uma das ou ambas as frequências f_j e f_j^* , $j = 1, \dots, k$.

Tabela 1. Descrição da tabela.

| x | Frequencia | Frequencia relativa |
|-------|------------|---------------------|
| x_1 | f_1 | f_1^* |
| x_2 | f_2 | f_2^* |
| ... | ... | ... |
| x_k | f_k | f_k^* |
| Total | n | 1 (100%) |

As frequências acumuladas F_j e F_j^* estão bem definidas, $j = 1, \dots, k$ e podem ser uma coluna de uma tabela de frequências.



Tabelas e gráficos em R

```
> x = c(2, 3, 3, 1, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 1, 3, 1, 3, 5, 0, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 3, 3, 0, 2, 2, 2, 2)
```

```
> barplot(freqa)
```

```
> (n = length(x))
```

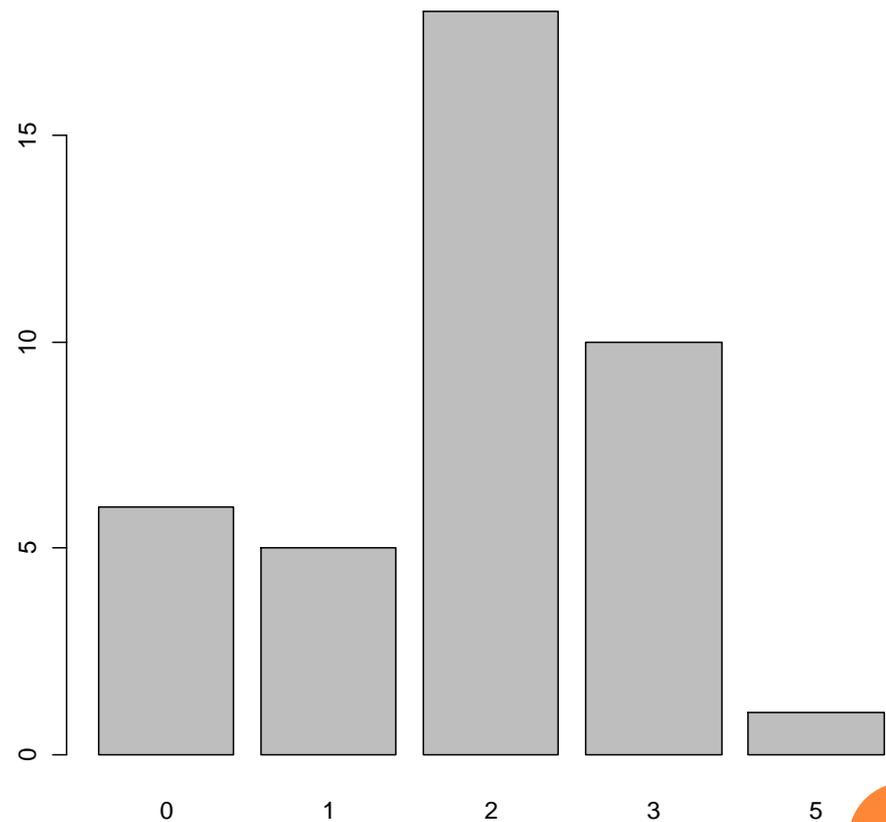
```
40
```

```
> (freqa = table(x))
```

```
0  1  2  3  5
6  5 18 10  1
```

```
> freqa / n * 100
```

```
0      1      2      3      5
15.0  12.5 45.0 25.0  2.5
```



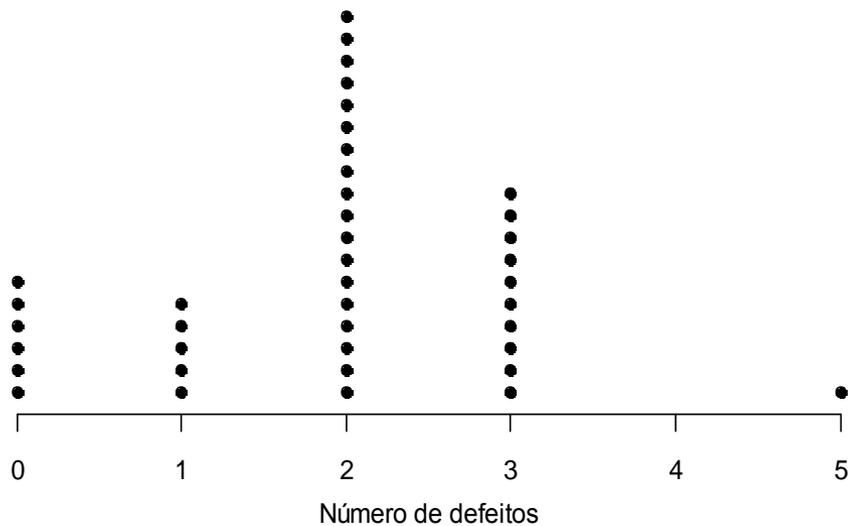
Tabelas e gráficos em R

Gráfico de pontos (*dot plot*)

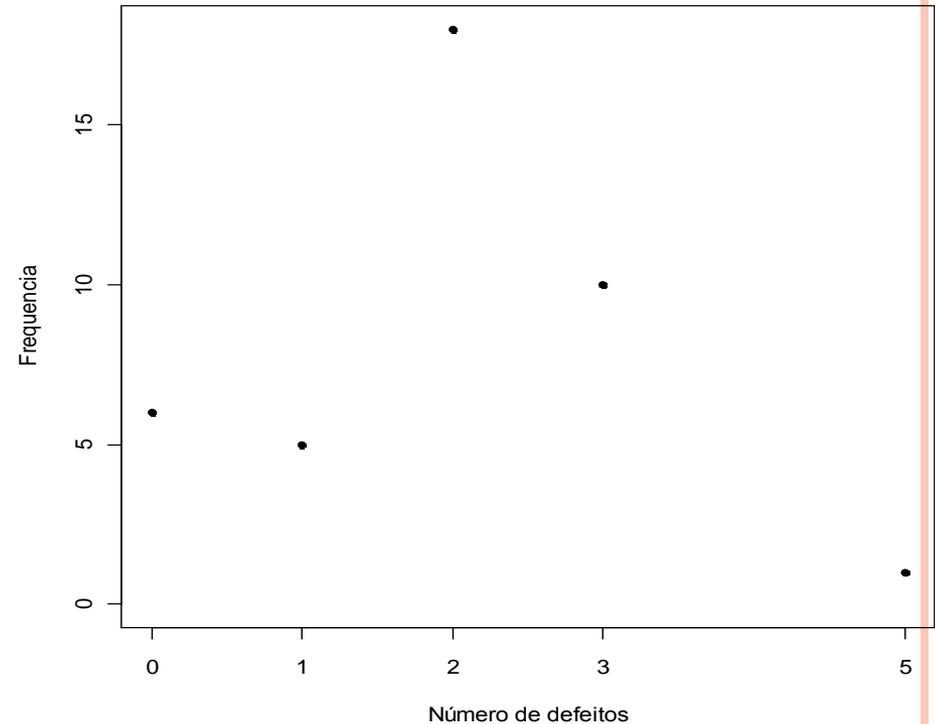
Cada observação é representada por um ponto. Valores repetidos produzem pontos empilhados.

```
> library(plotrix)
```

```
> dotplot.mtb(x, xlab = "Número de defeitos")
```

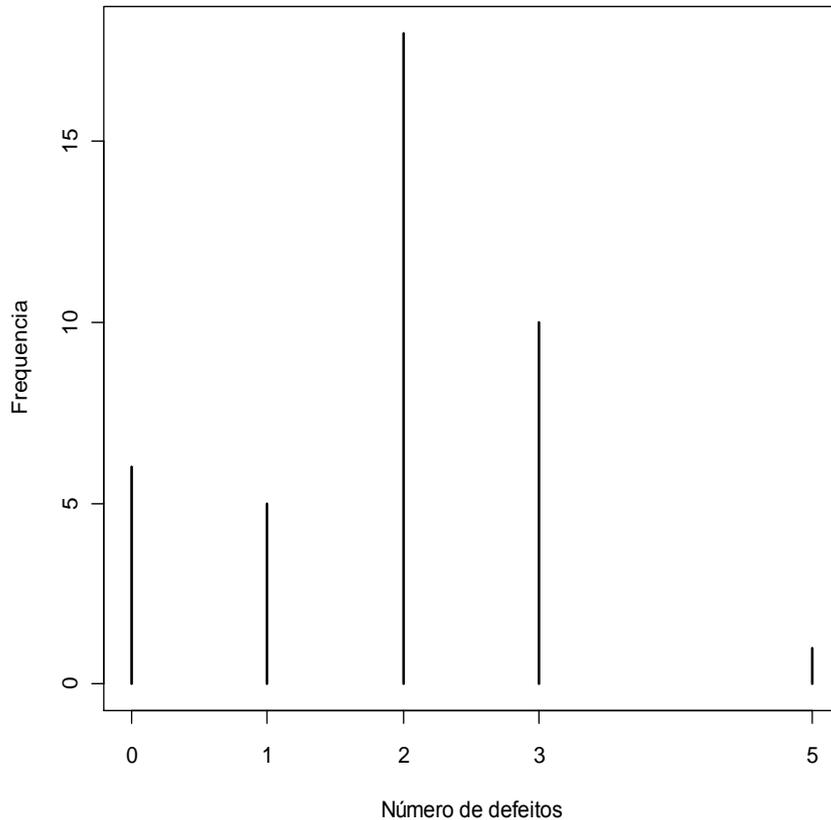


```
> plot(freqa, type = "p", pch = 20, xlab = "Número de defeitos", ylab = "Frequencia")
```



Tabelas e gráficos em R

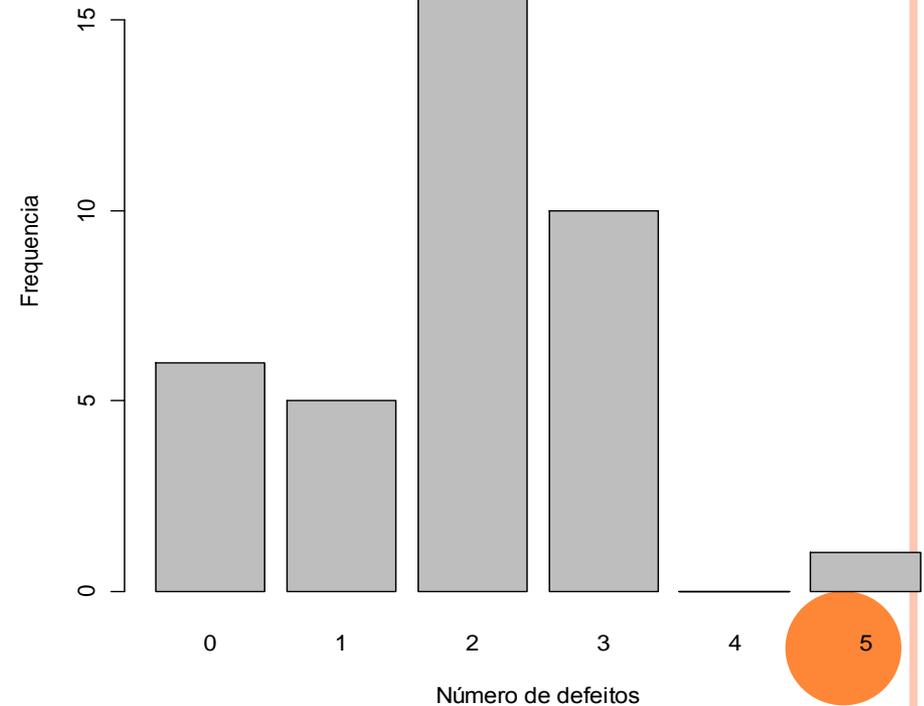
```
> plot(freqa, xlab = "Número de defeitos",  
ylab = "Frequencia")
```



```
> freqaux = table(c(x, 4))
```

```
> freqaux[which(names(freqaux) == "4")] = 0
```

```
> barplot(freqaux, xlab = "Número de defeitos",  
ylab = "Frequencia")
```



3.2 VARIÁVEIS CONTÍNUAS

Dados: n observações de uma variável contínua x .

Existem m diferentes valores $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, $1 \leq m \leq n$.

Tabela de frequências. Se m é “grande”, uma tabela com **todos** os diferentes valores não cumpre o papel de **resumir** os dados.

Representação em k **intervalos de classe** (ou **classes**) do tipo $[LI_j, LS_j)$, $j = 1, \dots, k$.

LI_j : limite **inferior** e LS_j : limite **superior**.

Construção. 1. Escolha do número de classes (k). Usualmente, $5 \leq k \leq 15$.

2. Cálculo da **amplitude** (A): $A = \text{MAX} - \text{min}$, sendo que min e MAX são o menor e o maior valor dos dados.

3. Cálculo da **amplitude de classe** (h): $h = A / k$.

4. Obtenção dos limites das classes: $LI_1 = \text{min}$, $LS_1 = LI_1 + h$, $LI_2 = LS_1$, $LS_2 = LI_2 + h$, ..., $LI_k = LS_{k-1}$, $LS_k = \text{MAX}$.



Obs. (1) h e LI_1 podem ser arredondados por **conveniência**.

(2) Cada valor de x pertence a uma e apenas uma classe.

(3) h pode variar com a classe.

Ponto médio da classe (ou marca de classe): $x_j^* = \frac{LI_j + LS_j}{2}$.

Frequência **absoluta** da classe (f_j): número de observações $\in [LI_j, LS_j)$.

Frequência **relativa** de cada intervalo de classe: $f_j^* = f_j / n$.

Frequência **acumulada** da classe (F_j):

$$F_j = f_1 + f_2 + \cdots + f_j = \sum_{l=1}^j f_l \quad (F_k = n).$$

Frequência **acumulada**
relativa da classe:

$$F_j^* = \frac{F_j}{n} \quad (F_k^* = 1).$$

Obs. Na representação por classes há **perda de informação**.

Densidade de frequência (ou densidade):

$$f_{d_j} = \frac{f_j}{h_j} \text{ ou } f_{d_j}^* = \frac{f_j^*}{h_j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Representação gráfica:

Histograma (*histogram* – Karl Pearson, 1895)

Gráfico de **barras adjacentes** com **bases** iguais às **amplitudes** das classes e **alturas** iguais às **densidades**.

Obs. Se as classes tiverem **amplitude constante**, as alturas das barras usualmente são iguais às frequências.

Propriedade :

$$\sum_{j=1}^k h_j f_{d_j} = \sum_{i=1}^k h_j \frac{f_j}{h_j} = \sum_{j=1}^k f_j = n \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^k h_j f_{d_j}^* = \sum_{j=1}^k h_j \frac{f_j^*}{h_j} = \sum_{j=1}^k f_j^* = 1.$$

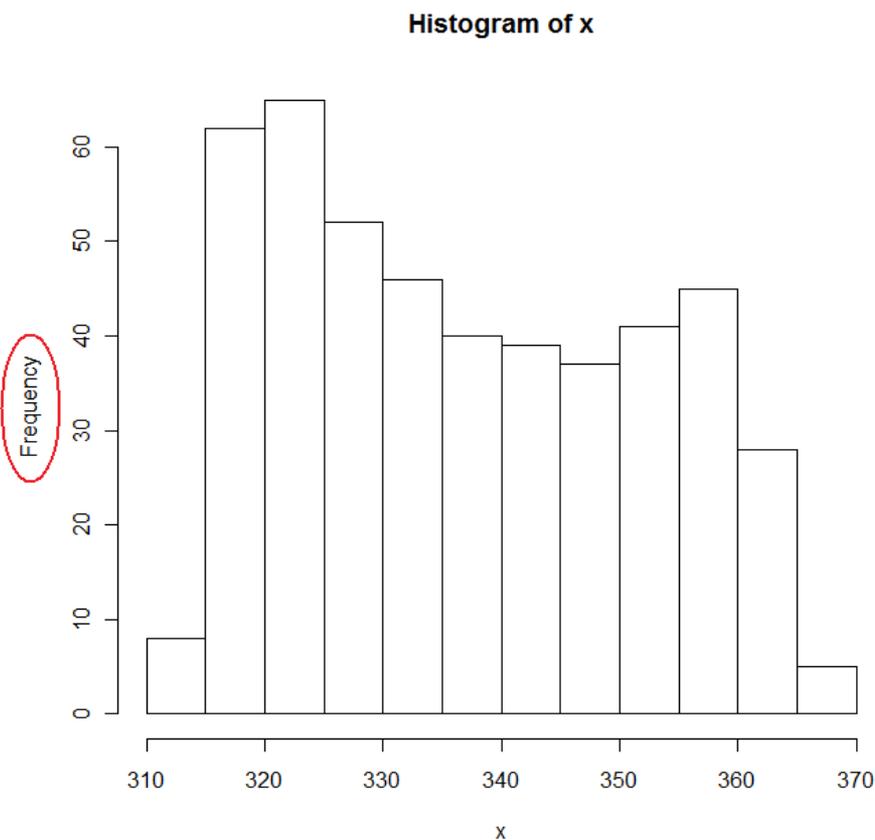
Obs. Na construção de um histograma, quanto **maior** for **n**, **melhor**.

Histograma em R

```
> ? co2
```

```
> x = as.vector(co2)
```

```
> hist(x)
```



Fornecer uma ideia sobre a distribuição.

```
> hx = hist(x, right = FALSE, plot = FALSE)
```

```
> names(hx)
```

```
[1] "breaks" "counts"  
"intensities" "density"  
"mids" "xname"  
"equidist"
```

```
> hx$breaks
```

```
[1] 310 315 320 325 330 335  
340 345 350 355 360 365 370
```

```
> hx$counts
```

```
[1] 8 62 65 52 46 40 39 37 41  
45 28 5
```

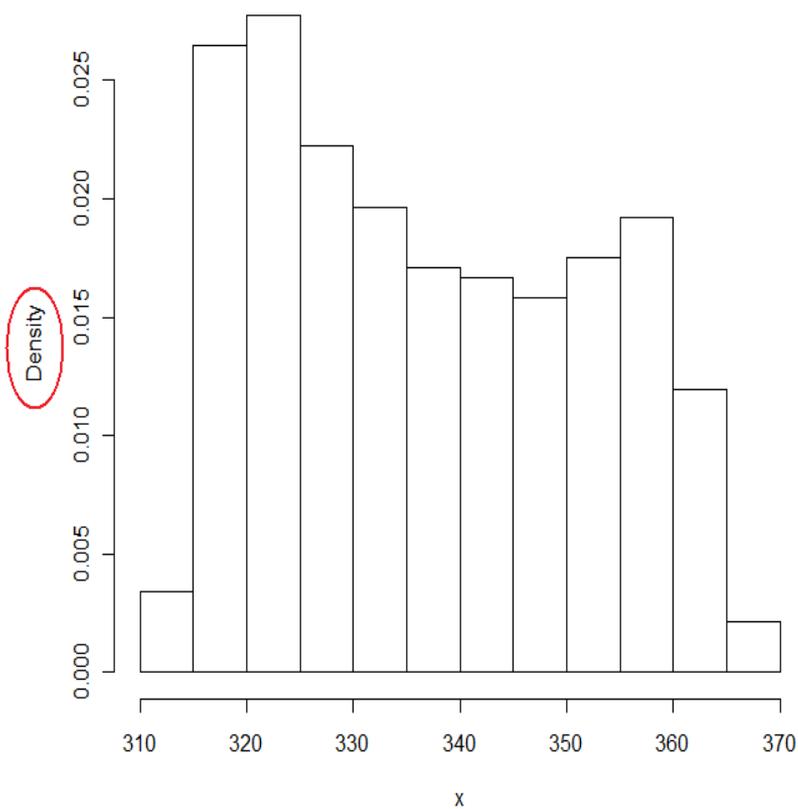
```
> hx$mids
```

```
[1] 312.5 317.5 322.5 327.5  
332.5 337.5 342.5 347.5 352.5  
357.5 362.5 367.5
```

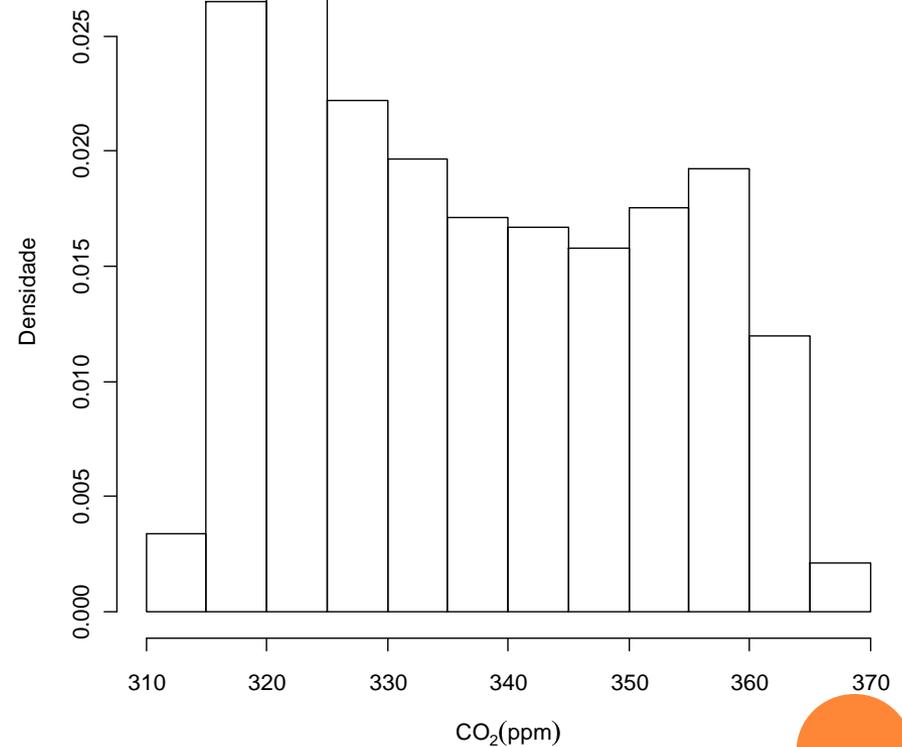
Histograma em R

```
> hist(x, right = FALSE, freq = FALSE)
```

Histogram of x



```
> hist(x, right = FALSE, freq = FALSE,  
main = "", xlab = expression(CO[2]  
(ppm)), ylab = "Densidade")
```



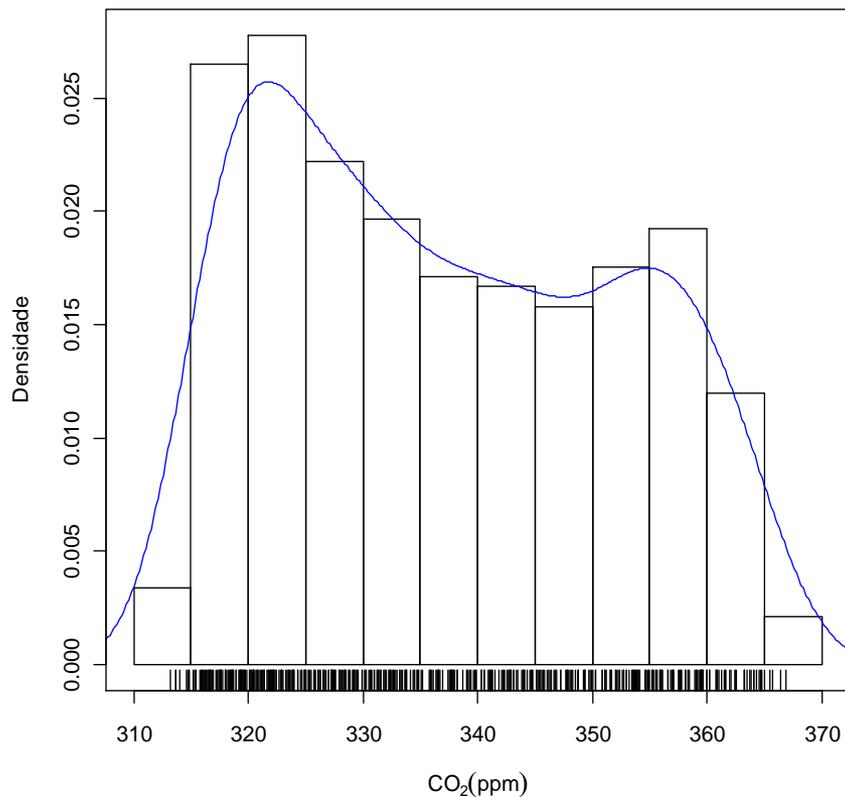
Histograma em R

```
> hist(x, right = FALSE, freq = FALSE, main = "", xlab = expression(CO[2] (ppm)), ylab = "Densidade")
```

```
> rug(x)
```

```
> lines(density(x), col = "blue")
```

```
> box()
```



Número de classes: **fórmula de Sturges** se *breaks* não for especificado.

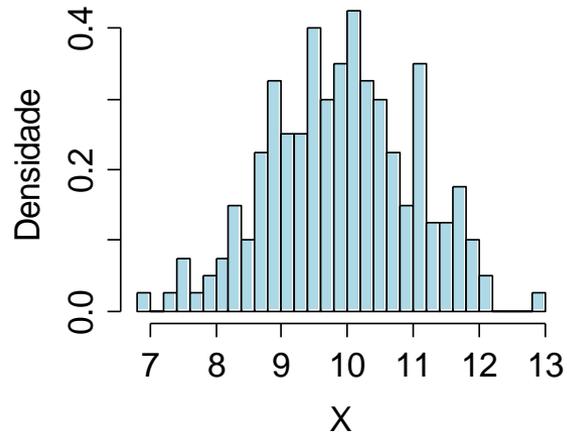
Outras opções:

1. Fórmula de Scott: *breaks* = "Scott".
2. Fórmula de Freedman-Diaconis: *breaks* = "FD".
3. *breaks* = *número*: nem sempre funciona.
4. *breaks* = *vetor ordenado* com $k + 1$ elementos com os limites das classes.

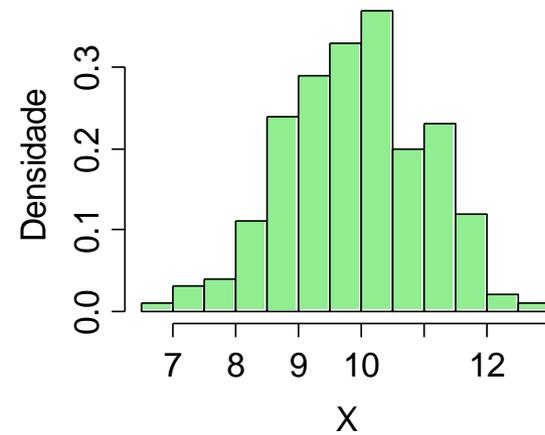


Escolha do número de classes (k)

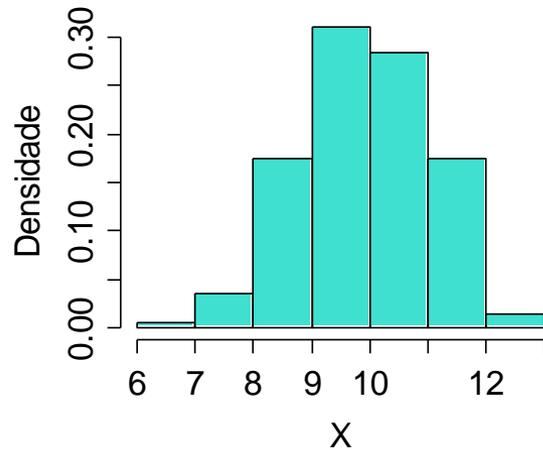
k=31



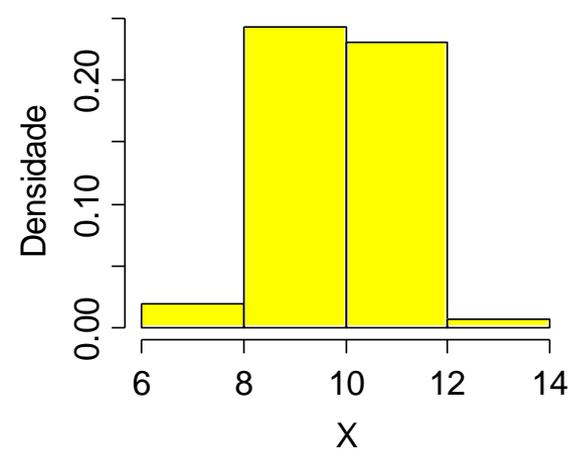
k=13



k=7



k=4



Histograma humano

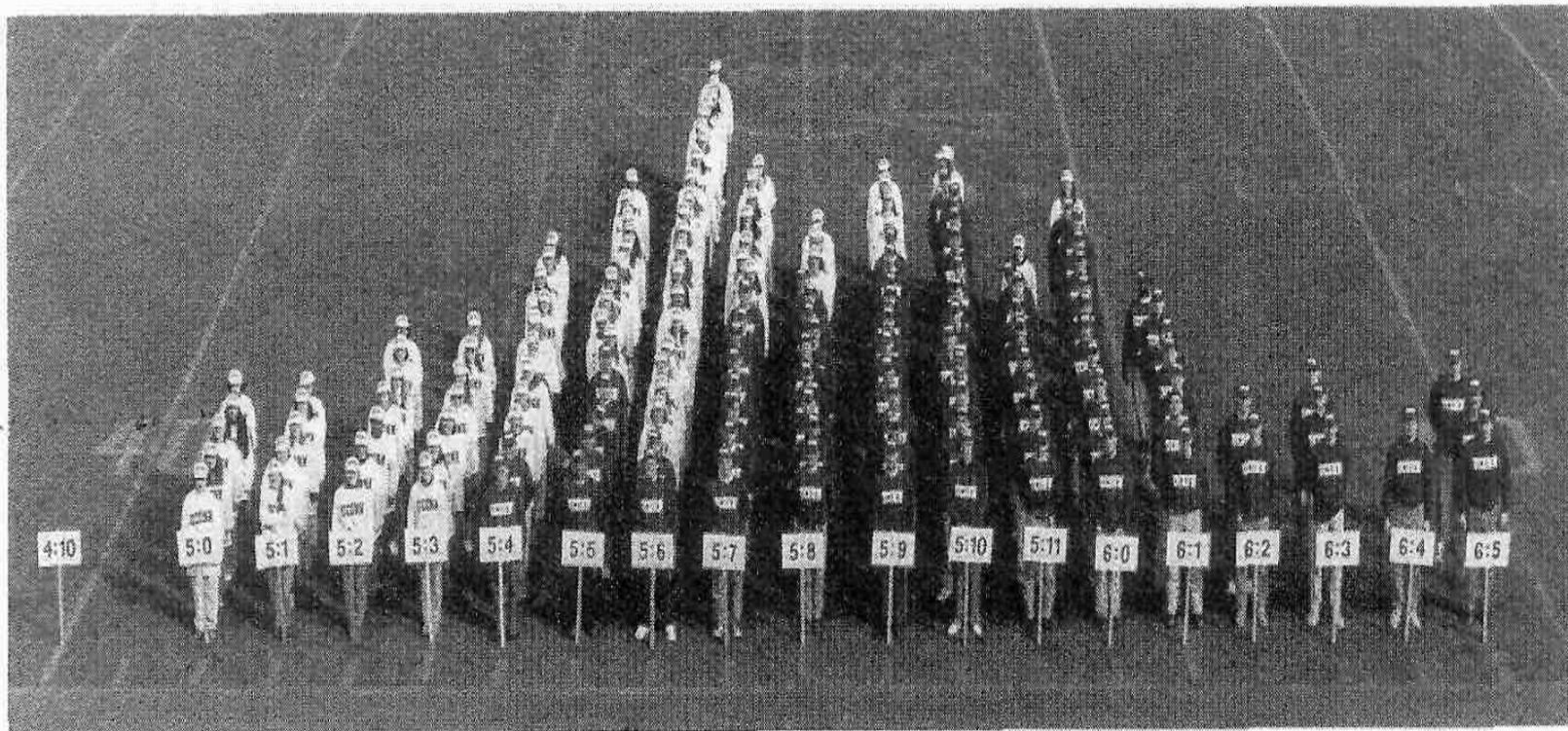


Figure 7. Living histogram of 143 student heights at University of Connecticut.

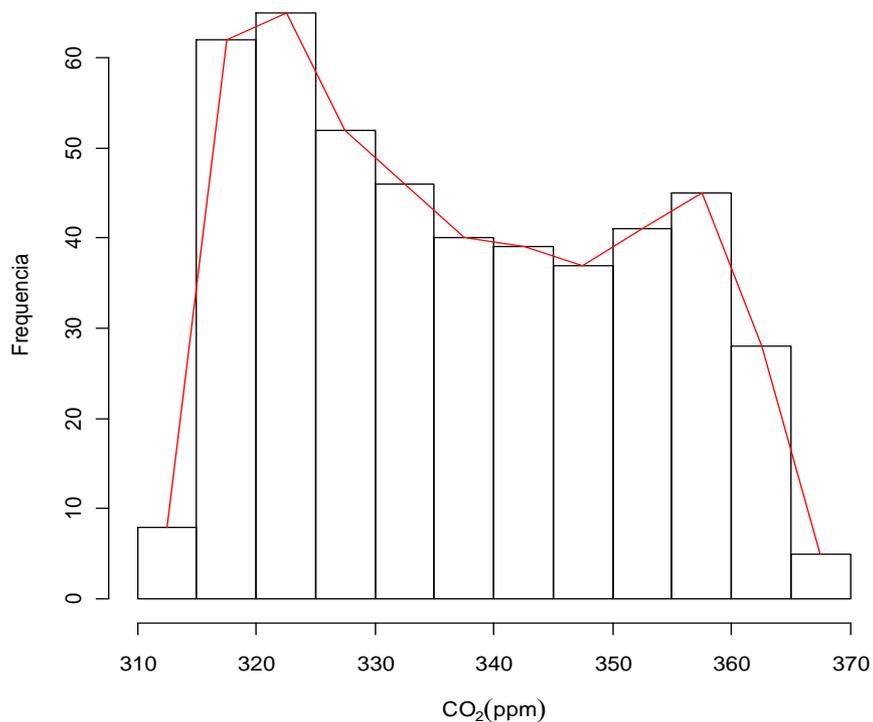
The American Statistician 56(3), 223 – 229, 2002.

Polígono de frequências

Formado pelos **segmentos** unindo os **pontos centrais** dos topos das barras.

```
> hist(x, right = FALSE, main = "", xlab =  
expression(CO[2] (ppm)), ylab =  
"Frequencia")
```

```
> lines(hx$mid, hx$counts, col = "red")
```

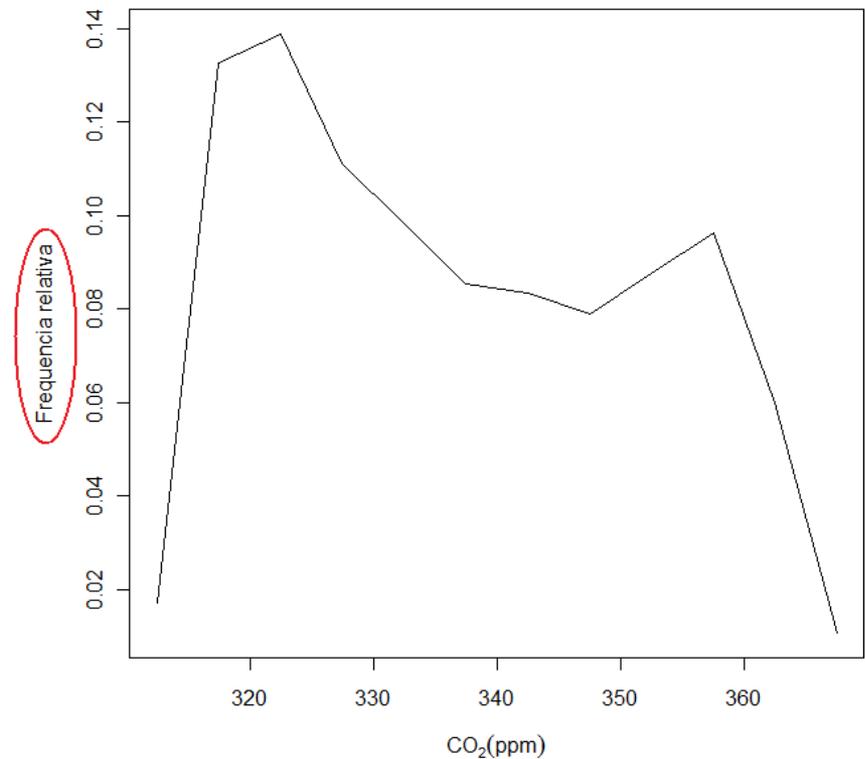


```
> (n = length(x))
```

```
> frel = hx$counts / n
```

```
> plot(hx$mid, frel, type = "l", xlab =  
expression(CO[2] (ppm)), ylab = "Frequencia  
relativa")
```

```
[1] 468
```

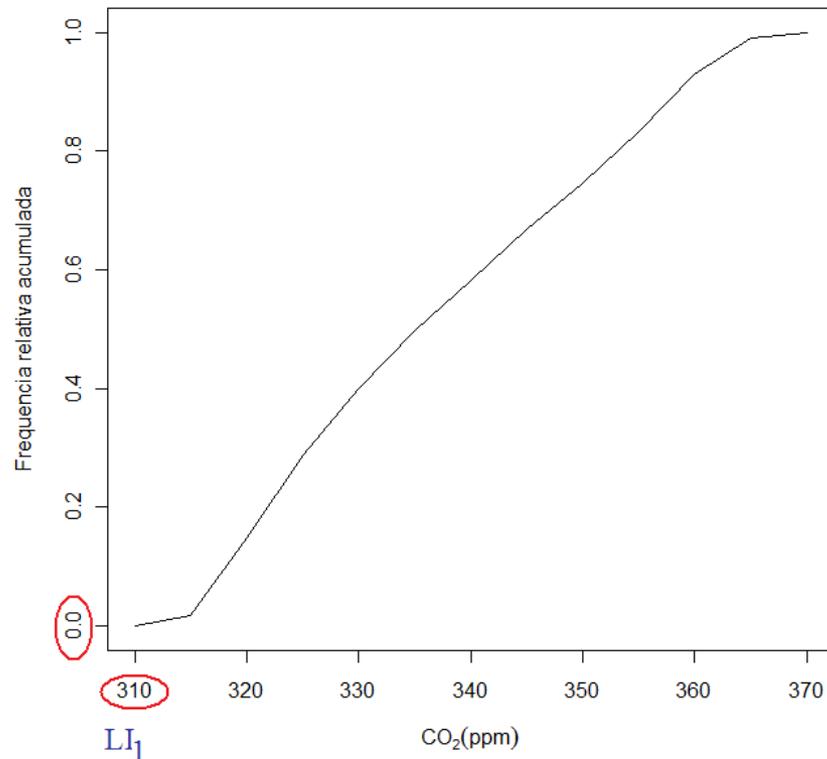


Polígono de frequências acumuladas (ogiva)

Formado por segmentos de retas unindo o limite superior das classes no topo das barras.

```
> Frel = cumsum(frel)
```

```
> plot(hx$breaks, c(0, Frel), type = "l", xlab =  
expression(CO[2] (ppm)), ylab =  
"Frequencia relativa acumulada")
```



```
> posb = barplot(Frel, col = "white", space= 0,  
xlab = expression(CO[2] (ppm)), ylab =  
"Frequencia relativa acumulada")
```

```
> lines(posb + posb[1], Frel, col = "red")
```

```
> segments(0, 0, (posb[1] + posb[2]) / 2,  
Frel[1], col = "red")
```

```
> axis(1, c(0, posb + posb[1]), hx$breaks)
```

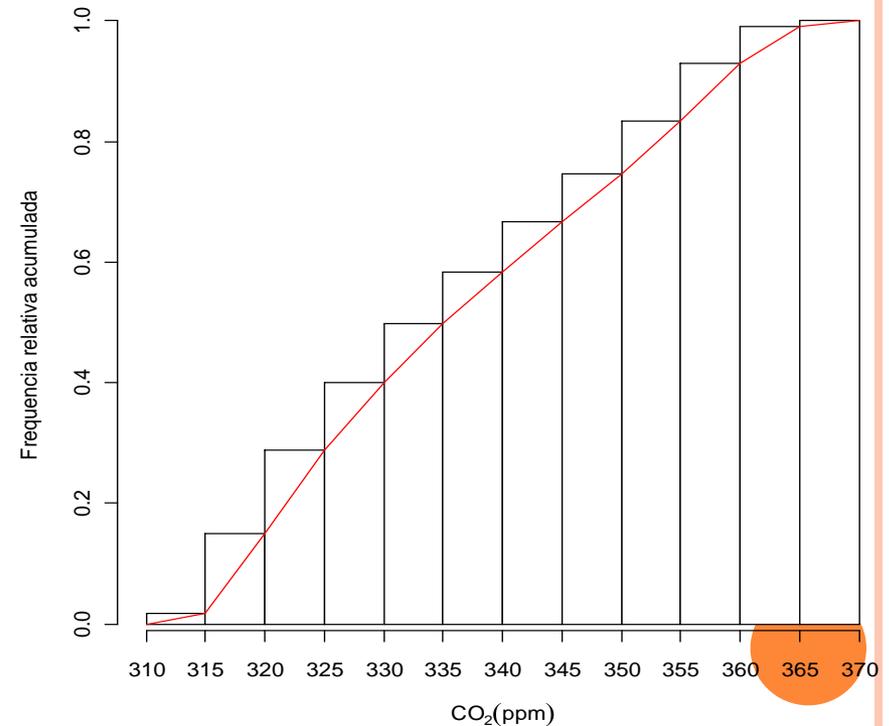


Gráfico de pontos

Cada observação é representada por um ponto.

Não há perda de informação.

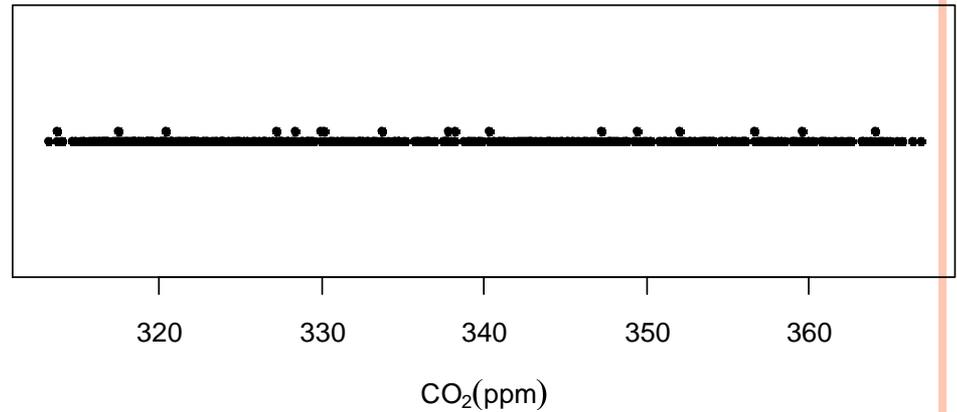
Se n for grande, o gráfico pode perder em **clareza**.

```
> par(mfrow = c(2, 1))
```

```
> stripchart(x, pch = 20, method =  
"stack", xlab = expression(CO[2]  
(ppm)), main = "Sem  
arredondamento")
```

```
> stripchart(round(x, 1), pch = 20,  
method = "stack", xlab =  
expression(CO[2] (ppm)), main =  
"Com arredondamento")
```

Sem arredondamento



Com arredondamento

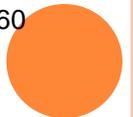
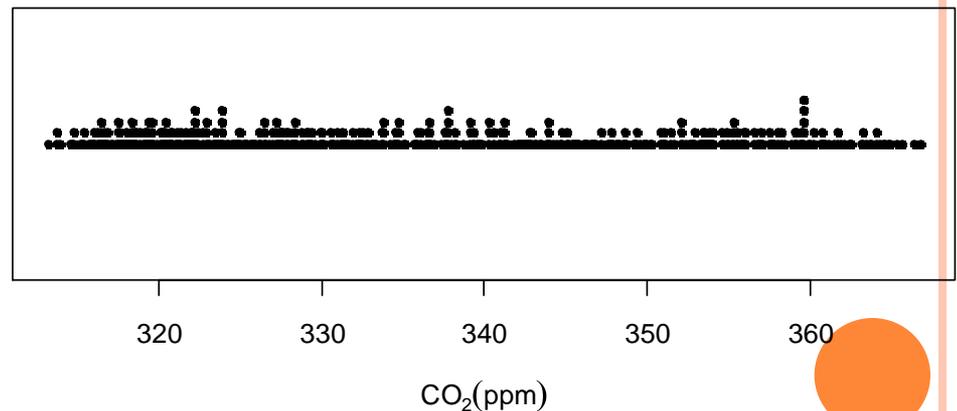


Gráfico de linhas

Utilizado para representar variáveis coletadas com referência a uma unidade de tempo. Chamadas de **séries históricas** ou **séries temporais** (*time series*).

Obs. Séries temporais podem ser de variáveis discretas ou qualitativas.

```
> ? AirPassengers
```

```
Monthly Airline Passenger  
Numbers 1949-1960
```

```
> class(AirPassengers)
```

```
[1] "ts"
```

```
> plot(AirPassengers)
```

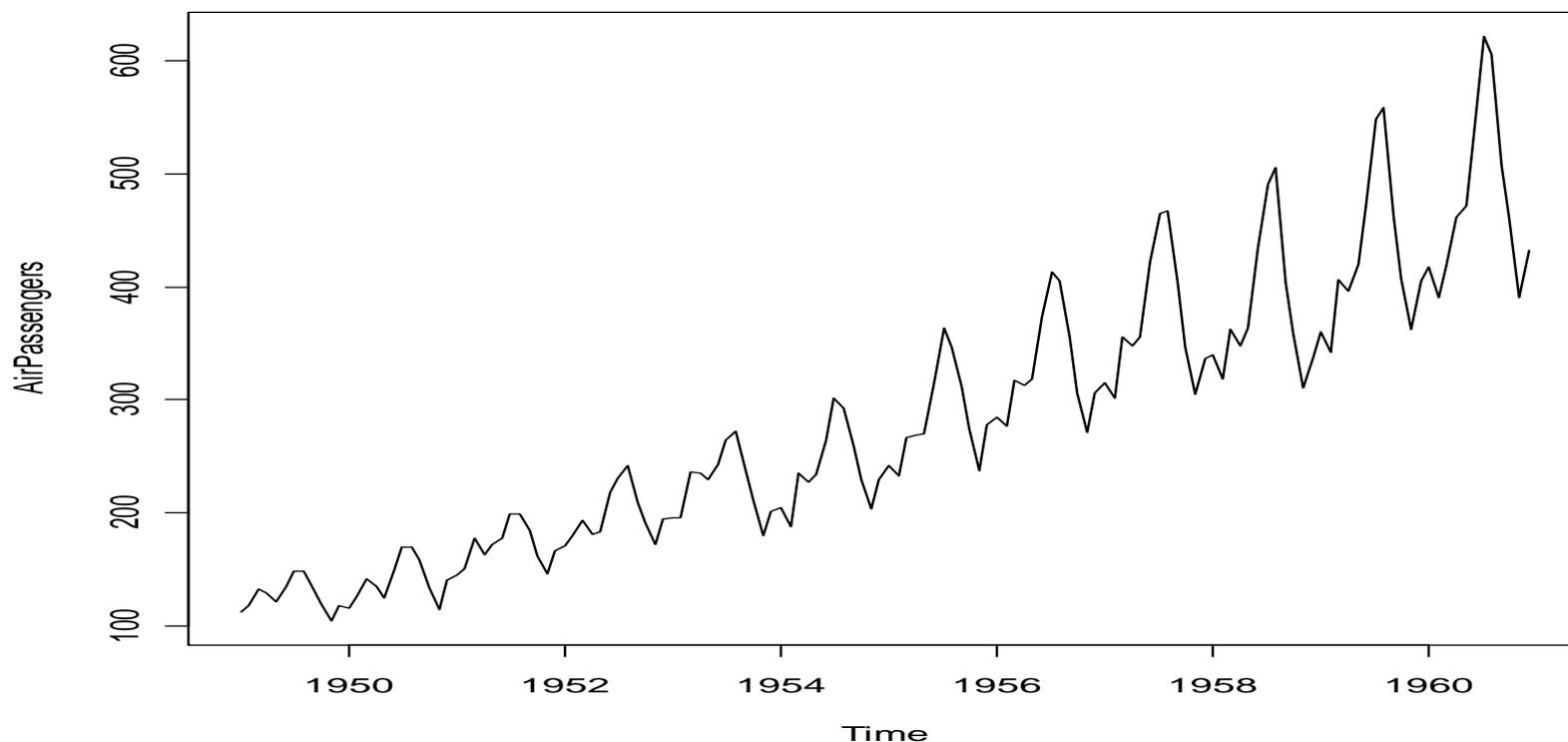


Gráfico de linhas



O Estado de S. Paulo, 28/2/2010.



Gráfico de ramos-e-folhas (*stem-and-leaf plot*)

Representação com **nenhuma** ou **pouca** perda de informação.

Cada valor da variável é dividido em duas partes: **ramo** (dígitos **dominantes**) e **folha** (dígitos **dominados**).

Os **ramos** se situam **à esquerda** de uma linha vertical e as **folhas à direita**.

O número de ramos é escolhido.

Usualmente uma **folha** representa o **último dígito** de um número (números podem ser arredondados ou representados como múltiplos de potências de 10).

Os **dígitos restantes** de um número compõem o **ramo**.



Gráfico de ramos-e-folhas

Notas de 100 alunos em uma certa prova.

> notas

```
5.3  7.0  6.0  7.0  4.4  5.5  9.0  3.1  5.9  4.4  5.5  5.7  3.4  4.8  9.6  7.9
4.7  4.1  7.7  4.2  9.3  3.6  4.6  3.7  8.9  6.0  3.4  7.2  4.2  5.9  5.0  1.8
7.1  5.9  7.3  6.9  3.5  6.4  4.7  4.6  5.2  6.8  8.4  9.3  8.7  4.0  7.6  7.2
3.4  7.8  6.4  4.1  7.9  6.0  5.3  5.3  5.7  5.1  4.0  4.5  8.2  2.6  5.1  5.8
9.0  5.6  5.4  4.1  3.8  5.5  5.6  4.9  8.3  6.8  5.5  5.0  4.6  3.4  6.2  5.1
4.4  6.8 10.0  6.5  7.7  6.1  5.3  6.2  4.6  4.8  8.5  7.2  3.5  2.5  5.3  6.5
4.6  3.9  6.6  7.7
```

> sort(notas)

```
1.8  2.5  2.6  3.1  3.4  3.4  3.4  3.4  3.5  3.5  3.6  3.7  3.8  3.9  4.0  4.0
4.1  4.1  4.1  4.2  4.2  4.4  4.4  4.4  4.5  4.6  4.6  4.6  4.6  4.6  4.7  4.7
4.8  4.8  4.9  5.0  5.0  5.1  5.1  5.1  5.2  5.3  5.3  5.3  5.3  5.3  5.4  5.5
5.5  5.5  5.5  5.6  5.6  5.7  5.7  5.8  5.9  5.9  5.9  6.0  6.0  6.0  6.1  6.2
6.2  6.4  6.4  6.5  6.5  6.6  6.8  6.8  6.8  6.9  7.0  7.0  7.1  7.2  7.2  7.2
7.3  7.6  7.7  7.7  7.7  7.8  7.9  7.9  8.2  8.3  8.4  8.5  8.7  8.9  9.0  9.0
9.3  9.3  9.6 10.0
```

Parte **fracionária**: folhas. Parte **inteira**: ramos.



Gráfico de ramos-e-folhas

> stem(notas)

```
The decimal point is at the |
 1 | 8
 2 | 56
 3 | 14444556789
 4 | 001112244456666677889
 5 | 001112333334555566778999
 6 | 000122445568889
 7 | 00122236777899
 8 | 234579
 9 | 00336
10 | 0
```

Fornecer uma ideia sobre a distribuição.

> stem(notas, scale = 2)

```
The decimal point is at the |
 1 | 8
 2 |
 2 | 56
 3 | 14444
 3 | 556789
 4 | 0011122444
 4 | 56666677889
 5 | 001112333334
 5 | 555566778999
 6 | 00012244
 6 | 5568889
 7 | 0012223
 7 | 6777899
 8 | 234
 8 | 579
 9 | 0033
 9 | 6
10 | 0
```

