

Árvores-B (Parte Ia)

SCC-203 – Algoritmos e Estruturas de Dados II

Graça Nunes



Problema

- Cenário até então
 - Acesso a disco é **caro** (lento)
 - **Pesquisa binária** é útil em índices ordenados...
 - mas com índice grande que não cabe em memória principal, pesquisa binária exige **muitos acessos a disco**
 - Exemplo: 15 itens podem requerer 4 acessos, enquanto 1.000 itens podem requerer até 11 acessos



Problema

- Cenário

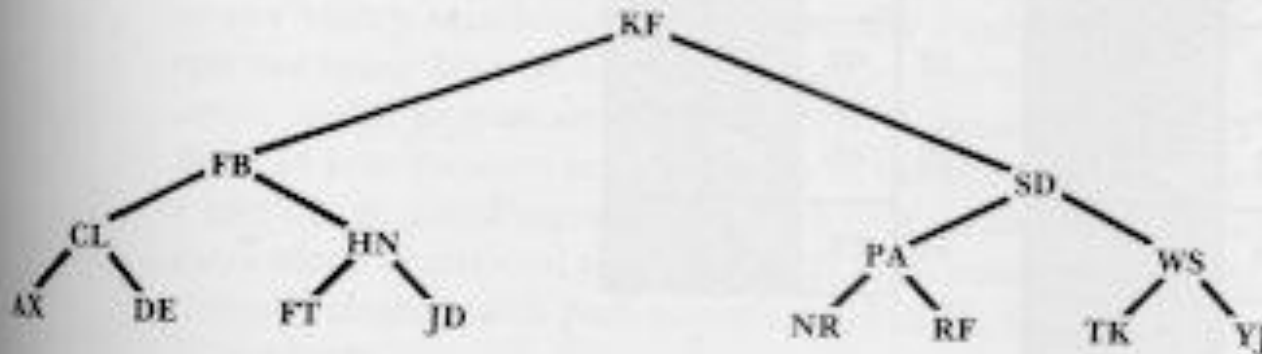
- Manter em disco um índice ordenado para busca binária tem custo proibitivo
 - Inserir ou eliminar, mantendo o arquivo ordenado custa muito caro.
- Necessidade de método com inserção e eliminação com apenas efeitos locais, isto é, que não exija a reorganização total do índice

Solução: árvores binárias de busca?

AX CL DE FB FT HN JD KF NR PA RF SD TK WS

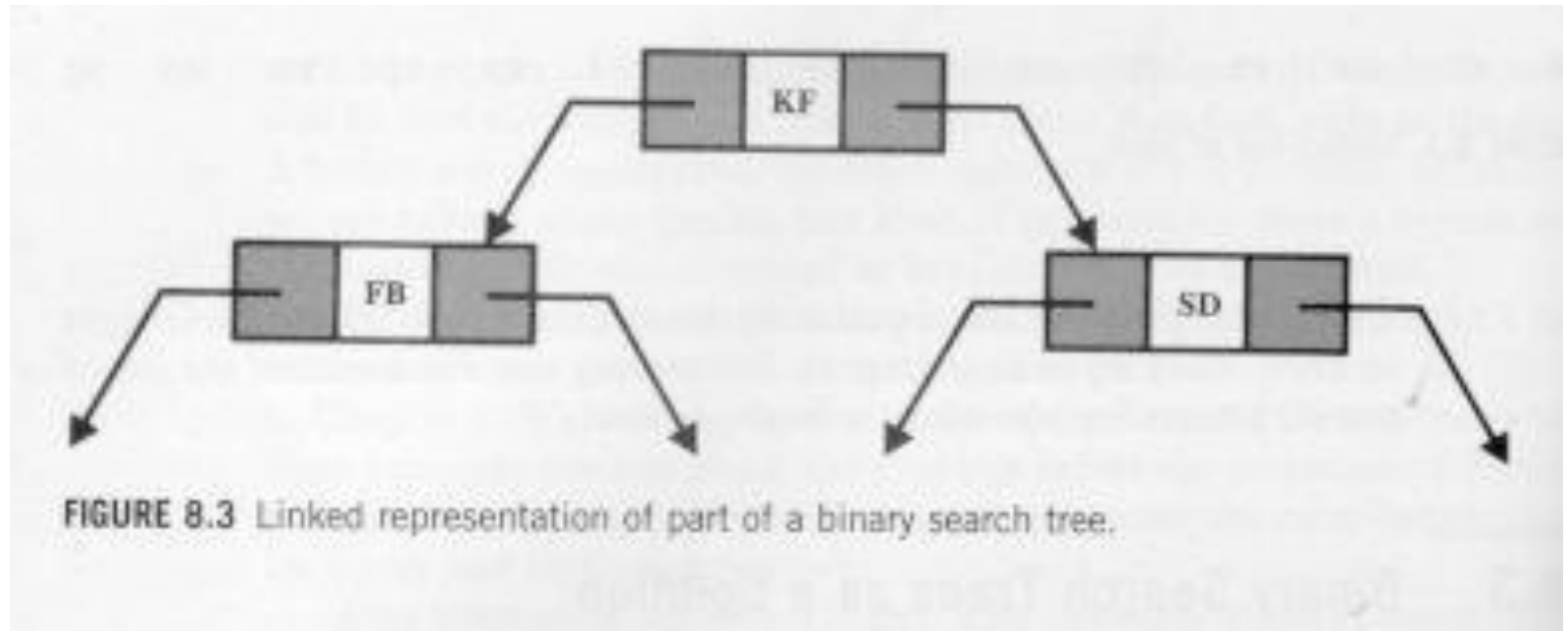
FIGURE 8.1 Sorted list of keys.

FIGURE 8.2 Binary search tree representation of the list of keys.



Vetor ordenado e representação por árvore binária

Solução: árvores binárias de busca



Representação da árvore no arquivo

ROOT → 9

	Key	Left child	Right child
0	FB	10	5
1	JD		
2	RF		
3	SD	6	13
4	AX		
5	YJ		
6	PA	11	2
7	FT		

	Key	Left child	Right child
8	HN	7	1
9	KF	0	5
10	CL	4	12
11	NR		
12	DE		
13	WS	14	5
14	TK		

FIGURE 8.4 Record contents for a linked representation of the binary tree in Fig. 8.2.

Registros (tam. fixo) são mantidos em **arquivo**, e **ponteiros (esq e dir)** indicam onde (RRN) estão os registros filhos.



Vantagens

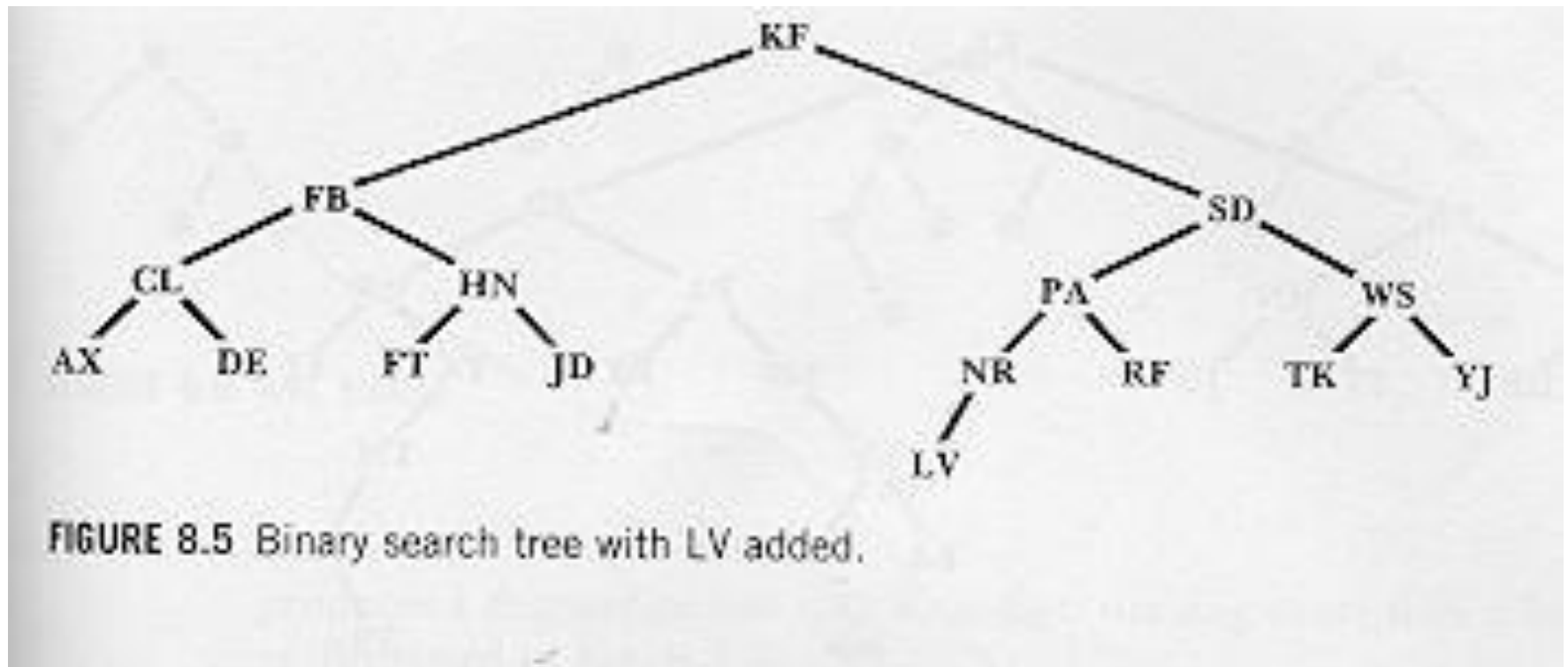
- Quais são as vantagens de se utilizar ABBs?



Vantagens

- **Ordem lógica** dos registros \neq **ordem física** no arquivo
 - Ordem lógica: dada por ponteiros **esq** e **dir**
 - Registros não precisam estar fisicamente ordenados
- Inserção de uma nova chave no arquivo
 - É necessário **saber onde inserir**
 - Busca pelo registro é necessária, mas **reorganização do arquivo não**

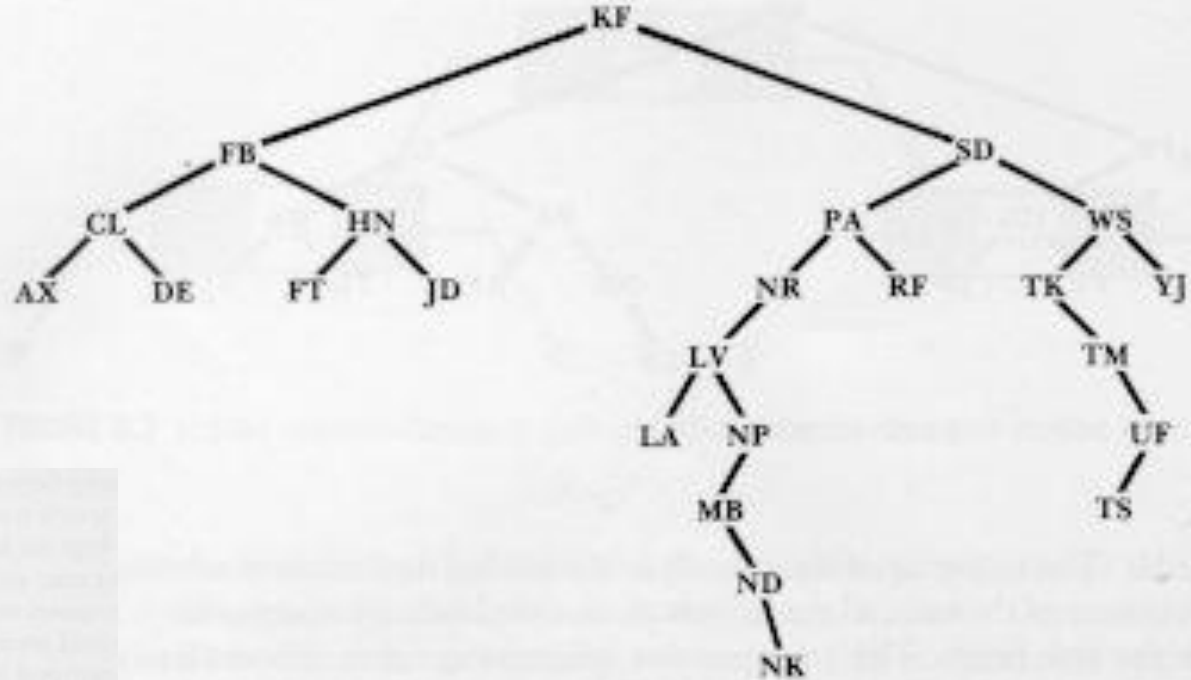
Inserção da chave LV



Problema: desbalanceamento

- Inserção das chaves NP MB TM LA UF ND TS NK

Situação indesejável: inserção em ordem alfabética



8.6 Binary search tree showing the effect of added keys.

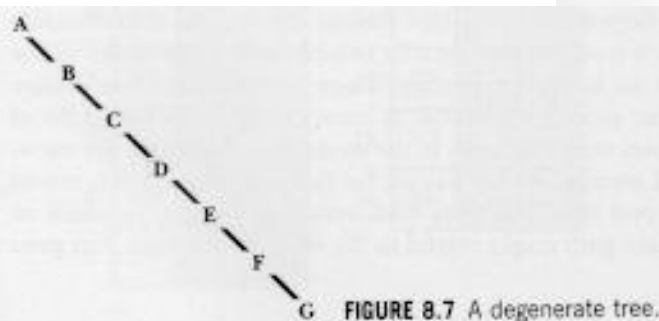
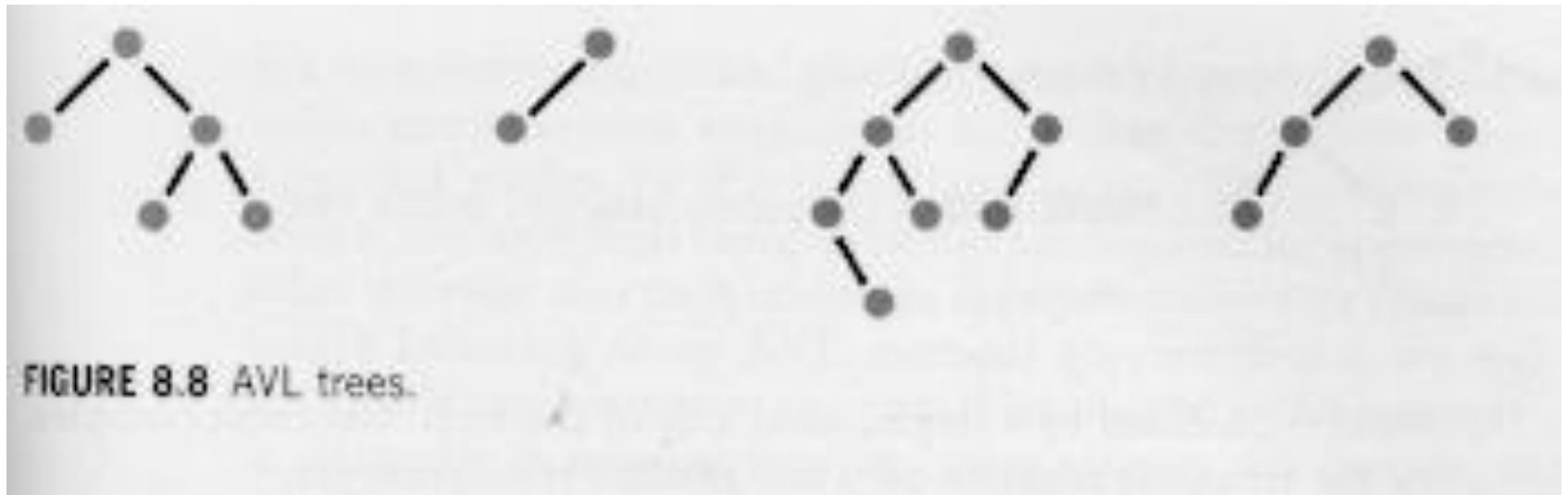


FIGURE 8.7 A degenerate tree.

Solução por árvores-AVL



Para todo nó: as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1.

Árvores binárias perfeitamente balanceadas e AVL

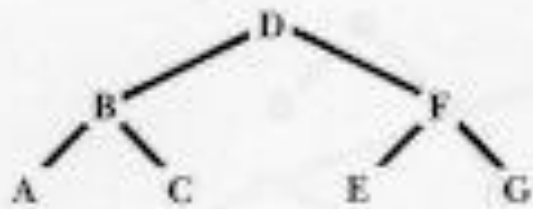


FIGURE 8.10 A completely balanced search tree.

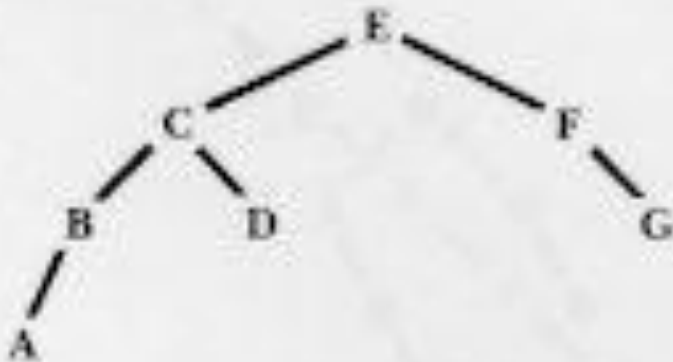


FIGURE 8.11 A search tree constructed using AVL procedures.



Solução por árvores-AVL

- **Árvores binárias de busca balanceadas** garantem eficiência
 - AVLs
- **Busca no pior caso**
 - Arvore binária perfeitamente balanceada: altura da árvore, ou seja, $\log_2(N+1)$
 - AVL, $1.44 * \log_2(N+2)$ – 44% mais alta no máximo
 - Exemplo: com 1.000.000 chaves
 - Árvore binária perfeitamente balanceada: busca em até 20 níveis
 - AVL: busca em até 28 níveis



Solução por árvores-AVL

■ Problema

- Se **chaves em memória secundária**, ainda há **muitos acessos!**
 - 20 ou 28 *seeks* são inaceitáveis!

■ Até agora...

- Árvores binárias de busca **dispensam ordenação dos registros** 😊
- Mas **número excessivo de acessos** ☹️



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- Solução

- **Paginação**

- A busca (*seek*) por uma posição específica do disco é muito lenta
- Mas, uma vez na posição, pode se ler uma grande quantidade de registros sequencialmente a um custo relativamente pequeno



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- Noção de **página** em *sistemas paginados*
 - Feito o seek, todos os registros de uma mesma "página" do arquivo são lidos
 - Esta página pode conter um número grande de registros
 - Se o próximo registro a ser recuperado estiver na mesma página já lida, evita-se um novo acesso ao disco

Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

8 páginas-filhas

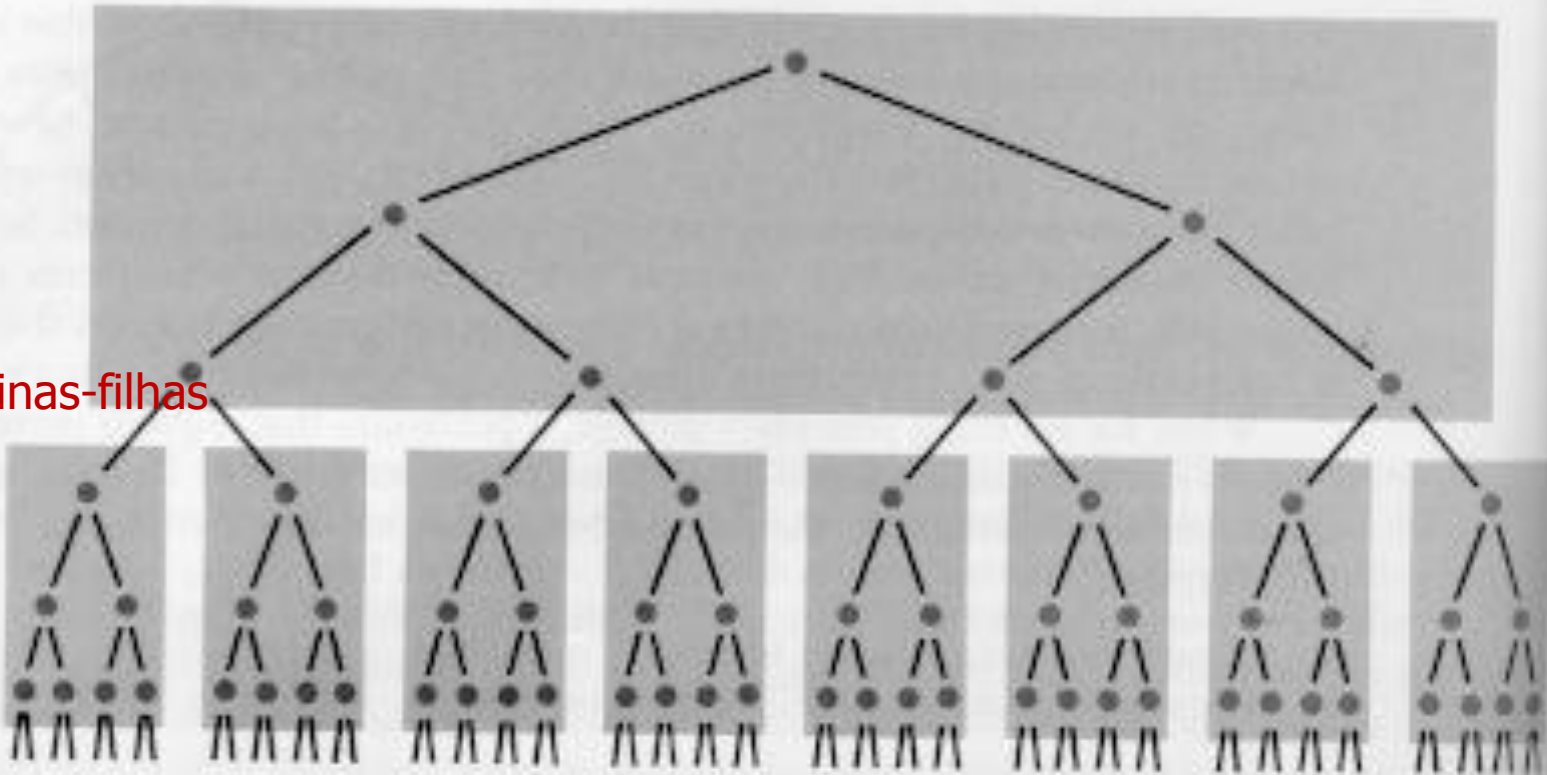
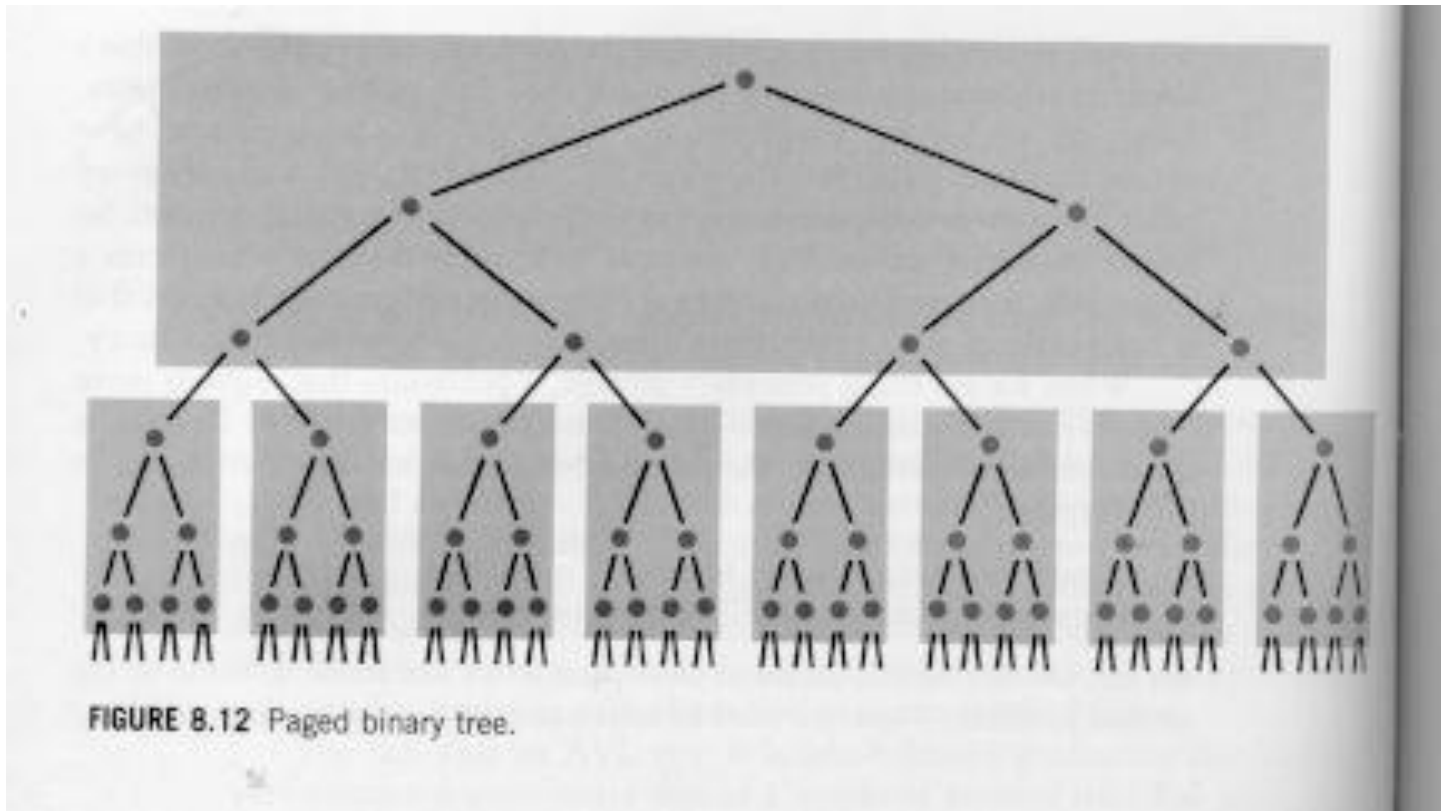


FIGURE 8.12 Paged binary tree.

7 registros por página (por seek); Árvore de altura 2 e ordem 8 $\rightarrow (8+1)*7$ registros, se completa

Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

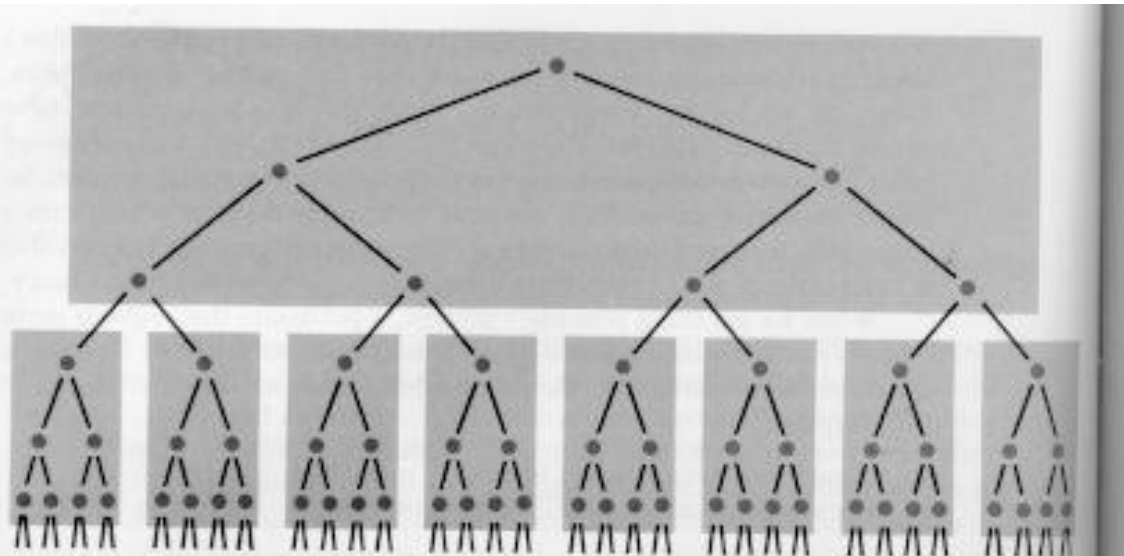
- Qualquer um dos 63 registros pode ser acessado em, no máximo, 2 acessos



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- Se a árvore é estendida com um nível de paginação adicional, adicionamos 64 novas páginas
 - Podemos encontrar qualquer uma das 511 ($64 \times 7 + 63$) chaves fazendo apenas 3 seeks

8 páginas-filhas



8² páginas-filhas

FIGURE 8.12 Paged binary tree.



Eficiência da árvore paginada

- Mais realisticamente....supondo que
 - Cada página de uma árvore ocupa **8KB** e armazena **511 chaves**
 - Cada página contém uma árvore completa perfeitamente balanceada de altura 9 ($=\log_2 512$)
 - A árvore de altura 3 pode armazenar **134.217.727 chaves** ($511+(512*511)+(512*512*511)$)



Eficiência da árvore

- Eficiência na busca
 - ABB completa, **perfeitamente balanceada**: $\log_2 (N+1)$
 - **Versão paginada**: $\log_{k+1} (N+1)$
onde **N** é o número total de chaves, e **k** é o número de chaves armazenadas em uma página
 - ABB (perfeitamente balanceada): $\log_2 (134.217.727) = 27$ acessos
 - Versão paginada : $\log_{511+1} (134.217.727) = 3$ acessos



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- Preços a pagar?



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- **Preços a pagar**

- Menos *seeks*, mas maior **tempo na transmissão** de dados
- Necessário **manter a organização da árvore**
- Pense como seria a construção da árvore



Construção *Top-Down* de ABB Paginadas

- Se tivermos todas as chaves a priori:
 - Ordenar as chaves e inserir de forma a manter balanceada (mediana será a raiz, etc.)
- Se a construção for dinâmica – chaves são inseridas em ordem aleatória
 - Conforme inserimos, podemos manter a ABB de cada página balanceada (ou seja, uma AVL), rotacionando-a conforme necessário

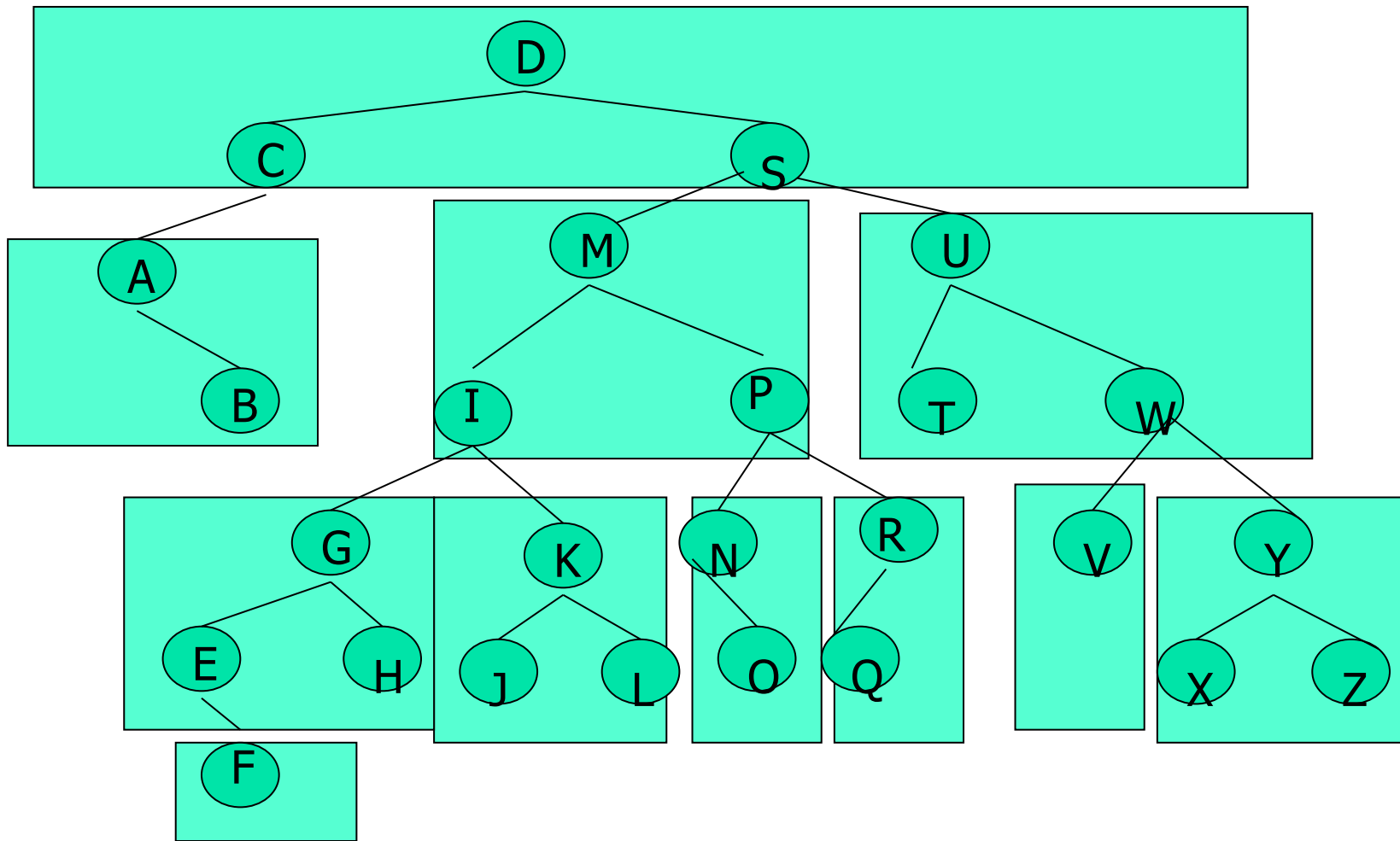


Exemplo

- Assuma:
 - uma ABB paginada com páginas de até 3 chaves por página
 - a seguinte sequência de chaves a inserir:

C S D T A M P I B W N G U R K E H O L J Y Q
Z F X V

Exemplo – árvore resultante





Exemplo

- Observe:
 - A construção *top-down* faz com que as primeiras chaves fiquem na página-raiz.
 - No exemplo, C e D (consecutivas e no início do alfabeto) não são boas escolhas para a raiz, pois fatalmente fazem a árvore tender à direita.
- E se rotacionássemos as páginas (como fazemos como os nós)?
 - Tente formular um algoritmo para isso
 - Muito complexo!



Problemas a resolver

1. Como garantir que as chaves da raiz sejam boas separadoras, tal que dividam o conjunto mais ou menos ao meio?
2. Como evitar agrupamento de certas chaves (como C, D e S) na página raiz?
3. Como garantir que cada página contenha um certo número mínimo de chaves?



A invenção das árvores-B

- Árvores-B são uma generalização da idéia de ABB paginada
 - Não são binárias
 - Conteúdo de uma página não é mantido como uma árvore
 - A construção é *bottom-up*
- Um pouco de história
 - 1972: Bayer and McCreight publicam o artigo *Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes*
 - 1979: árvores-B viram praticamente padrão em sistemas de arquivos de propósito geral



Árvore B

- Características

- Completamente balanceadas
- criação *bottom-up* (em disco)
 - nós folhas → nó raiz

- Inovação

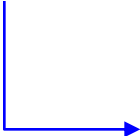
- Não é necessário construir a árvore a partir do nó raiz, como é feito para árvores em memória principal e para as árvores anteriores



Construção *Bottom-Up*

- Consequências

- Chaves “erradas” não são mais alocadas no nó raiz
 - Elimina as questões em aberto de *chaves separadoras* e de *chaves extremas*
- Não é necessário tratar o problema de desbalanceamento



na árvore-B, as chaves na raiz da árvore emergem naturalmente