ICMC – USP

SME 0802 – Inferência I – 2013/1

Alguns exercícios

1. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.
   (a) Prove que $\overline{X}$ é um estimador de momentos de θ.
   (b) Apresente um estimador de momentos para $\mathrm{Var}(X_1)$.
   (c) Apresente um estimador de momentos para $\mathrm{Var}(X_1)$ utilizando o segundo momento.
   (d) Com base nas observações

   `1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1`

   apresente estimativas obtidas dos estimadores dos itens anteriores.

2. O tempo de sobrevivência (T, em meses) de pacientes contado desde o diagnóstico de uma certa doença segue uma distribuição exponencial com média $1/\theta$, $\theta > 0$.
   (a) Apresente dois diferentes estimadores de momentos para θ.
   (b) Apresente um estimador de momentos para a função de sobrevivência, dada por $P(T > t)$.
   (c) Com base nas observações

   `9 15 8 25 6 17 23 5`

   apresente estimativas obtidas dos estimadores dos itens anteriores.

3. Os diâmetros de esferas metálicas (em mm) seguem uma distribuição $\mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$. Com base nas observações

   `12,2 12,5 12,1 13,8 11,0 16,0 11,6 13,6 12,6 4,2 9,3 11,9 9,8 15,2`

   apresente uma estimativa para o desvio padrão dos diâmetros.

4. O tempo de espera para atendimento de pedidos de um certo item (em dias) segue uma distribuição gama com média μ e desvio padrão σ. Uma amostra aleatória de tamanho n, $n > 1$, é coletada.
   (a) Apresente estimadores de momentos para μ e σ.
   (b) Com base nas observações

   `0,4 1,6 2,8 6,1 2,5 1,5 0,6 0,6 1,2 4,2 1,6 4,5 2,4 1,3 2,6 1,6 4,8`

   apresente estimativas de momentos para μ e σ.

5. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{binomial\ negativa}(\alpha, \theta)$, $\alpha \geqq 1$, inteiro, e $0 < \theta < 1$.
   (a) Apresente estimadores de momentos para α e θ.
   (b) Com base nas observações

   `6 0 4 6 2 3 13 11 5 3 1 4 10 10 4 7 3 4 6 1`

   apresente estimativas de momentos para α e θ.

6. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{binomial}(m, \theta)$, m e θ desconhecidos, $m \geqq 1$, inteiro, e $0 < \theta < 1$.
   (a) Apresente estimadores de momentos para m e θ.

(b) Com base nas observações

`3 6 6 4 6 4 5 3 5 2 7 5 5 4 4 4 5 3 4 6 4 4 3 7 4`

apresente estimativas de momentos para m e θ.

7. A variável aleatória X tem distribuição binomial truncada (em 0) com função massa de probabilidade

$$f(x;\theta) = \frac{\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}}{1-(1-\theta)^n}\, I_{\{1,2,\ldots,n\}}(x).$$

   (a) Apresente um estimador de momentos para θ.

   (b) Sabendo que $n = 25$ e $x = 9$ foi observado, apresente uma estimativa de momentos para θ.

   (c) Utilizando a estimativa de θ do item anterior, apresente o gráfico da função massa de probabilidade de X.

8. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x;\theta) = \theta\, x^{\theta-1}\, I_{(0,1)}(x),\ \theta > 0.$$

   (a) Represente graficamente a função densidade.

   (b) Apresente um estimador de momentos para θ.

   (c) Com base nas observações

   `0,82 0,37 0,65 0,75 0,07 0,47 0,50 0,78 0,28 0,04 0,37`

   apresente uma estimativa de momentos para θ.

9. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x;\theta) = \frac{\log(\theta)}{\theta - 1}\theta^x\, I_{(0,1)}(x),\ \ \theta > 1.$$

   (a) Represente graficamente a função densidade.

   (b) Apresente um estimador de momentos para θ.

   (c) Com base nas observações

   `0,92 0,72 0,84 0,34 0,71 0,55 0,89 0,34 0,93 0,25 0,75 0,13 0,64 0,94`

   apresente uma estimativa de momentos para θ.

10. Resolva o exercício 1 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função logverossimilhança.

11. Resolva o exercício 4 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função logverossimilhança.

12. Resolva o exercício 7 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função logverossimilhança.

13. Resolva o exercício 8 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função logverossimilhança.

14. Resolva o exercício 9 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função logverossimilhança.

15. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(x;\theta)$, em que $f(x;\theta) = \exp\{-(x-\theta)\} I_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.

    (a) Represente graficamente a função densidade.

    (b) Apresente o EMV de θ.

    (c) Com base nas observações
    `19,1 17,7 19,4 17,7 18,9 18,0 18,1 17,9 18,2 19,3 18,2 17,4 18,5 17,6 17,4`
    apresente a estimativa de MV para θ. Represente graficamente a função verossimilhança.

16. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função massa de probabilidade
$$f(x;\theta) = \theta\,(1-\theta)^{x-1}\, I_{\{1,2,\ldots\}}(x),\ 0 < \theta < 1.$$

    (a) Represente graficamente a função massa de probabilidade.

    (b) Apresente o EMV de θ.

    (c) Com base nas observações
    `1 3 2 2 1 2 1 1 2 2 3 1 2 6 1 1 2 5 2 2 1 2 1 1 3 4 1`
    apresente a estimativa de MV para θ. Represente graficamente a função logverossimilhança.

17. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função massa de probabilidade
$$f(x;\theta) = 0,3 \times 0,7^{x-\theta}\, I_{\{\theta,\theta+1,\ldots\}}(x),\ \ \theta > 0. \tag{1}$$

    (a) Represente graficamente a função massa de probabilidade.

    (b) Apresente o EMV de θ.

    (c) Com base nas observações
    `3 5 4 7 4 2 7`
    apresente a estimativa de MV para θ. Represente graficamente a função verossimilhança.

    (d) Na equação (1), $0,3$ e $0,7$ são substituídos por α e $1-\alpha$, respectivamente, em que $0 < \alpha < 1$, conhecido ou desconhecido. Sua resposta ao item 17b mudaria?

18. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função densidade
$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta^2}\right) I_{(0,\infty)}(x),\ \ \theta > 0.$$

    (a) Represente graficamente a função densidade.

    (b) Apresente o EMV de θ.

    (c) Com base nas observações
    `2.80 8.02 0.59 5.82 9.23 6.41 5.52 4.42 5.36 3.33 11.48`
    apresente a estimativa de MV para θ. Represente graficamente a função logverossimilhança.