Grafos: árvores geradoras mínimas

Graça Nunes

Motivação

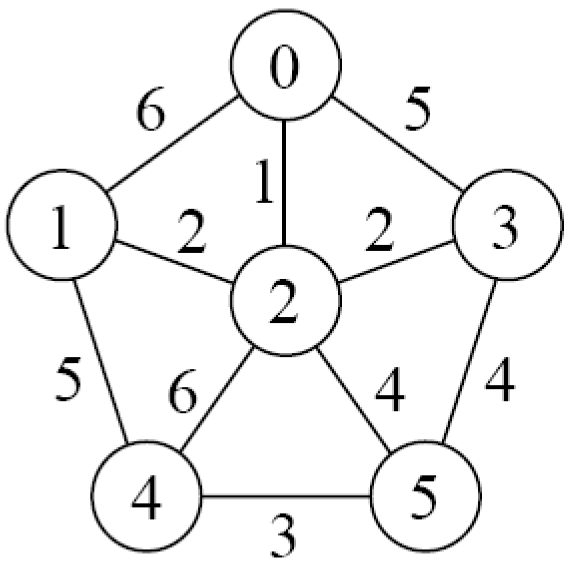
- Suponha que queremos construir estradas para interligar n cidades
  - Cada estrada direta entre as cidades i e j tem um custo associado
  - Nem todas as cidades precisam ser ligadas diretamente, desde que todas sejam acessíveis...

- Como determinar eficientemente quais estradas devem ser construídas de forma a minimizar o custo total de interligação das cidades?

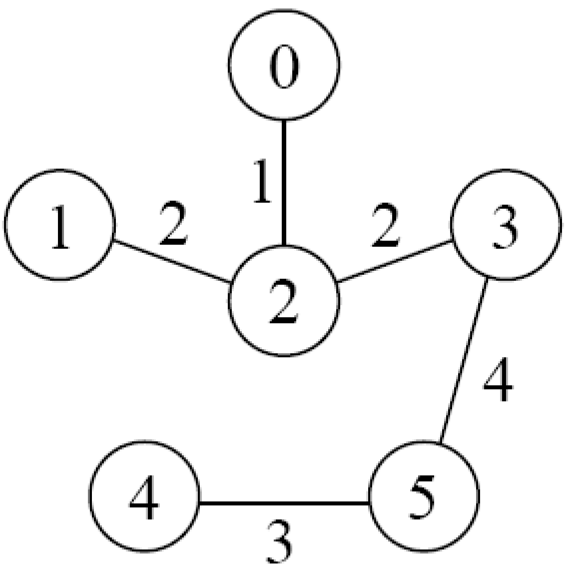
Motivação

- Exemplo

G

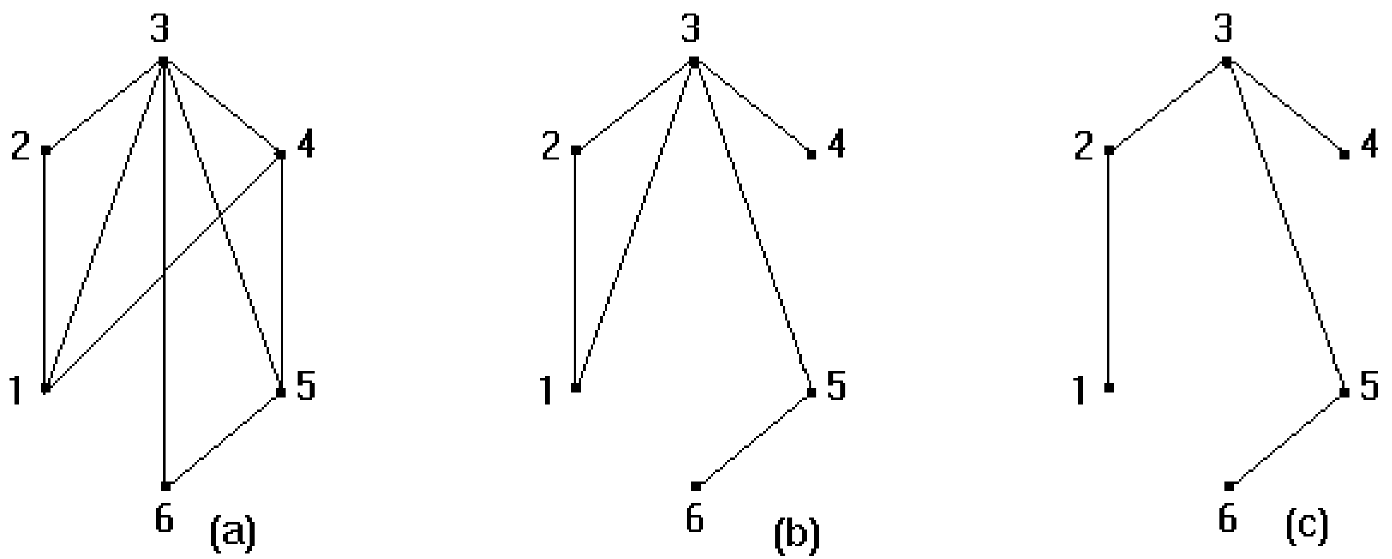


Árvore Geradora Mínima de G



Subgrafo gerador

Subgrafo Gerador ou subgrafo de espalhamento de um grafo **G1(V1,E1)** é um subgrafo **G2(V2,E2)** de **G1** tal que **V1=V2 e E2$\subseteq$E1**. Quando o subgrafo gerador é uma árvore, ele recebe o nome de árvore geradora (ou de espalhamento).



b e c são subgrafos geradores de a

c é árvore geradora de a e b

Subgrafo gerador de custo mínimo

- Formalmente
  - Dado um grafo não orientado G(V,E)
    - onde *w*: $E \rightarrow \Re^+$ define os custos das arestas
    - queremos encontrar um subgrafo gerador conexo T de G tal que, para todo subgrafo gerador conexo T´ de G
    - T é um subgrafo gerador de custo mínimo

$$\sum_{e \in T} w(e) \leq \sum_{e \in T'} w(e)$$

Árvore geradora mínima

- Claramente, o problema só tem solução se G é conexo
  - A partir de agora, assumimos G conexo
- Também não é difícil ver que a solução para esse problema será sempre uma árvore
  - Basta notar que T não terá ciclos pois, caso contrário, poderíamos obter um outro sub-grafo T´, ainda conexo e com custo menor que o de T, removendo o ciclo!

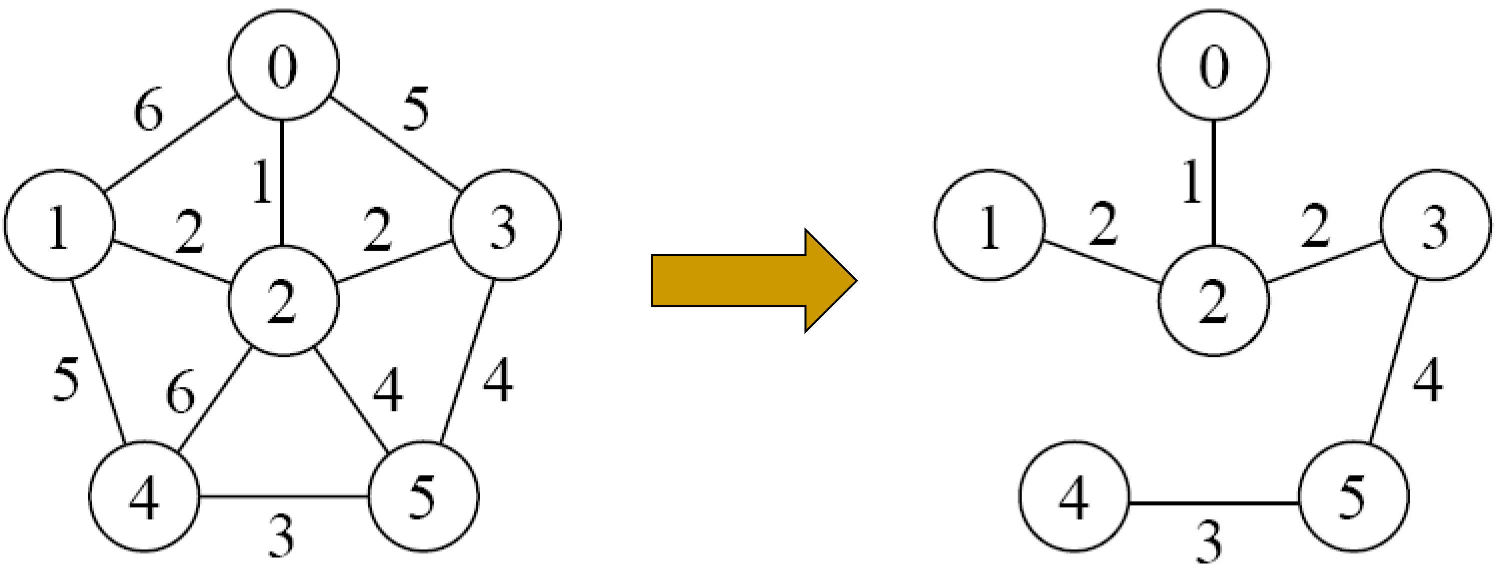
Árvore geradora mínima

- Árvore Geradora (*Spanning Tree*) de um grafo G é um subgrafo de G que contém todos os seus vértices (i.e. subgrafo gerador) e, ainda, é uma árvore

- Arvore Geradora Mínima (*Minimum Spanning Tree*, MST) é a árvore geradora de um grafo valorado cuja soma dos pesos associados às arestas é mínimo, i.e., é uma árvore geradora de custo mínimo

Árvore geradora mínima

- Exemplo



Árvore geradora mínima

- Como encontrar a árvore geradora mínima de um grafo G ?
  - Algoritmo genérico
  - Algoritmo de Prim
  - Algoritmo de Kruskal

Árvore geradora mínima

Algoritmo Genérico

```
procedimento genérico(G)
A = ∅
enquanto A não define uma árvore
    encontre uma aresta (u,v) segura para A
    A = A ∪ {(u,v)}
retorna A
```

G conexo, não direcionado, ponderado

A – conjunto de arestas

Abordagem 'gulosa' -> adiciona uma aresta segura a cada rodada

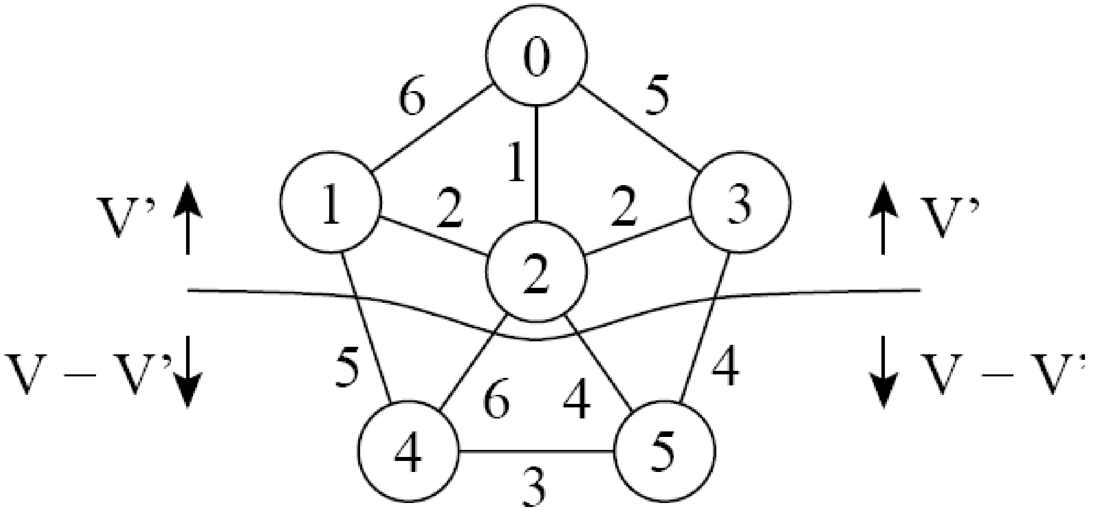
Aresta é 'segura' se mantém a condição de que, antes de cada iteração, A é uma árvore geradora mínima de um subconjunto de vértices

Árvore geradora mínima

- Alguns conceitos

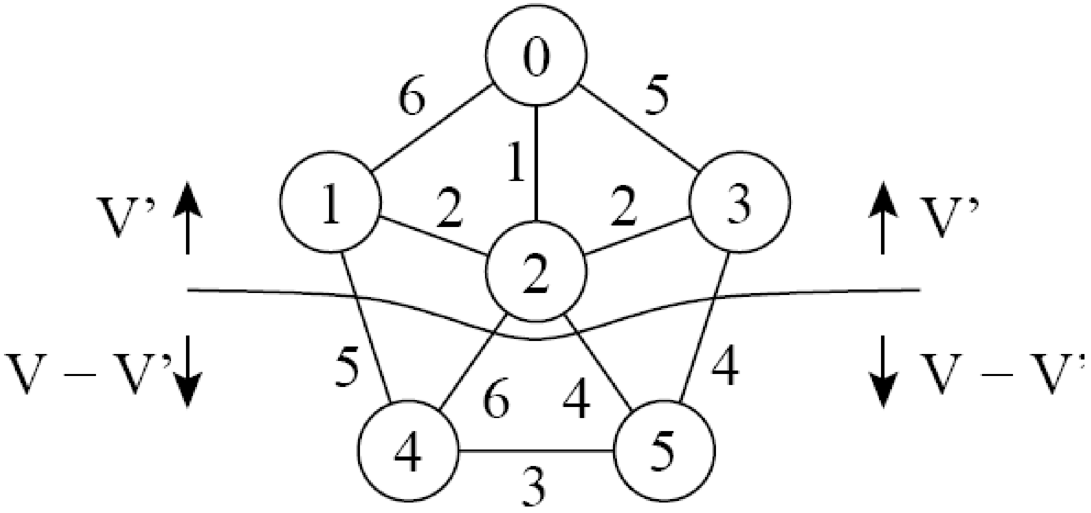
  - Um corte (V’; V-V’) de um grafo não direcionado G=(V;A) é uma partição de V

  - Uma aresta (u,v) cruza o corte se um vértice pertence a V’ e o outro a V-V’



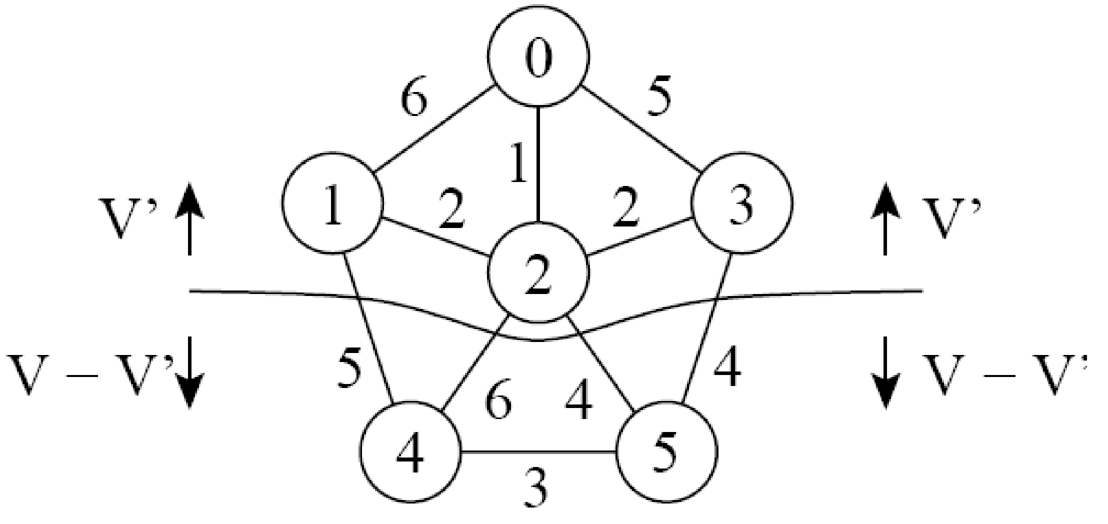
Árvore geradora mínima

- Alguns conceitos
  - Um corte *respeita* um conjunto S de arestas se não existirem arestas em S que o cruzem
  - Uma aresta cruzando o corte que tenha custo mínimo em relação a todas as arestas cruzando o corte é uma *aresta leve*



Árvore geradora mínima

- Exemplo



- Se S é uma árvore geradora mínima de um grafo e há um corte (V';V-V') que respeita S, a aresta leve (u,v) é uma aresta segura para S

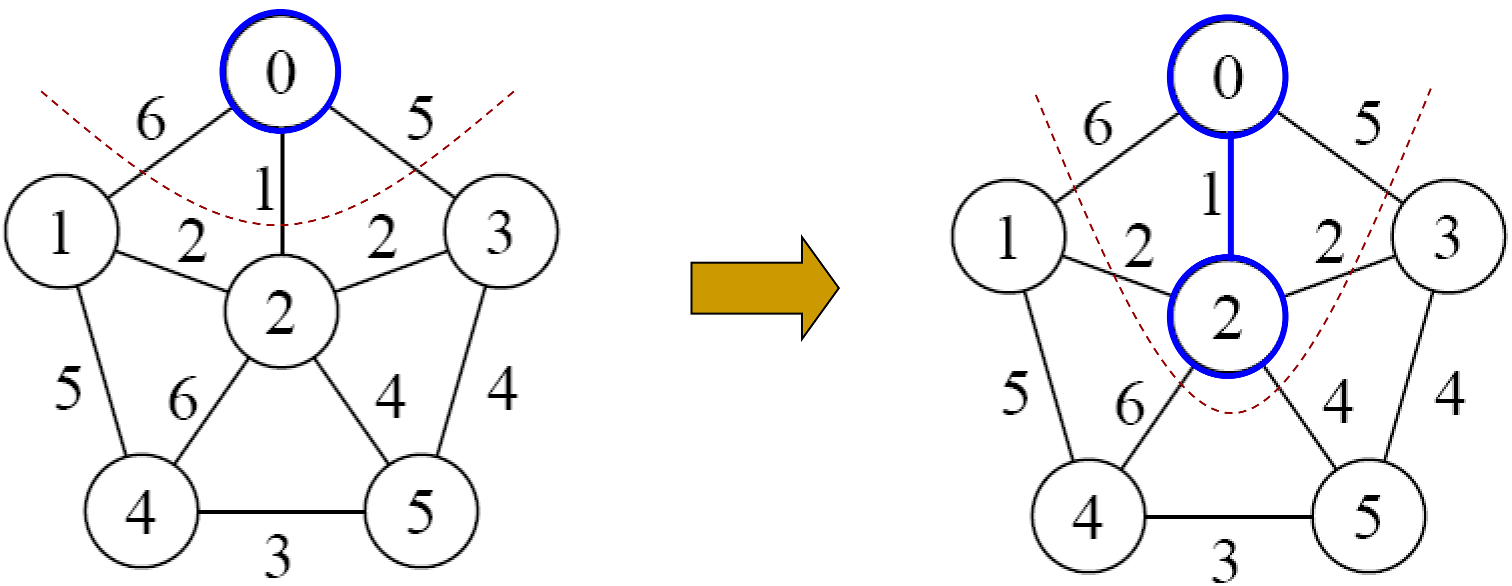
Algoritmo de Prim

```
procedimento Prim(G)

escolha um vértice s para iniciar a árvore

enquanto há vértices que não estão na árvore
selecione uma aresta segura
insira a aresta e seu vértice na árvore
```

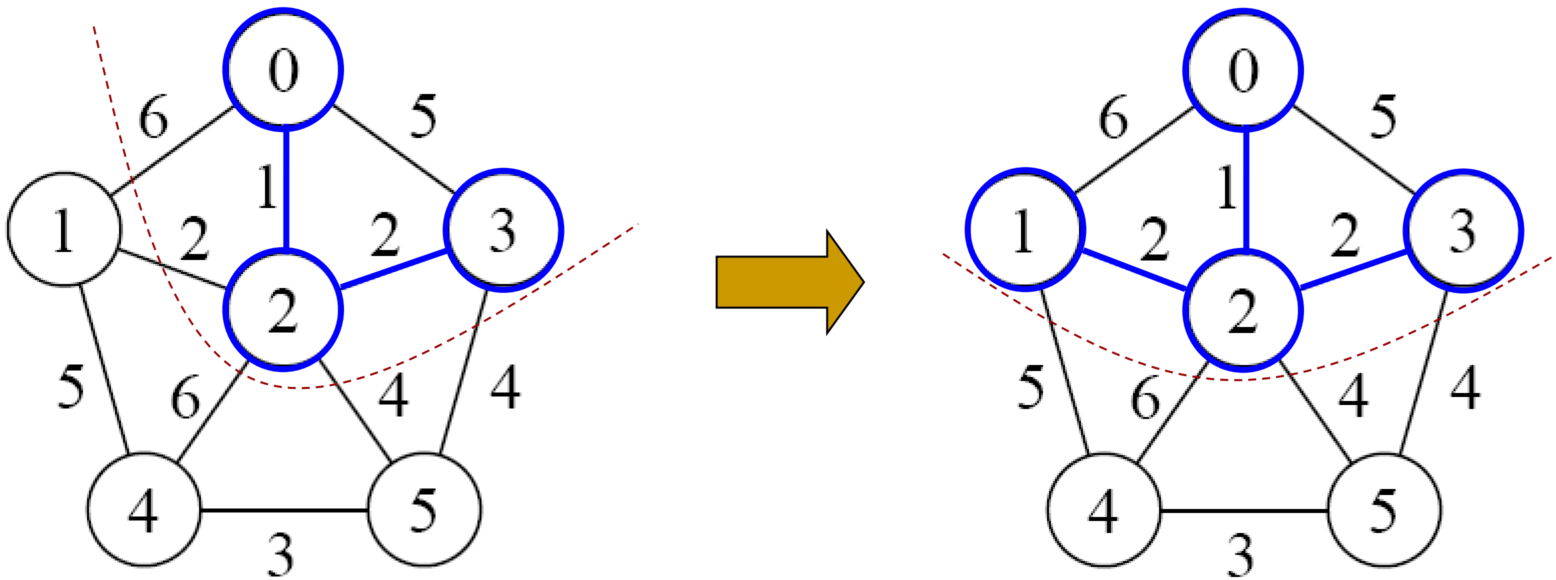
Ponto importante do algoritmo: seleção de uma aresta segura

Algoritmo de Prim

- Exemplo: iniciando o algoritmo pelo vértice 0

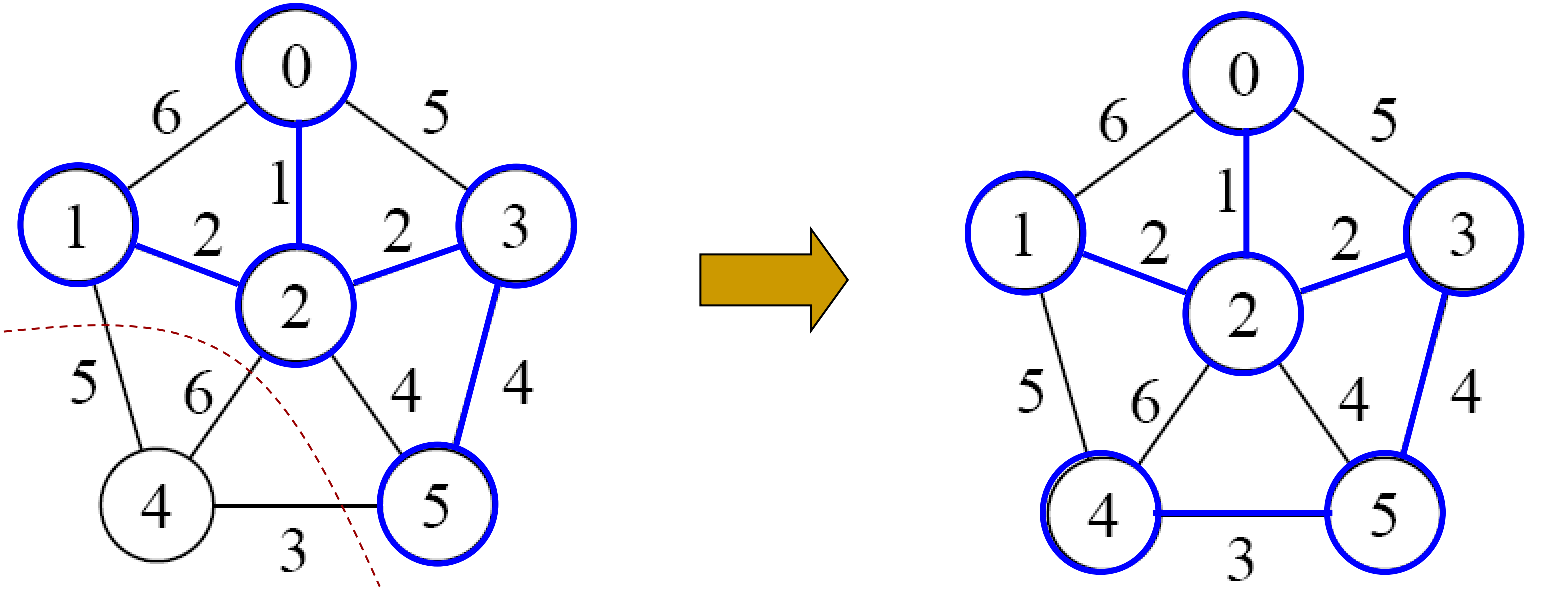


Algoritmo de Prim



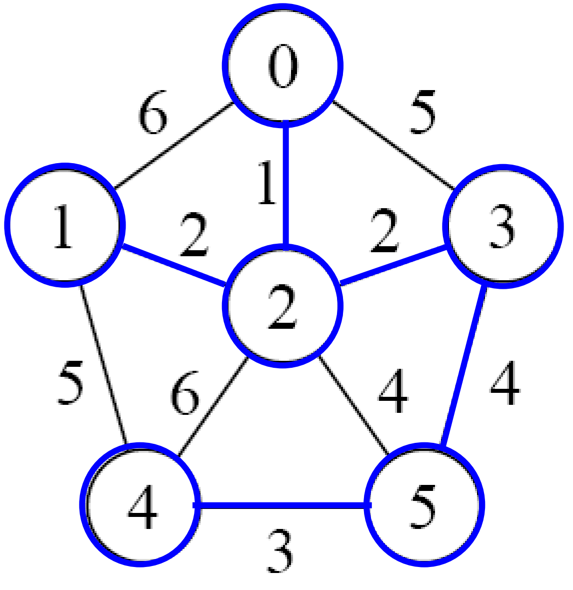
Algoritmo de Prim

Árvore geradora mínima

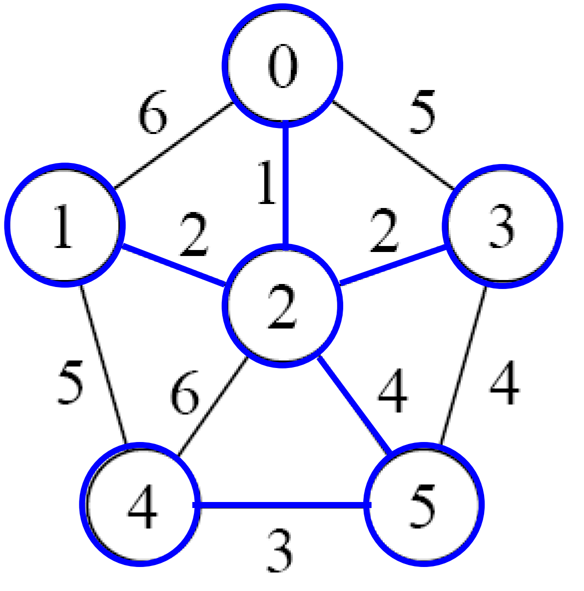


Algoritmo de Prim

- Há mais de uma árvore geradora mínima para um mesmo grafo



ou



Algoritmo de Prim

- Maneira mais eficiente de determinar a aresta segura
  - Manter todas as arestas que ainda não estão na árvore em fila(s) de prioridade (heaps)
    - Prioridade é dada à aresta de menor peso adjacente a um vértice na árvore e outro fora dela
- Complexidade de tempo:
  - Com o uso de uma lista sequencial de arestas, pesquisada para selecionar a aresta segura de custo mínimo: |A|
  - Uso de uma heap: log |A|
  - Total de |V| vértices ➔ O(|V| |A|) ou O(|V| log |A|)

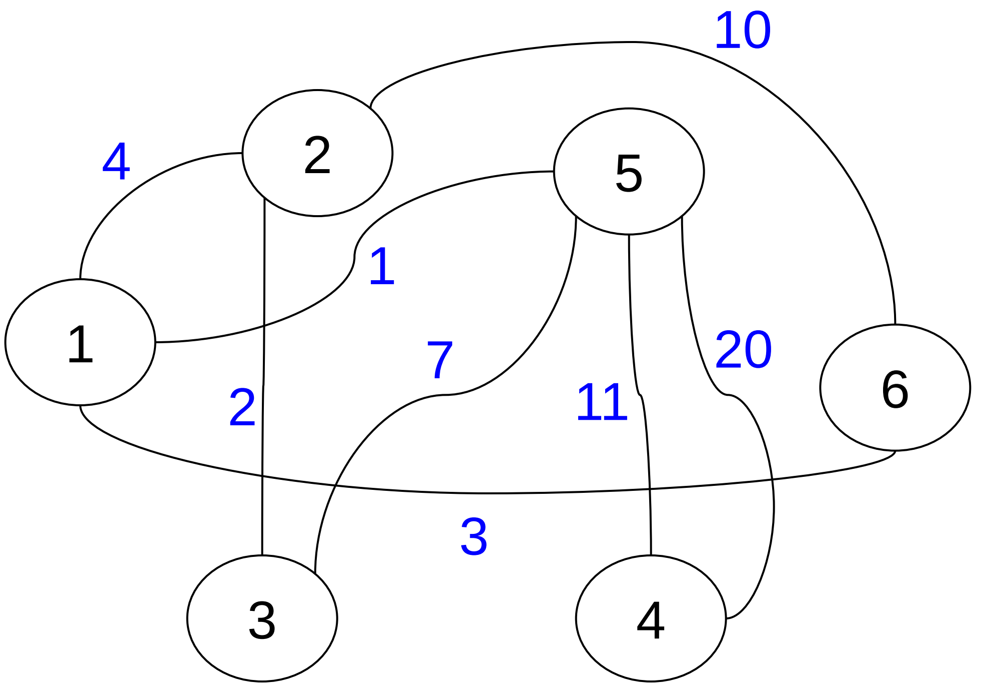
Algoritmo de Kruskal

- Também encontra árvore geradora mínima em tempo análogo
- Pode ser usado para florestas
  - Constrói a árvore acrescentando arestas;
  - Não parte de um nó específico

Verifique na literatura!

Árvore geradora mínima

- Exercício: encontre uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo utilizando o algoritmo de Prim (e o de Kruskal)



Árvore geradora mínima

- Exercício
  - Implementação em C de sub-rotina para encontrar uma árvore geradora mínima para um grafo (algoritmo de Prim)
    - Decida como buscar as arestas seguras
      - Lembre-se: essa busca deve ser eficiente!