

Árvores

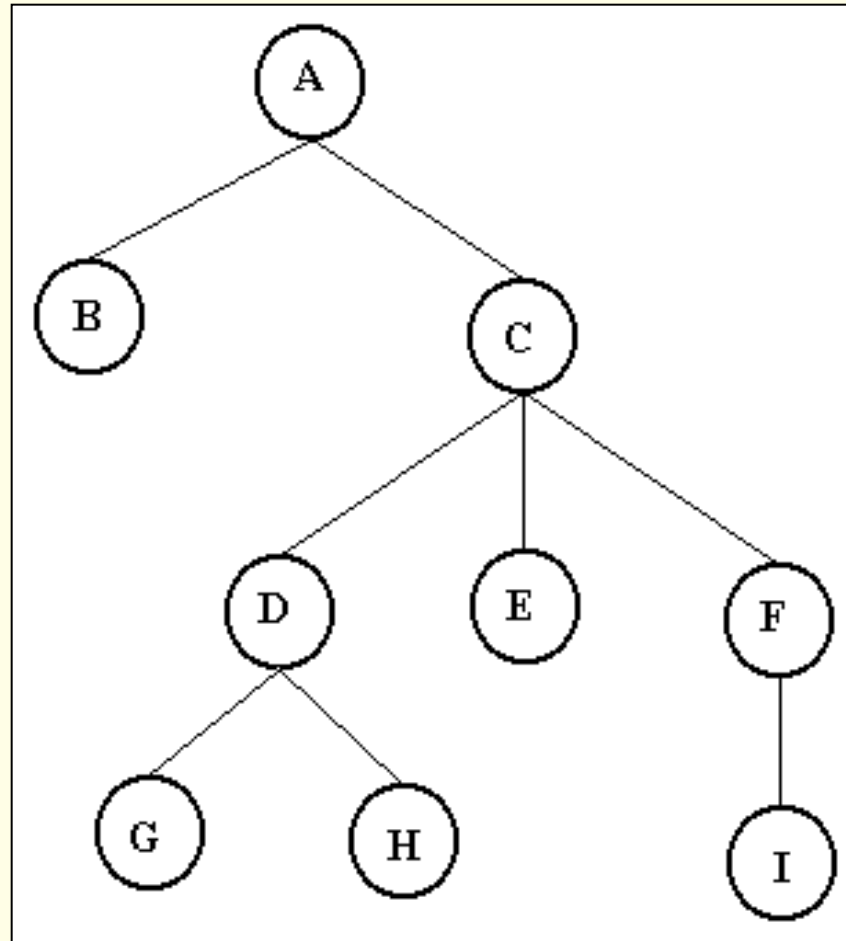
Introdução à Ciência da Computação II

Listas e árvores

- **Listas lineares**
 - Um nó após o outro, adjacentes
 - Sem relações hierárquicas entre os nós, em geral
- Diversas aplicações necessitam de **estruturas mais complexas** do que as listas estudadas até agora
 - **Listas não lineares**: árvores, grafos, etc.

Árvores

■ Exemplo



Árvores

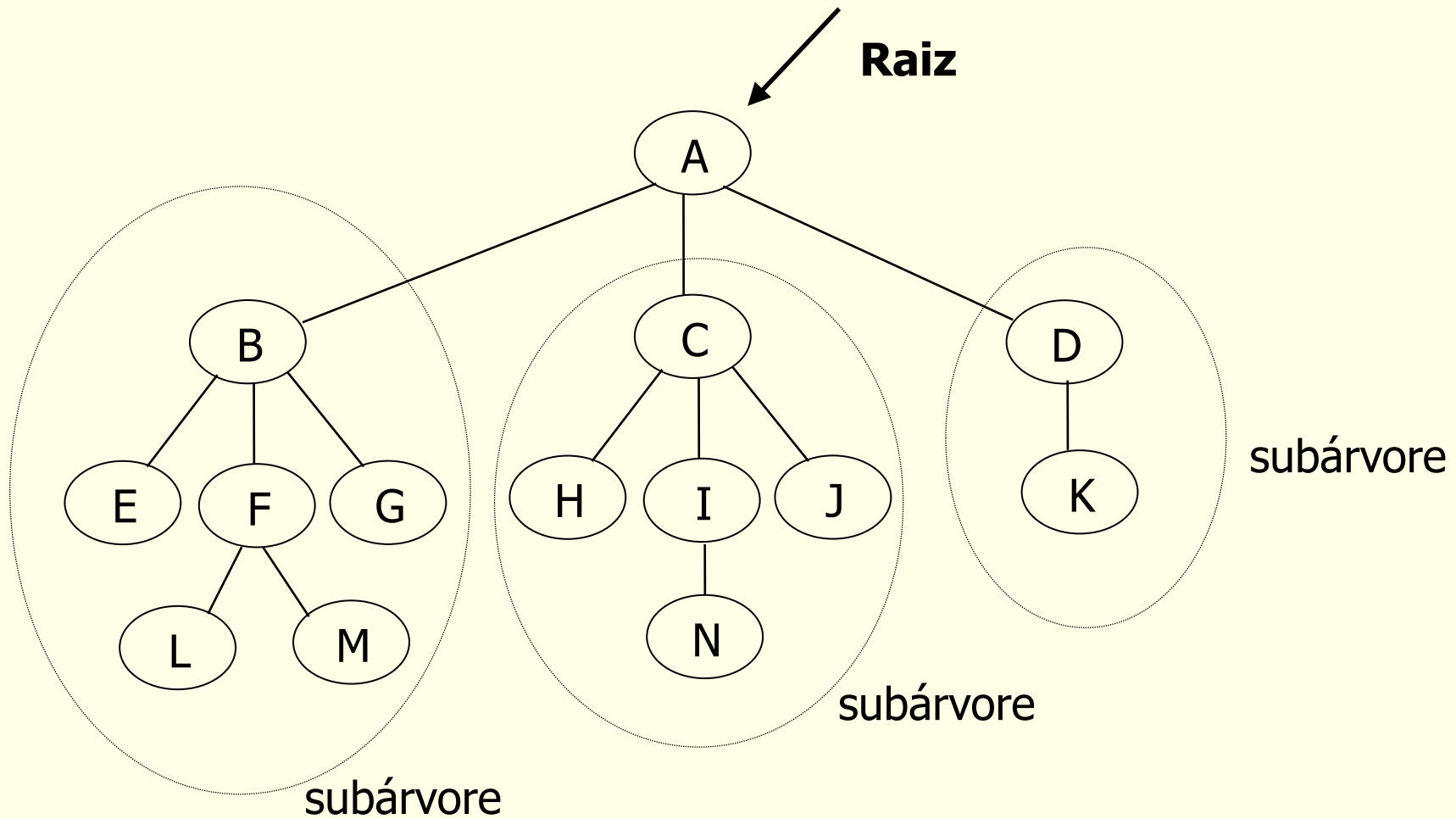
- Motivações para usá-las
 - **Inúmeros problemas** podem ser representados e tratados por árvores
 - Árvores admitem **tratamento computacional eficiente** quando comparadas a estruturas mais genéricas como os grafos (os quais, por sua vez são mais flexíveis e, portanto, complexos)
 - **Ótimas para busca!**

Árvores

■ Definição

- Uma árvore T , ou simplesmente uma árvore, é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que
 - $T=0$ é a árvore dita vazia ou
 - Existe um nó especial R , chamado raiz de T ; os nós restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em m (≥ 1) conjuntos não vazios que são as subárvores de R , sendo que cada subárvore é, por sua vez, uma árvore

Árvores



Árvores

- Nós filhos, pais, tios, irmãos e avô
 - Seja V o nó raiz de uma subárvore de T
 - Os nós raízes w_1, w_2, \dots, w_j das subárvores de V são chamados filhos de V
 - V é chamado pai de w_1, w_2, \dots, w_j
 - Os nós w_1, w_2, \dots, w_j são irmãos
 - Se Z é filho de w_1 , então w_2 é tio de Z e V é avô de Z

Árvores

- Grau de saída, descendente e ancestral
 - O **número de filhos** de um nó é chamado **grau** (de saída) desse nó
 - Se X pertence à subárvore V de T , então X é **descendente** de V e V é **ancestral**, ou antecessor, de X

Árvores

- **Nó folha e nó interior**

- Um nó que não possui descendentes é chamado de nó folha, ou seja, um nó folha é aquele com grau de saída nulo ou zero
- Um nó que não é folha (isto é, possui grau de saída diferente de zero) é chamado nó interior, nó interno ou, ainda, nó intermediário

Árvores

- Grau de uma árvore
 - O grau de uma árvore é o **máximo** entre os **graus de seus nós**

Árvores

- Floresta

- Uma floresta é um conjunto de zero ou mais árvores

Árvores

- Caminho, comprimento do caminho
 - Uma seqüência de nós distintos v_1, v_2, \dots, v_k , tal que existe sempre entre nós consecutivos (isto é, entre v_1 e v_2 , entre v_2 e v_3 , ... , $v_{(k-1)}$ e v_k) a relação "é filho de" ou "é pai de" é denominada um caminho na árvore; diz-se que v_1 alcança v_k e que v_k é alcançado por v_1
 - Um caminho de k vértices é obtido pela seqüência de $k-1$ pares; o valor $k-1$ é o comprimento do caminho

Árvores

- **Nível (ou profundidade) e altura de um nó**
 - O **nível de um nó** é o número de nós do caminho da raiz até o nó
 - O nível da raiz é portanto 1
 - A **altura de um nó V** é o número de nós no maior caminho de V até um de seus descendentes
 - As folhas têm altura 1

Árvores

- Altura de uma árvore
 - A altura de uma árvore T é igual ao máximo nível de seus nós
 - Em geral, representa-se a altura de T por $h(T)$ e a altura da subárvore de raiz V por $h(V)$

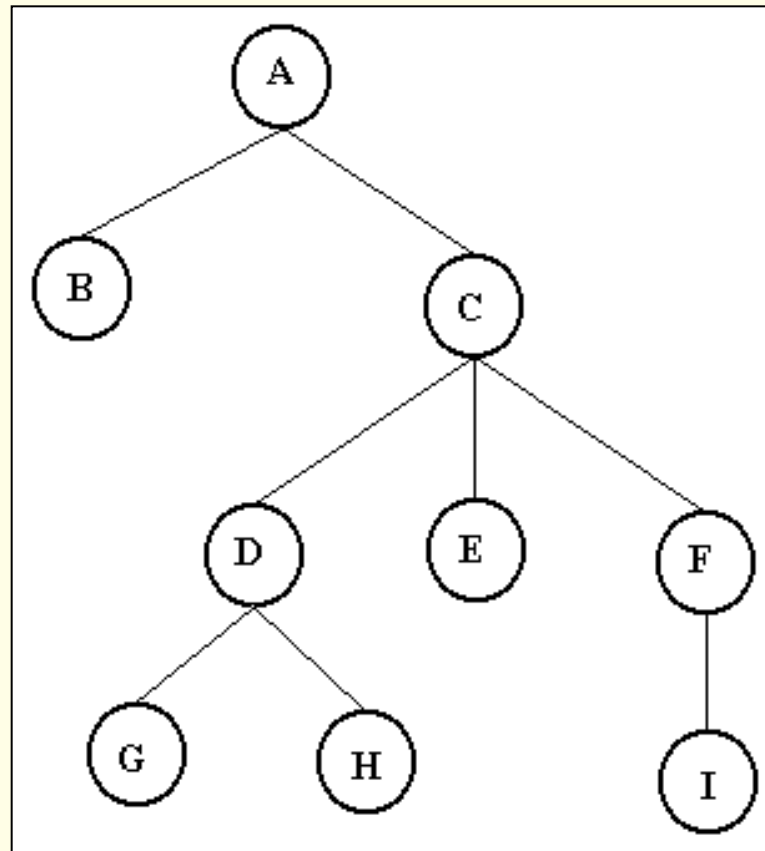
Árvores

- **Árvore ordenada**

- Uma árvore ordenada é aquela na qual os **filhos** de cada nó **estão ordenados**
- Assume-se ordenação da **esquerda para a direita**

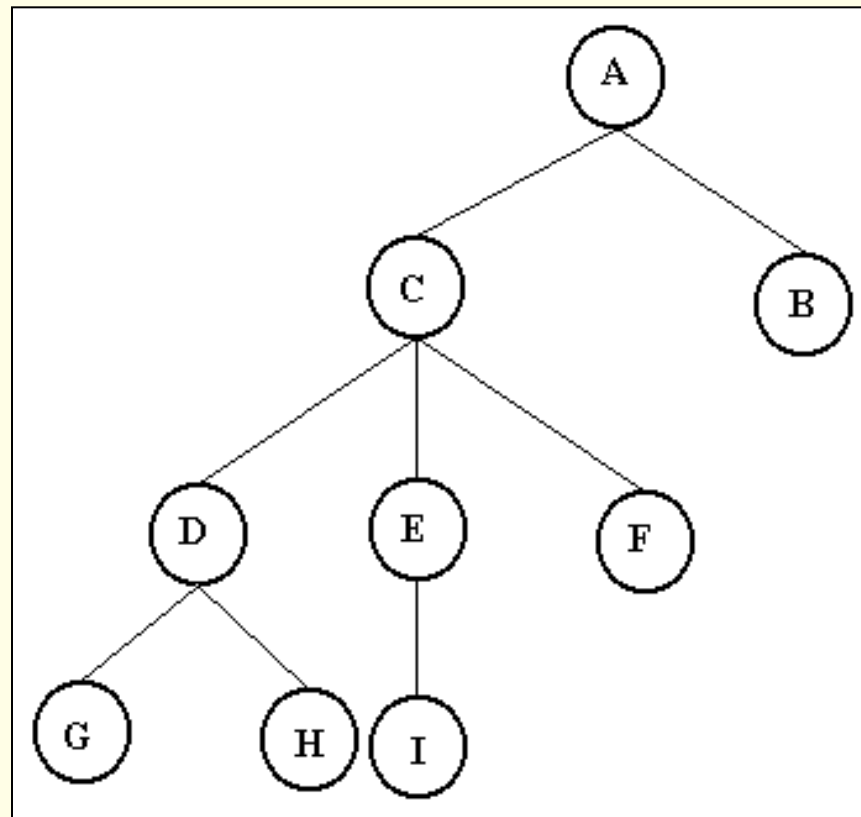
Árvores

- Árvore ordenada



Árvores

- **Árvore não ordenada**



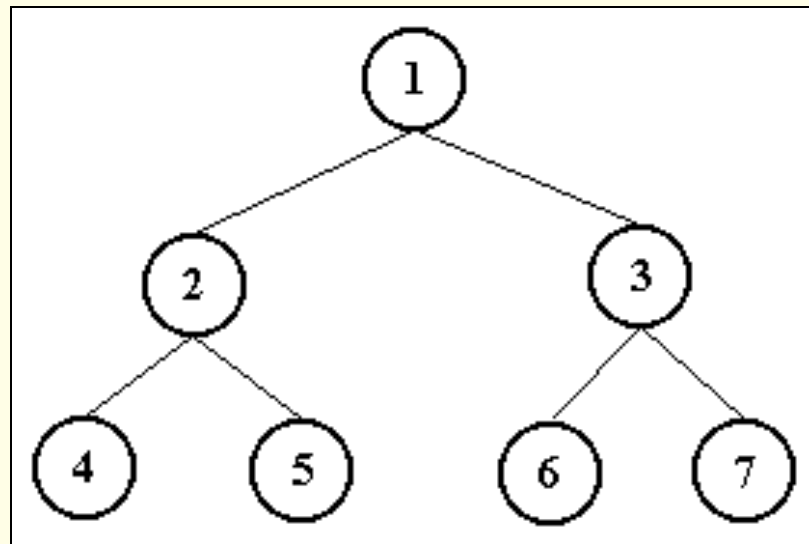
Árvores

- **Árvore cheia**

- Uma árvore de grau d é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós tem número máximo de filhos (exceto as folhas, logicamente) e todas as folhas estão na mesma altura

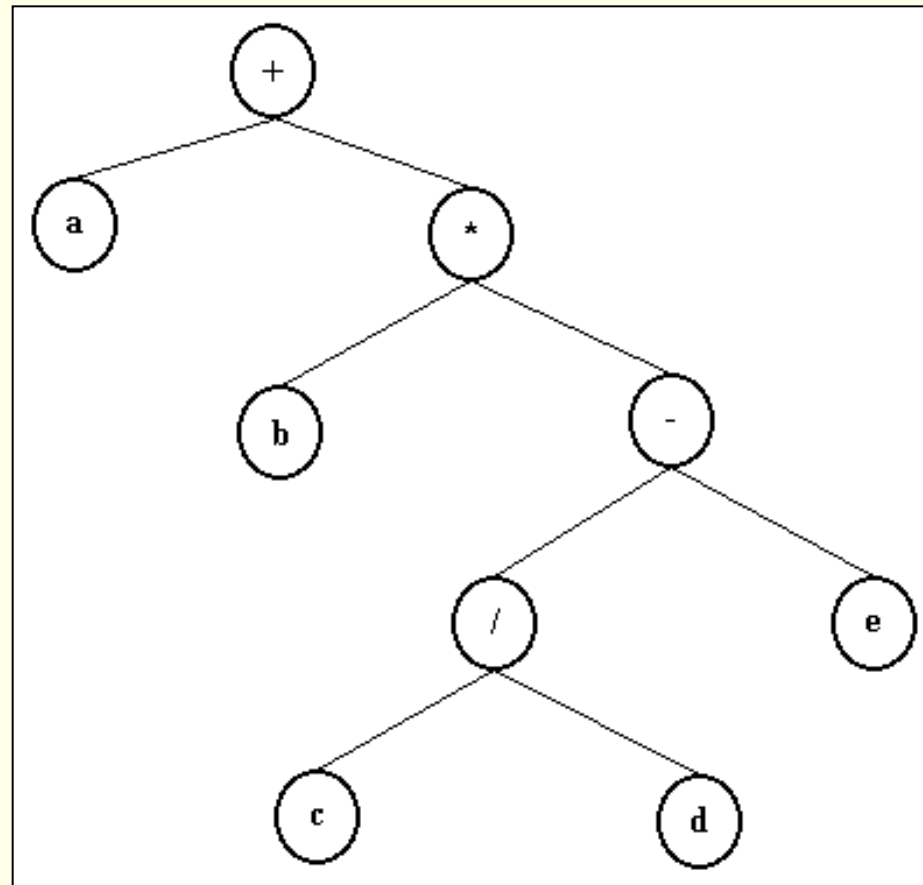
Árvores

- Exemplo de árvore cheia de grau 2



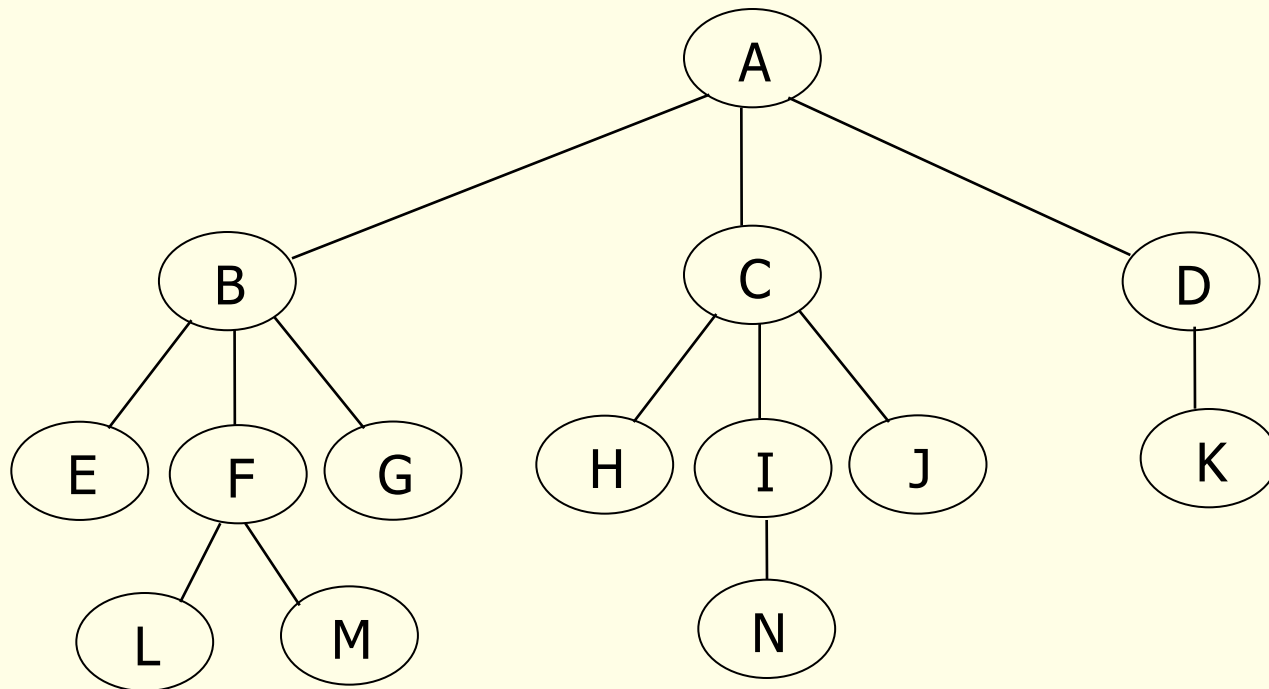
Árvores: exemplo

- Representação da expressão aritmética $(a + (b * ((c / d) - e)))$



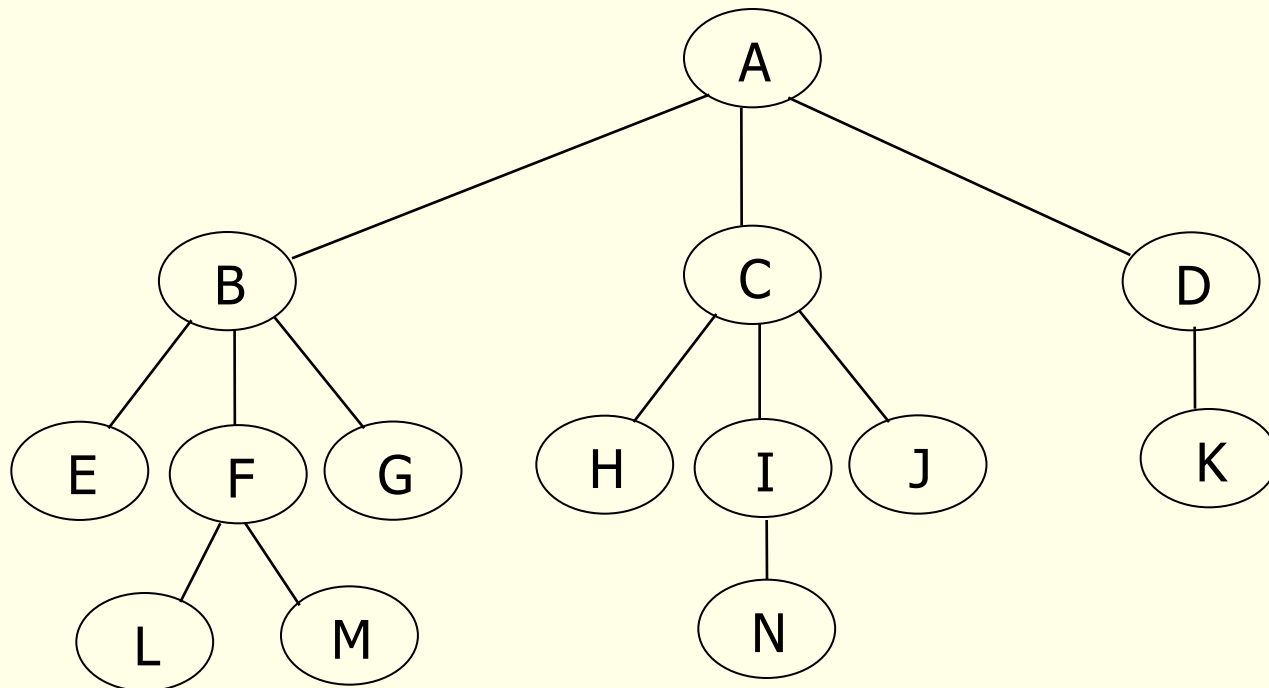
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quantas subárvores A tem?



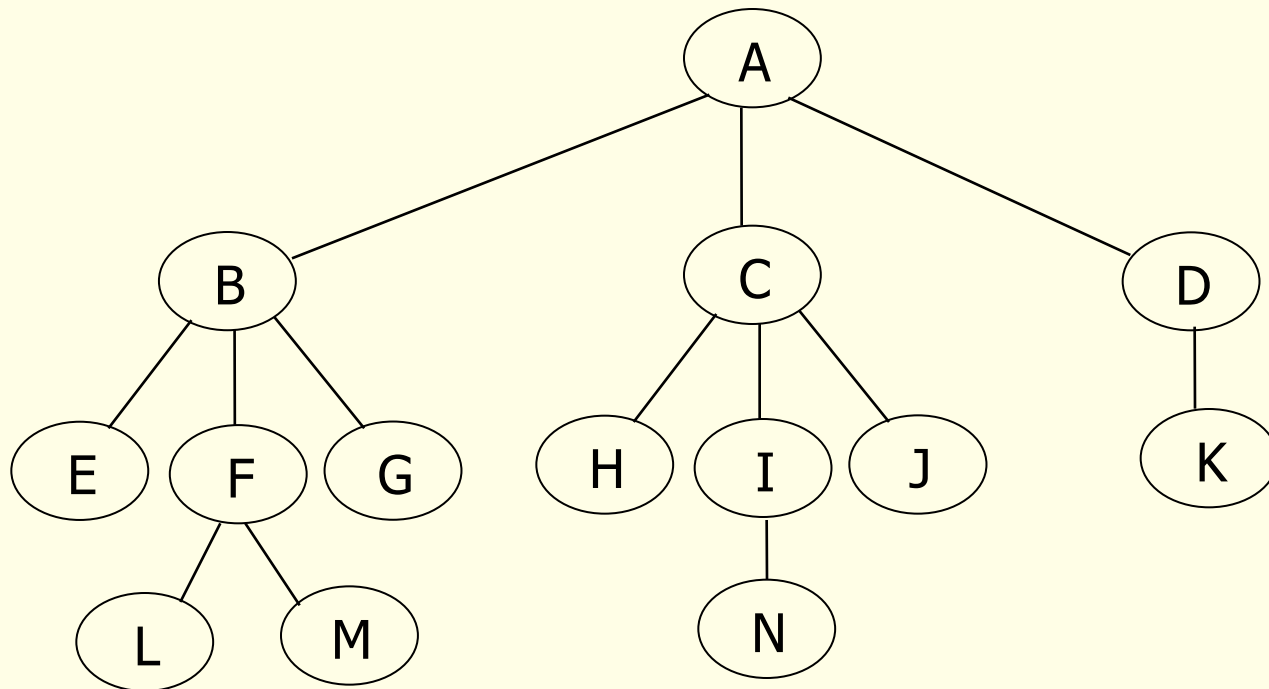
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quem são os filhos de A? E os descendentes de A?



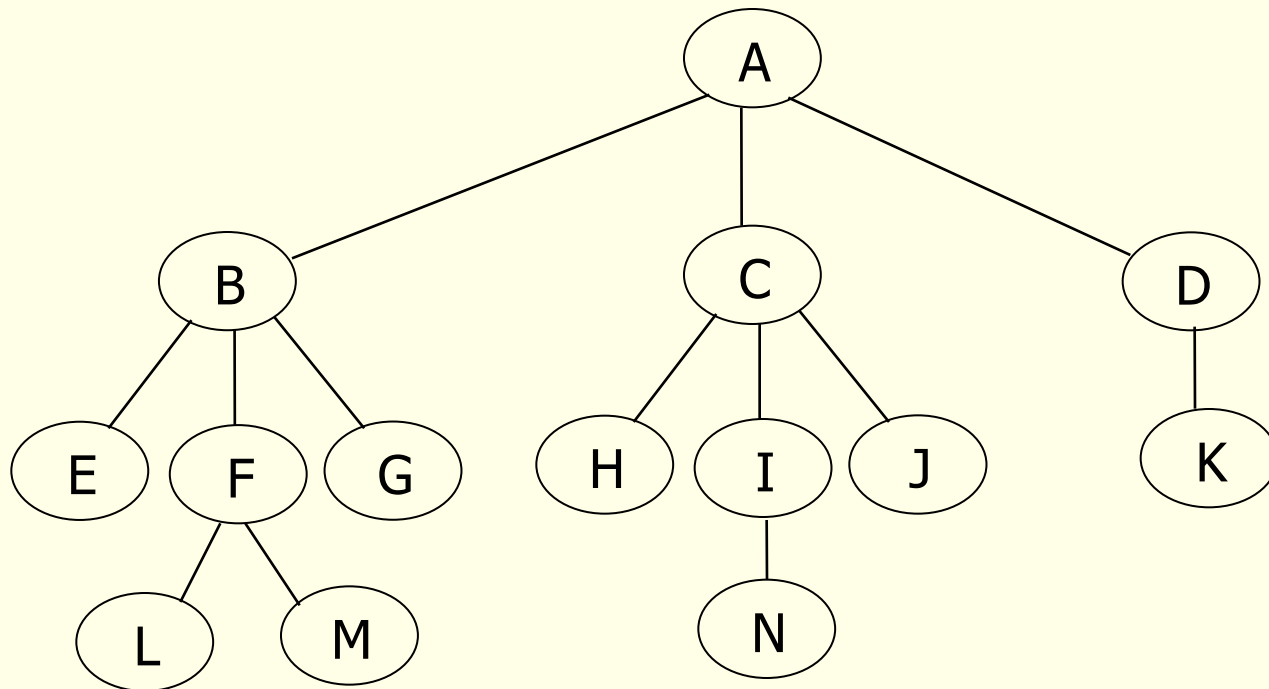
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quais são os nós folha dessa árvore?



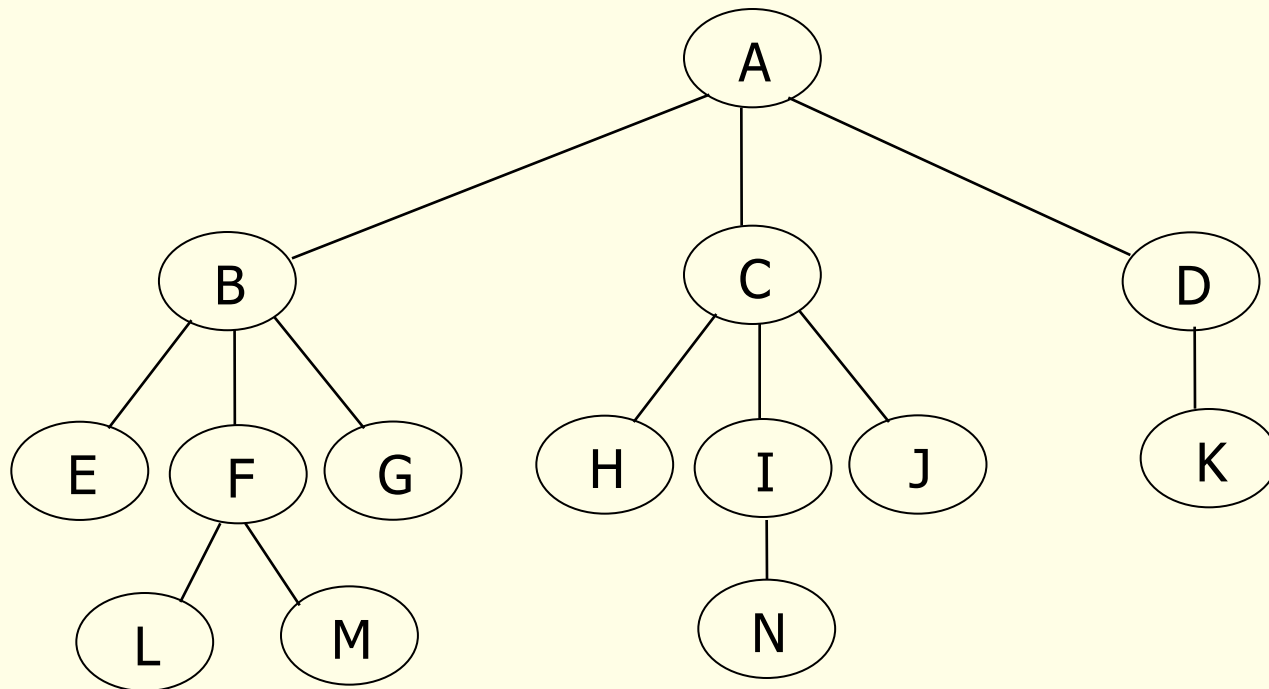
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Qual o grau dessa árvore?



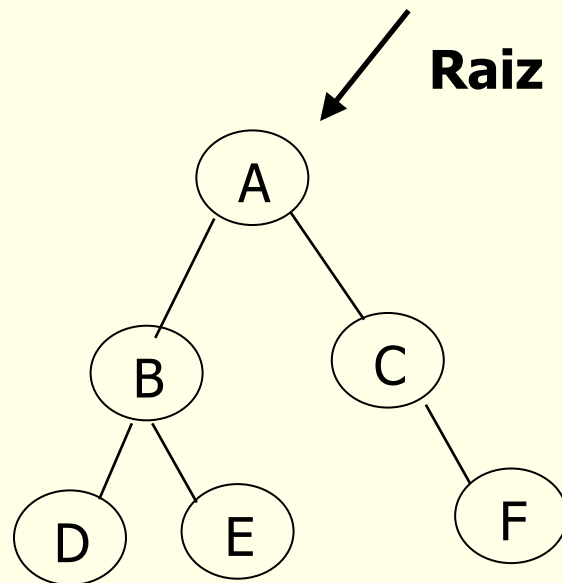
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Qual a altura dessa árvore?



Árvores binárias

- **Árvores com grau 2**, ou seja, cada nó pode ter 2 filhos, no máximo



Terminologia:

- filho esquerdo
- filho direito
- informação

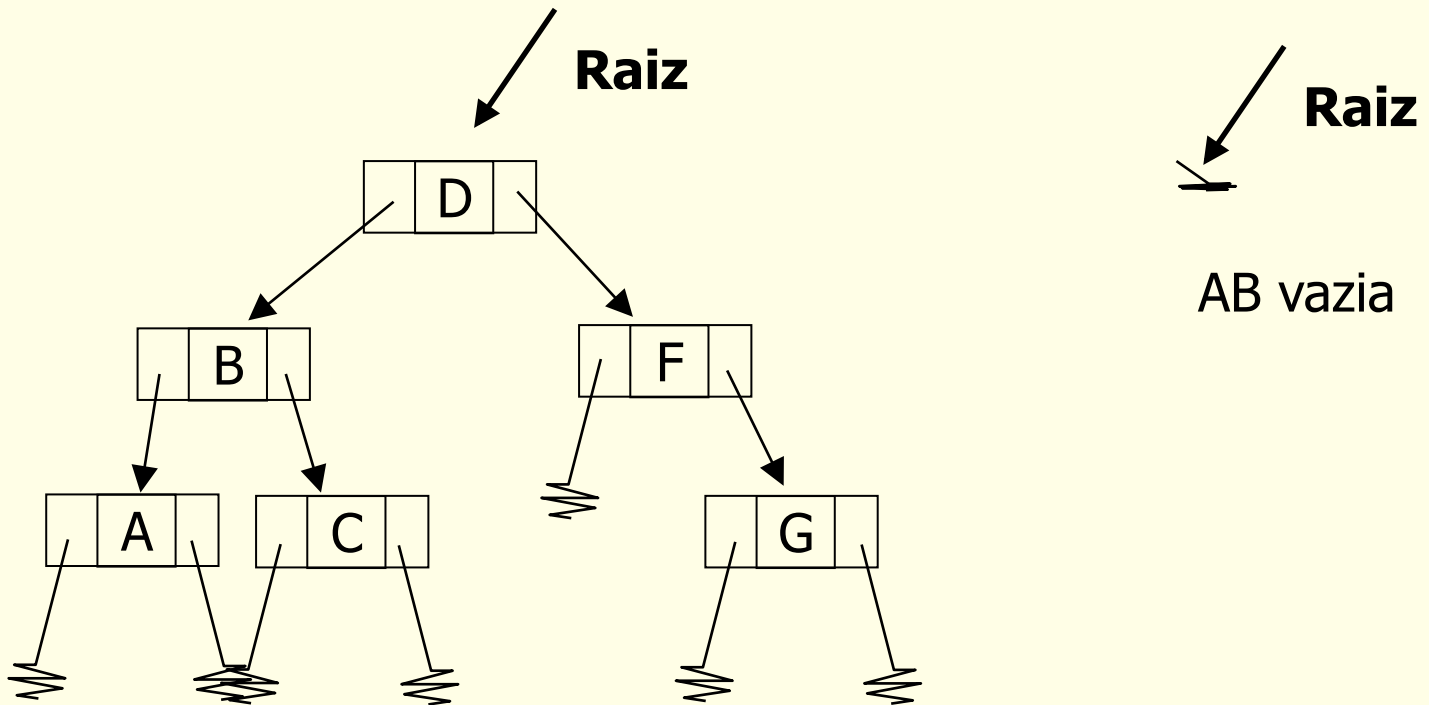
Árvores binárias

■ Exercício

- Considerando a implementação dinâmica e encadeada, declare a estrutura de cada nó de uma árvore binária

Árvores binárias

- Representação dinâmica e encadeada de uma árvore binária



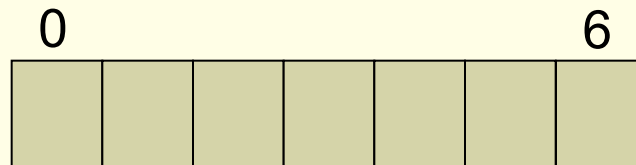
Árvores binárias

■ Pergunta

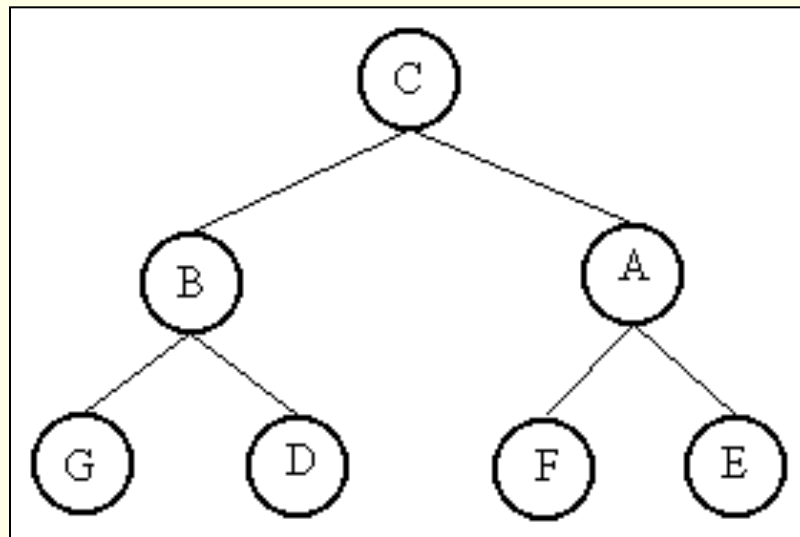
- Quantos ponteiros são necessários para se percorrer uma árvore binária completamente?
- Quantos são necessários para percorrer qualquer tipo de árvore?

Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Vetor

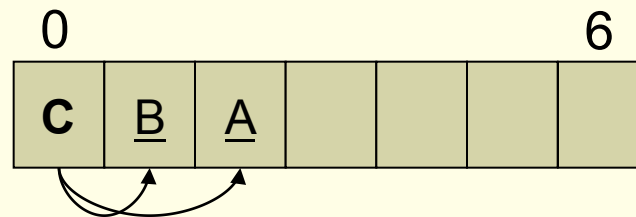


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

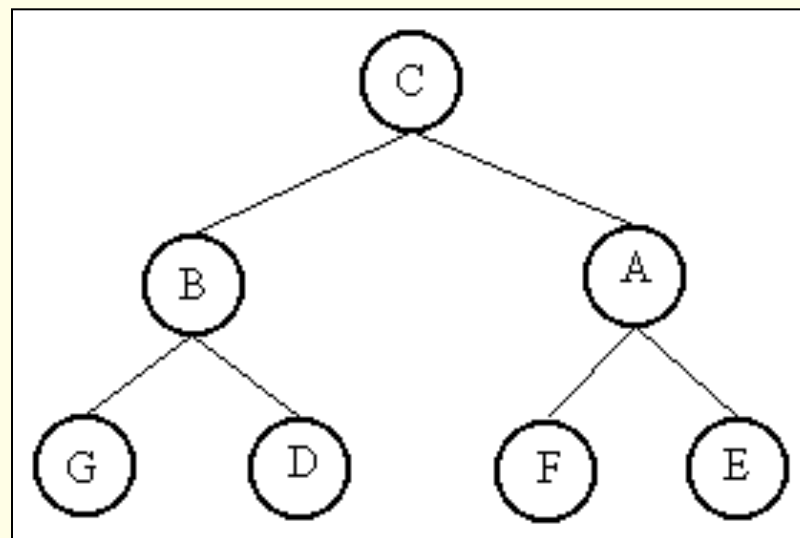


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Vetor

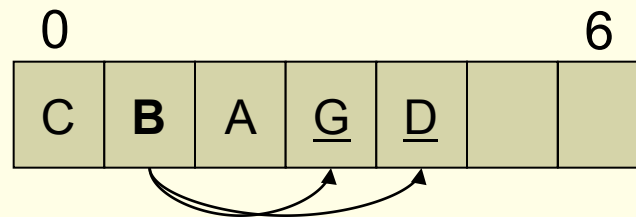


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

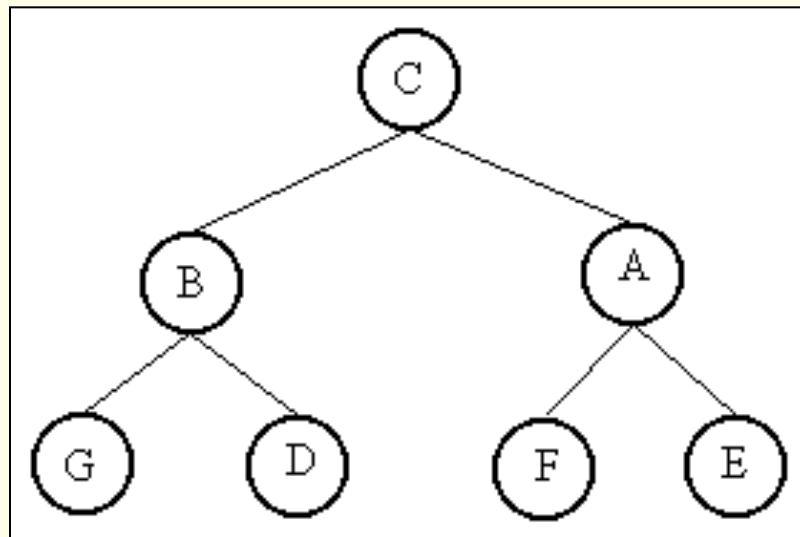


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Vetor

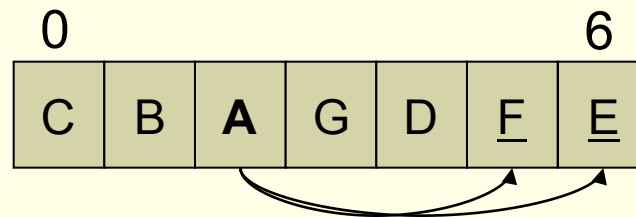


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

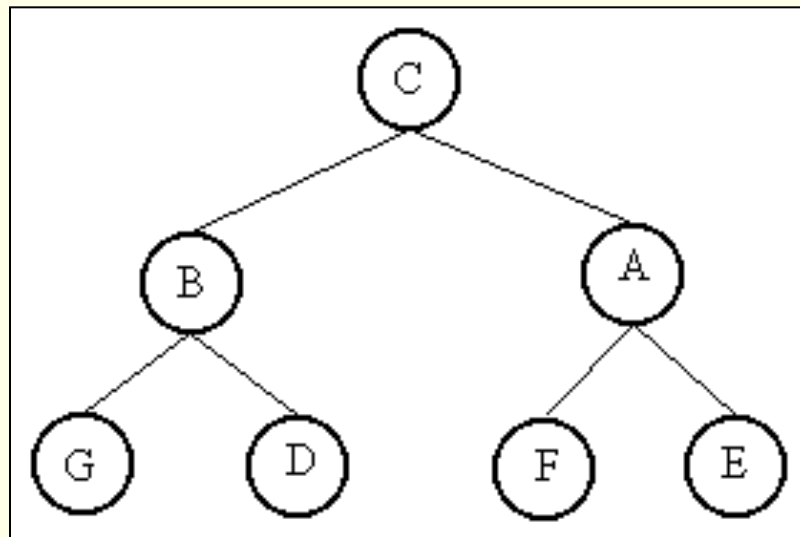


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Vetor

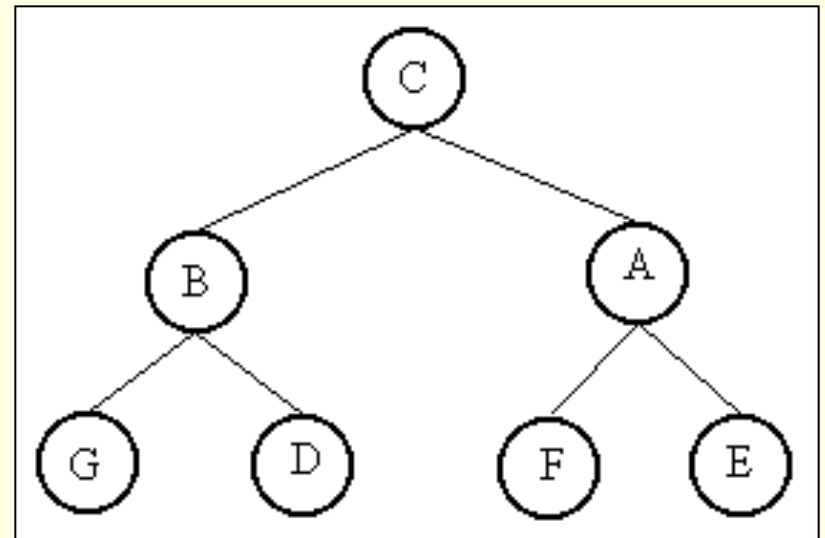
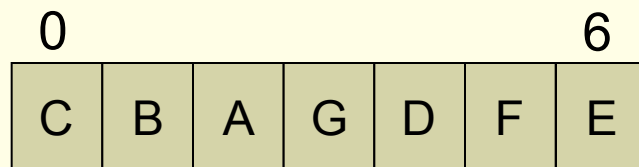


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



Árvores binárias

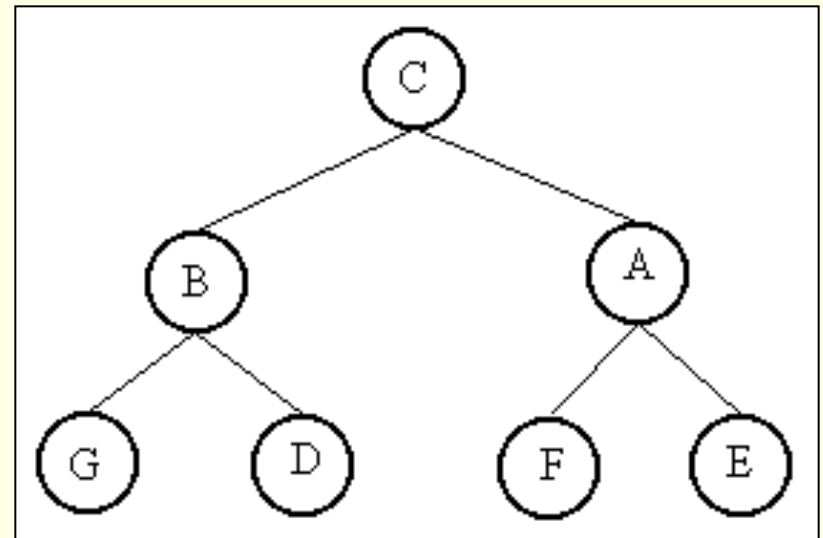
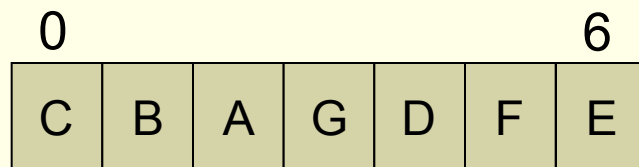
- Representação estática e seqüencial de árvores binárias



- Como saber quem é filho de quem?

Árvores binárias

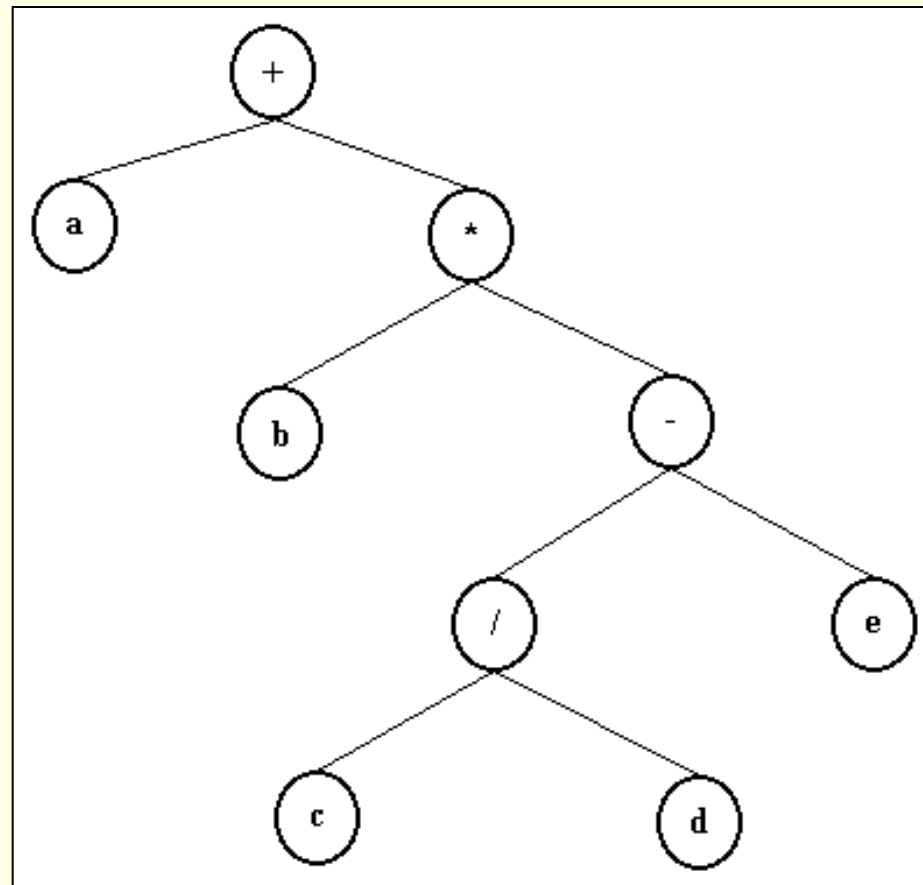
- Representação estática e seqüencial de árvores binárias



- Como saber quem é filho de quem?
 - Filhos de i são $2i+1$ e $2i+2$

Árvores binárias

- Exercício: represente a árvore abaixo em um vetor



Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Como fazer a inserção e remoção de elementos nessa representação?
 - É mais fácil ou difícil do que na implementação encadeada e dinâmica? É mais eficiente?
 - E em termos de uso da memória?

Árvores binárias

■ Exercício

- Implemente uma sub-rotina para percorrer uma árvore binária e imprimir todos os seus elementos
 - Considere a implementação dinâmica e encadeada

Árvores binárias

- Exercício (nota adicional)
 - Implemente uma sub-rotina para determinar a altura de uma árvore binária
 - Considere a implementação dinâmica e encadeada