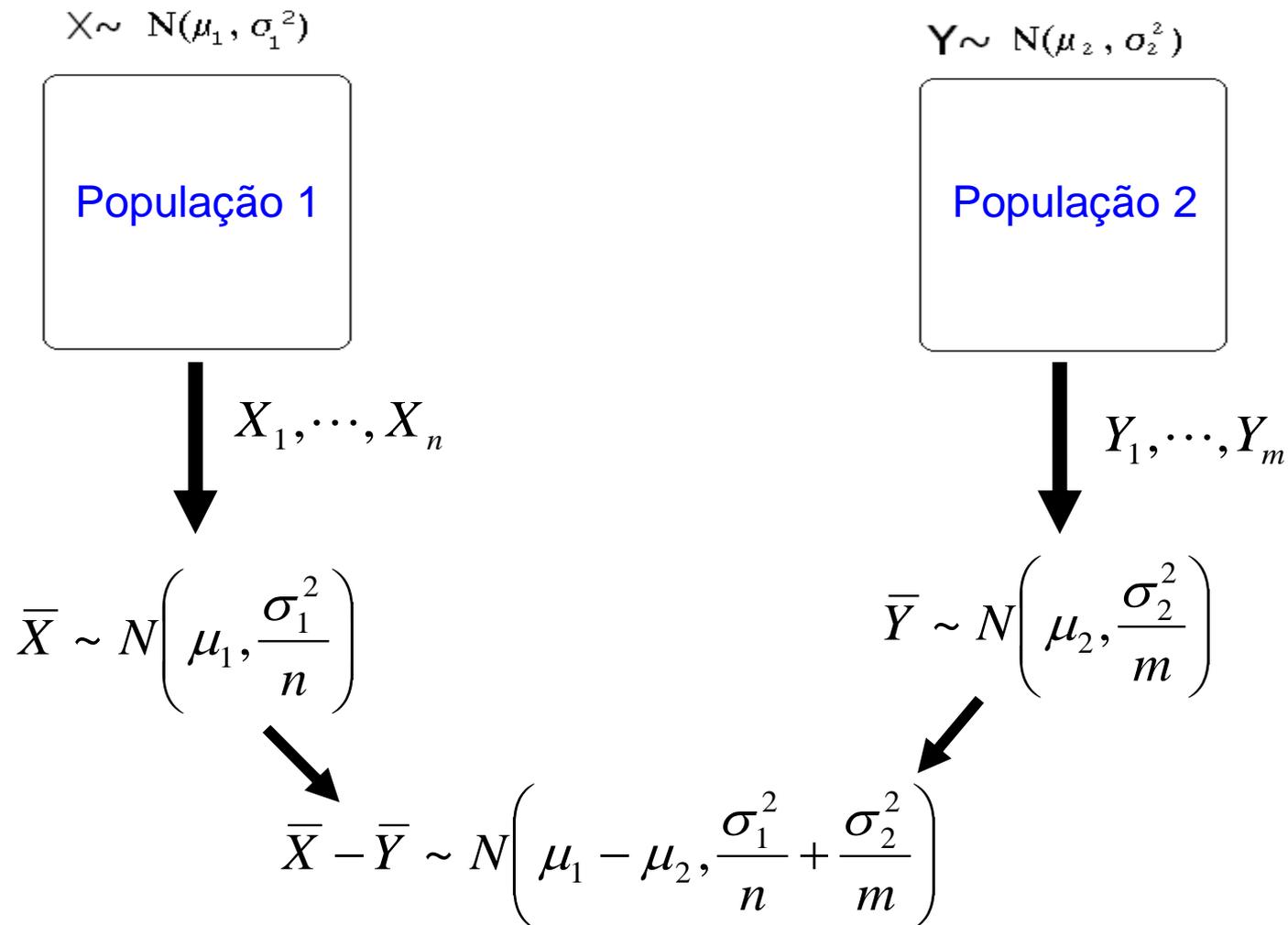




8. INFERÊNCIA PARA DUAS POPULAÇÕES

2011

8.1. Populações independentes com distribuição normal



Obs. Se a distribuição de X e/ou Y não for normal, os resultados são válidos **aproximadamente**.

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição normal com média μ_1 e variância σ_1^2 .

Y_1, \dots, Y_m é uma amostra aleatória de tamanho m de uma população com distribuição normal com média μ_2 e variância σ_2^2 .

As duas populações são **independentes**.

(i) Formulação das hipóteses:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$$

À esquerda

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$$

À direita

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0,$$

Bilateral

sendo que Δ_0 é uma constante conhecida (**valor de teste**). $\Delta_0 = 0$ corresponde à **igualdade** das duas médias.

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

(ii) Estatística de teste

(a) σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas: $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1).$

(b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ desconhecida:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n+m-2}, \quad (\text{distribuição t de Student com } n + m - 2 \text{ g.l.})$$

em que $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ é a **variância combinada** (*pooled variance*),

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{e} \quad S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2.$$

(c) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, ambas desconhecidas:

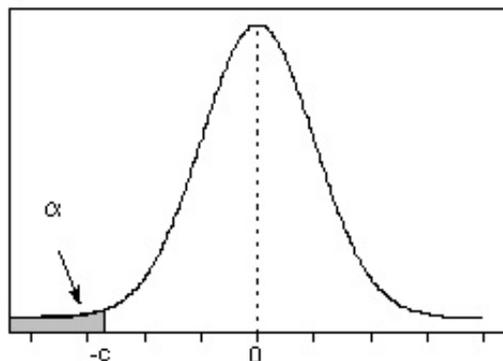
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_g, \quad \text{aproximadamente,}$$

$$\text{em que } g = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m} \right)^2}{\frac{(S_1^2/n)^2}{n-1} + \frac{(S_2^2/m)^2}{m-1}}.$$

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

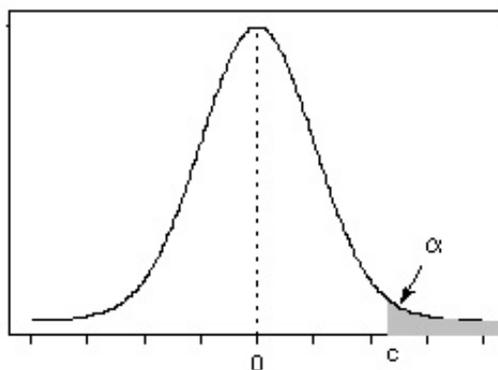
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$$



$$R_c^{(Z)} = \{Z < -c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T < -c\}$$

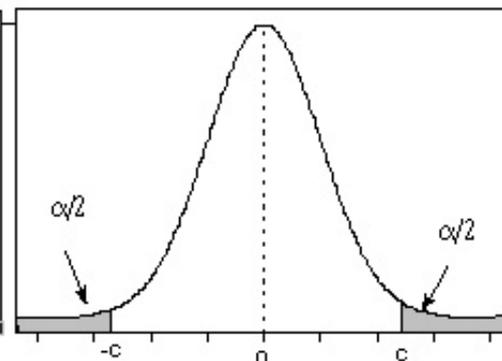
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$$



$$R_c^{(Z)} = \{Z > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T > c\}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$$



$$R_c^{(Z)} = \{|Z| > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{|T| > c\}$$

(iv) Se $Z \in R_C$ ou $T \in R_C$, rejeita-se H_0 ; caso contrário, não se rejeita H_0 .

Obs. Nas regiões críticas com Z e T o valor de c não é o mesmo.

IC para $\mu_1 - \mu_2$

Estimador pontual para $\mu_1 - \mu_2$: $\bar{X} - \bar{Y}$.

De forma análoga ao Cap. 7, um intervalo de confiança (IC) de $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ é dado por

$$\text{IC} = [L; U] = [\bar{X} - \bar{Y} - E; \bar{X} - \bar{Y} + E],$$

sendo que E é o erro máximo do IC.

(a) σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas: $E = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$.

(b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ desconhecida: $E = t_{\alpha/2, n+m-2} \times S_p \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$.

(c) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, ambas desconhecidas: $E = t_{\alpha/2, g} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}$.

Cálculo de g na lâmina 4.

IC para $\mu_1 - \mu_2$ e testes de hipóteses

O teste da hipótese $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ contra $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ a um nível de significância α pode ser efetuado utilizando um IC com coeficiente de confiança igual a $1 - \alpha$.

Construímos o IC de $100(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$, dado por

$$[L; U] = [\bar{X} - \bar{Y} - E; \bar{X} - \bar{Y} + E],$$

sendo que no cálculo do erro máximo (E) utilizamos a lâmina 6.

Se $\Delta_0 \notin \text{IC}$, rejeitamos H_0 ; caso contrário, não rejeitamos H_0 .

8.2. Populações dependentes com distribuição normal

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

População 1

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

População 2

Pares : $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$.

Diferença: $D = X - Y$ com $\mu_D = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_1 - \mu_2$ e $\text{var}(D) = \sigma_D^2$.

Calculamos $D_1 = X_1 - Y_1, \dots, D_n = X_n - Y_n$,

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = \bar{X} - \bar{Y} \text{ e } s_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2.$$

Distribuição: $\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$.

Obs. Se a distribuição de D não for normal, o resultado é válido **aproximadamente**.

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

D_1, \dots, D_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição normal com média μ_D e variância σ_D^2 .

(i) Formulação das hipóteses:

$$H_0 : \mu_D = \Delta_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu_D < \Delta_0}$$

À esquerda

$$H_0 : \mu_D = \Delta_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu_D > \Delta_0}$$

À direita

$$H_0 : \mu_D = \Delta_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu_D \neq \Delta_0,}$$

Bilateral

sendo que Δ_0 é uma constante conhecida (**valor de teste**). $\Delta_0 = 0$ corresponde à **igualdade** das duas médias ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$).

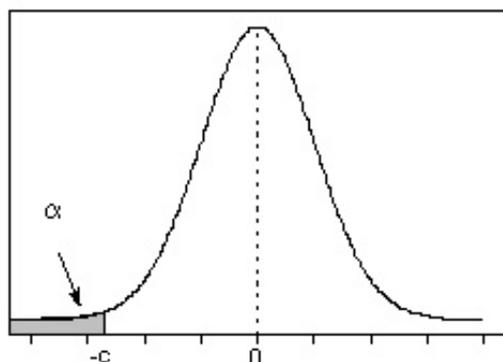
(ii) Estatística de teste:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \Delta_0)}{s_D} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}. \quad (\text{distribuição t de Student com } n - 1 \text{ g.l.})$$

Testes de hipóteses sobre $\mu_1 - \mu_2$

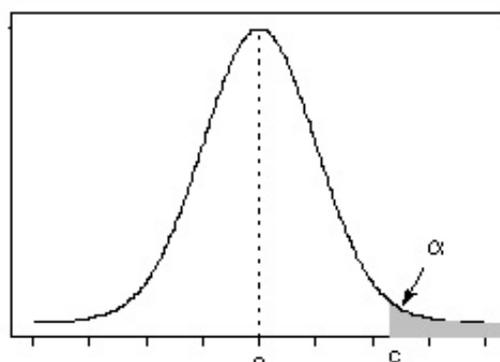
(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

$$H_1: \mu_D < \Delta_0$$



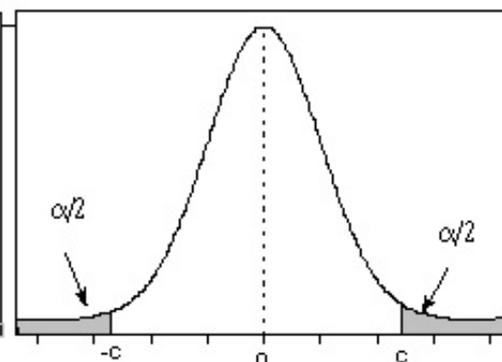
$$R_c = \{T < -c\}$$

$$H_1: \mu_D > \Delta_0$$



$$R_c = \{T > c\}$$

$$H_1: \mu_D \neq \Delta_0$$



$$R_c = \{|T| > c\}$$

(iv) Se $T \in R_c$, rejeita-se H_0 ; caso contrário, não se rejeita H_0 .

Obs. Conhecido como teste t pareado ou emparelhado (*paired t test*).

IC para $\mu_1 - \mu_2$

Estimador pontual para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$: $\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$.

De forma análoga ao Cap. 7, um intervalo de confiança (IC) de $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ é dado por

$$\text{IC} = [L; U] = [\bar{D} - E; \bar{D} + E],$$

sendo que E é o erro máximo do IC:

$$E = t_{\alpha/2, n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}}.$$

IC para $\mu_1 - \mu_2$ e testes de hipóteses

O teste da hipótese $H_0: \mu_D = \Delta_0$ contra $H_1: \mu_D \neq \Delta_0$ a um nível de significância α pode ser efetuado utilizando um IC com coeficiente de confiança igual a $1 - \alpha$.

Construímos o IC de $100(1-\alpha)\%$ para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$, dado por

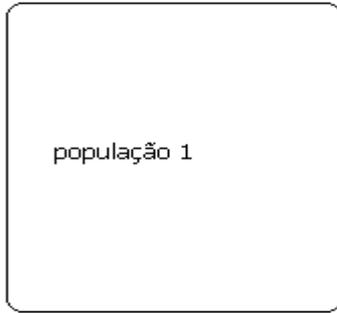
$$[L; U] = [\bar{D} - E; \bar{D} + E],$$

sendo que no cálculo do erro máximo (E) utilizamos a lâmina 11.

Se $\Delta_0 \notin \text{IC}$, rejeitamos H_0 ; caso contrário, não rejeitamos H_0 .

8.3. Populações independentes com distribuição Bernoulli

Bernoulli(p_1)



X_1, \dots, X_n

$$\bar{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right), \text{ aproximadamente.}$$

Bernoulli(p_2)



Y_1, \dots, Y_m

$$\bar{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right), \text{ aproximadamente.}$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right), \text{ aproximadamente,}$$

em que $\bar{p}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $\bar{p}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$ são as proporções amostrais de sucesso.

Testes de hipóteses sobre $p_1 - p_2$

X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso p_1 .

Y_1, \dots, Y_m é uma amostra aleatória de tamanho m de uma população com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso p_2 .

As duas populações são **independentes**.

(i) Formulação das hipóteses:

$$\begin{array}{ccc} H_0 : p_1 = p_2 & H_0 : p_1 = p_2 & H_0 : p_1 = p_2 \\ \underbrace{H_1 : p_1 < p_2}_{\text{À esquerda}} & \underbrace{H_1 : p_1 > p_2}_{\text{À direita}} & \underbrace{H_1 : p_1 \neq p_2}_{\text{Bilateral}} \end{array}$$

(ii) Estatística de teste:

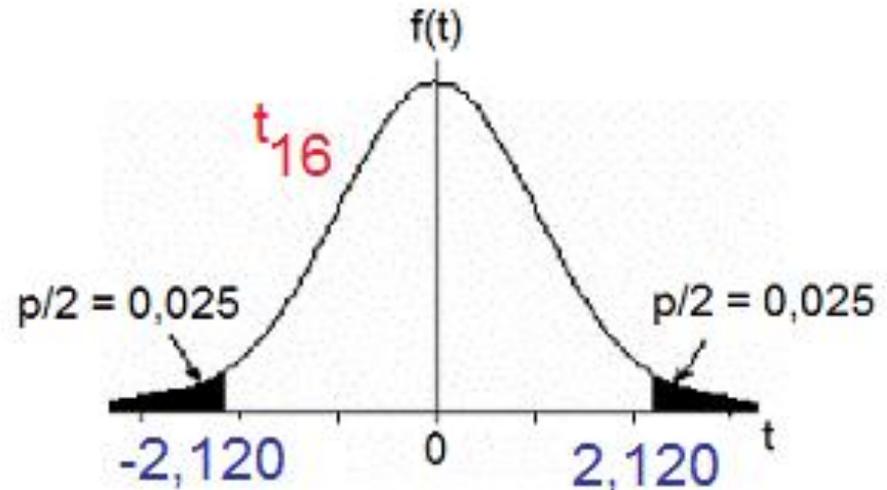
$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \text{ aproximadamente,}$$

$$\text{em que } \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i}{n+m} = \frac{n\bar{p}_1 + m\bar{p}_2}{n+m}.$$

Exemplo 1

A região crítica para $\alpha = 0,05$ é obtida consultando a tabela da distribuição t de Student com $g = 16$ g.l.:

$$R_c = \{ |T| > 2,120 \}.$$



Calculamos

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} = \frac{30,82 - 30,63}{\sqrt{\frac{0,0142}{12} + \frac{0,0290}{10}}} = 2,972.$$

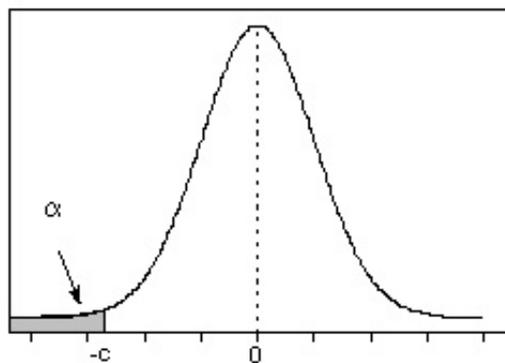
Como $|T| = 2,972 \in R_c$, rejeitamos H_0 .

Conclusão. De acordo com os dados coletados e com um nível de significância de 5%, verificamos que **há** diferença entre os volumes médios envasados pelas duas máquinas.

Testes de hipóteses sobre $p_1 - p_2$

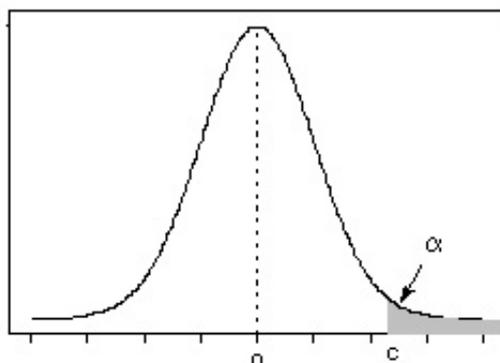
(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

$$H_1: p_1 < p_2$$



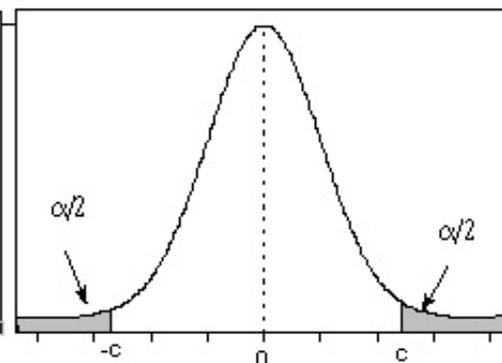
$$R_c = \{Z < -c\}$$

$$H_1: p_1 > p_2$$



$$R_c = \{Z > c\}$$

$$H_1: p_1 \neq p_2$$



$$R_c = \{|Z| > c\}$$

(iv) Se $Z \in R_c$, rejeita-se H_0 ; caso contrário, não se rejeita H_0 .

IC para $p_1 - p_2$

Estimador **pontual** para $p_1 - p_2$: $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$.

De forma análoga ao Cap. 7, um intervalo de confiança (IC) **aproximado** de $100(1 - \alpha)\%$ para $p_1 - p_2$ é dado por

$$\text{IC} = [L; U] = [\bar{p}_1 - \bar{p}_2 - E; \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + E],$$

sendo que E é o **erro máximo** do IC:

$$E = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1 - \bar{p}_1)}{n} + \frac{\bar{p}_2(1 - \bar{p}_2)}{m}}.$$

IC para $p_1 - p_2$ e testes de hipóteses

O teste da hipótese $H_0: p_1 = p_2$ contra $H_1: p_1 \neq p_2$ a um nível de significância α pode ser efetuado utilizando um IC com coeficiente de confiança igual a $1 - \alpha$.

Construímos o IC de $100(1-\alpha)\%$ para $p_1 - p_2$, dado por

$$[L; U] = [\bar{X} - \bar{Y} - E; \bar{X} - \bar{Y} + E],$$

sendo que no cálculo do erro máximo (E) utilizamos a lâmina 16.

Se $0 \notin \text{IC}$, rejeitamos H_0 ; caso contrário, não rejeitamos H_0 .

Exemplo 1

Duas máquinas são utilizadas para envasar um líquido em frascos de plástico. Com o objetivo de verificar se há diferença entre os volumes médios envasados, duas amostras de 12 e 10 frascos foram selecionadas. Os volumes (em ml) foram medidos resultando nos seguintes valores :

Máquina 1: 30,9, 30,9, 30,8, 30,7, 30,9, 30,6, 30,8, 30,9, 30,7, 30,9, 30,7 e 31,0;

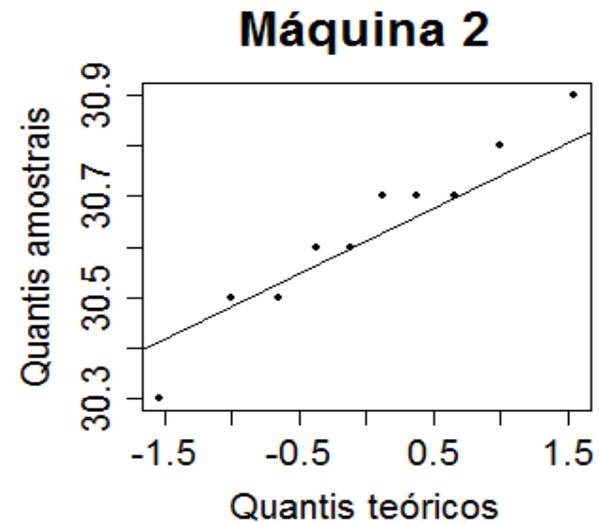
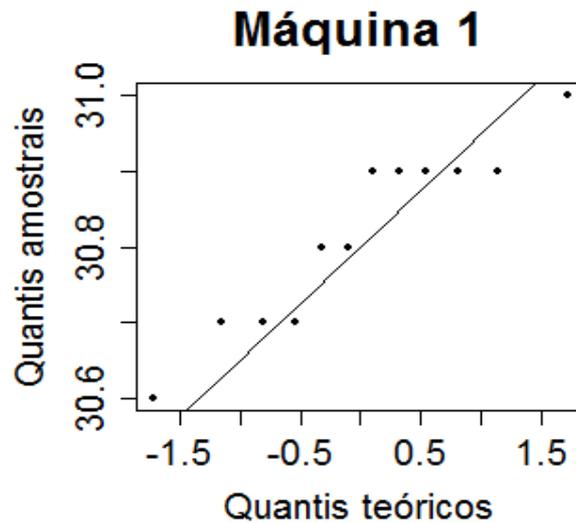
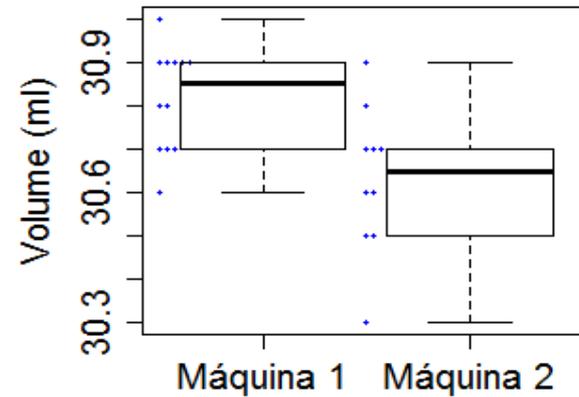
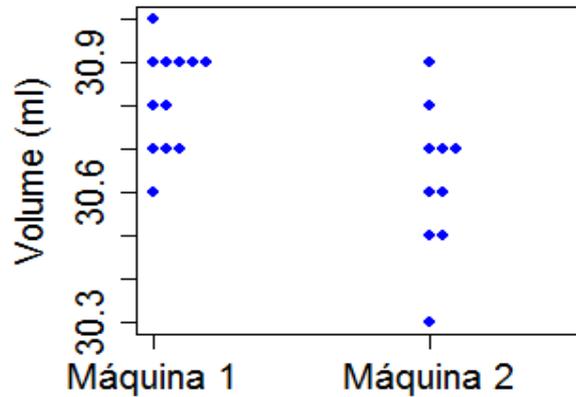
Máquina 2: 30,8, 30,9, 30,7, 30,5, 30,5, 30,6, 30,7, 30,3, 30,6 e 30,7.

Utilizando os dados coletados, qual o resultado da verificação. Adote $\alpha = 5\%$.

Solução:

Exemplo 1

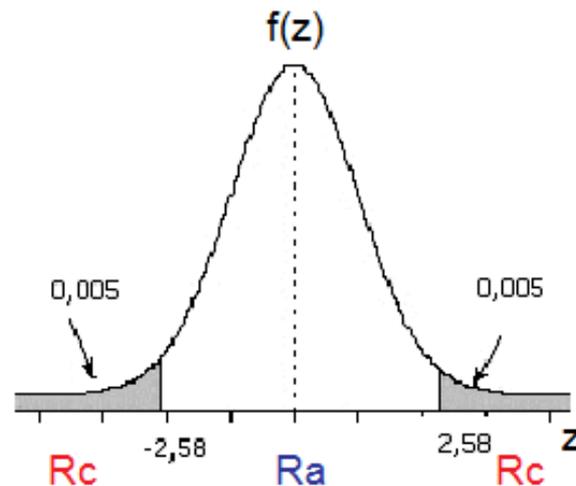
Análise exploratória:



Exemplo 2

Dois tipos de solução de polimento estão sendo avaliados para possível uso na fabricação de lentes intra-oculares. Trezentas lentes foram polidas usando a primeira solução de polimento e, desse número 217 não apresentaram defeitos causados pelo polimento. Outras 250 lentes foram polidas usando a segunda solução de polimento, sendo que 162 lentes foram consideradas satisfatórias. Há motivo para acreditar que as duas soluções diferem quanto aos defeitos causados quando usadas em polimentos? Adote $\alpha = 0,01$.

Solução:



8.4. Probabilidade de significância (valor-p)

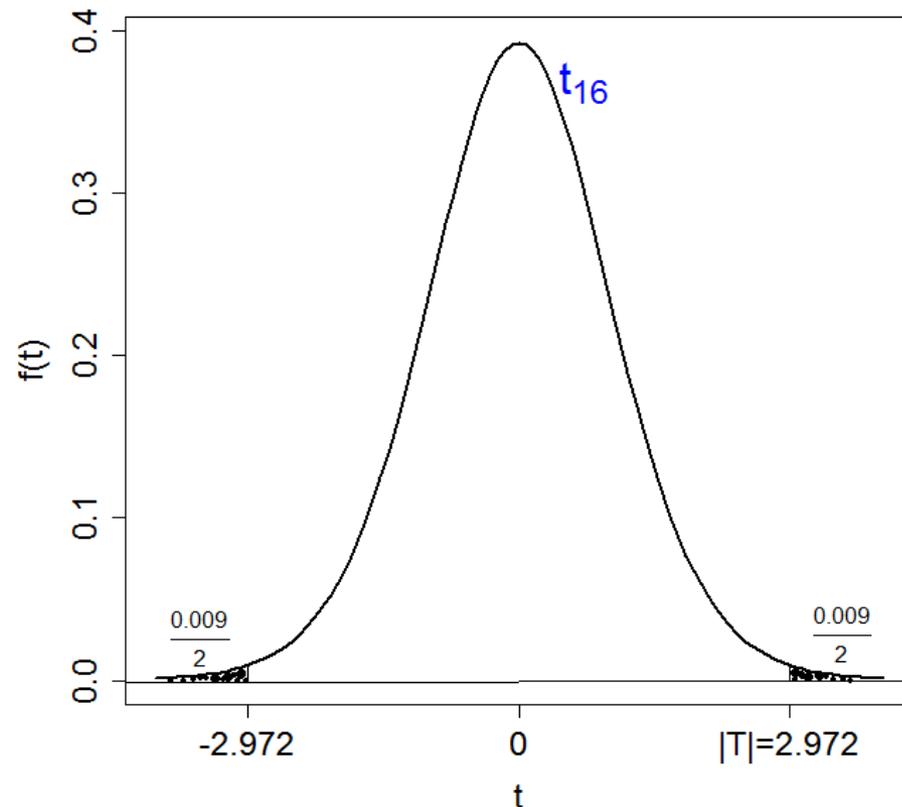
No exemplo 1 (lâmina 18) a região crítica é da forma $R_c = \{|T| > c\}$, sendo que, se H_0 for verdadeira, T tem distribuição t de Student com 16 g.l. Com os dados coletados calculamos

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} = 2,972.$$

Se adotarmos $c = |T| = 2,972$ obtemos $R_c = \{|T| > 2,972\}$ e a probabilidade do erro tipo I é $P(|T| > 2,972; H_0 \text{ verdadeira}) = P(|T| > 2,972; \mu_1 = \mu_2) = 0,0090 = 0,9\%$.

Em Excel: =DISTT(2,972; 16; 2).

0,0090 é chamado de probabilidade de significância, nível descritivo, valor-p (*p-value*) ou *p*.



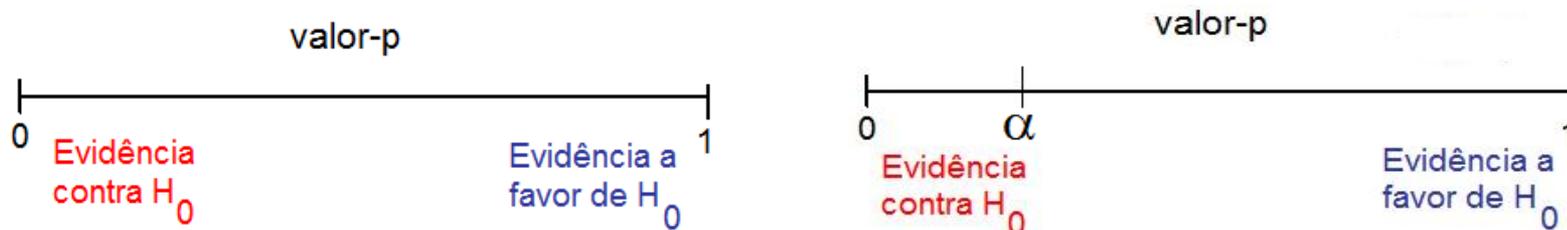
8.4. Probabilidade de significância (valor-p)

Como o nível de significância é a probabilidade de um **erro tipo I** (rejeição de H_0 verdadeira), quanto **menor** for **valor-p**, **mais fortemente rejeitamos** H_0 .

Quanto **menor** for **valor-p**, **mais evidência contra** H_0 (e vice-versa).

No exemplo 2 (lâmina 22) a região crítica é da forma $R_c = \{|Z| > c\}$, sendo que Z tem distribuição $N(0,1)$, se H_0 for verdadeira. Com os dados coletados calculamos $|Z| = 1,90$.

Neste caso, $\text{valor-p} = P(|Z| > 1,90) = 2 \times P(Z < -1,90) = 2 \times 0,0287 = 0,0574$.



Escolhemos o nível de significância (α). Calculamos o valor-p. Se $\text{valor-p} < \alpha$, **rejeitamos** H_0 ; se $\text{valor-p} \geq \alpha$, **não rejeitamos** H_0 .

No exemplo 2, se $\alpha = 5\%$ o resultado do teste seria **inconclusivo**.

Exemplo 3

Em um teste de dureza uma esfera de aço é pressionada contra a superfície de um bloco de material a uma carga padrão. Mede-se o diâmetro (em mm) da cavidade produzida, que está relacionado à dureza do material da superfície. Na realização do teste **duas** esferas (A e B) estão disponíveis. Suspeita-se que a esfera A gera cavidades com **diâmetro** médio com **diferença superior** a **0,2** mm em relação à esfera B.

As duas esferas foram utilizadas em 10 blocos ($n = 10$) obtendo-se os dados abaixo:

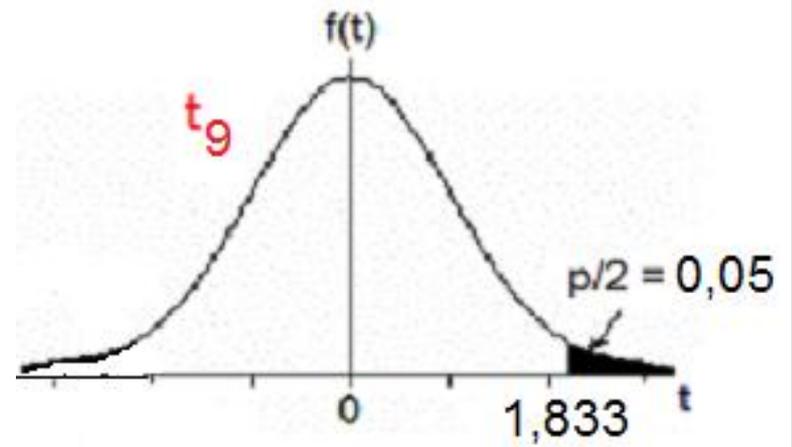
Diâmetro das cavidades (mm)										
Esfera	Bloco									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	7,5	4,6	5,7	4,3	5,8	3,2	6,1	5,6	3,4	6,5
B	5,2	4,1	4,3	4,7	3,2	4,9	5,2	4,4	5,7	6,0
Diferença	2,3	0,5	1,4	-0,4	2,6	-1,7	0,9	1,2	-2,3	0,5

O que os dados permitem concluir sobre a suspeita formulada?

Adote $\alpha = 5\%$.

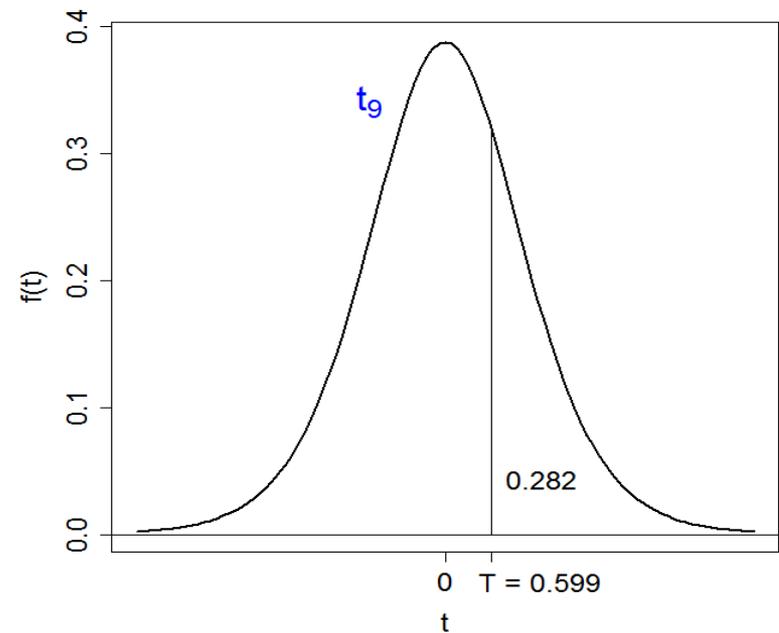
Exemplo 3

Solução:



Exemplo 3

Obs. $R_c = \{ T > c \}$, sendo que, se H_0 for verdadeira, T tem distribuição t de Student com 9 g.l..



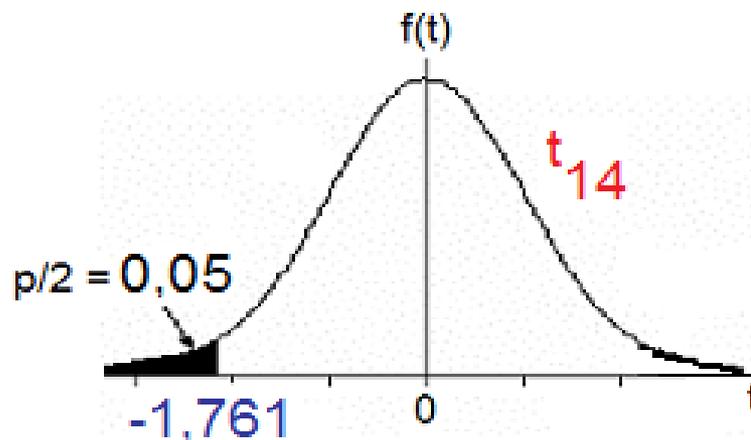
Exemplo 4

Estudos anteriores indicam que a vida (em horas) de um termopar produzido em uma indústria é uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal. Um grande comprador suspeita que o tempo de vida médio é inferior a 560 h.

Em uma amostra aleatória de 15 termopares adquiridos foram medidos os tempos de vida (em h) 553, 552, 567, 579, 550, 541, 537, 553, 552, 546, 538, 553, 581, 539 e 529.

O que os dados permitem concluir sobre a suspeita do comprador?
Adote $\alpha = 5\%$.

Solução:

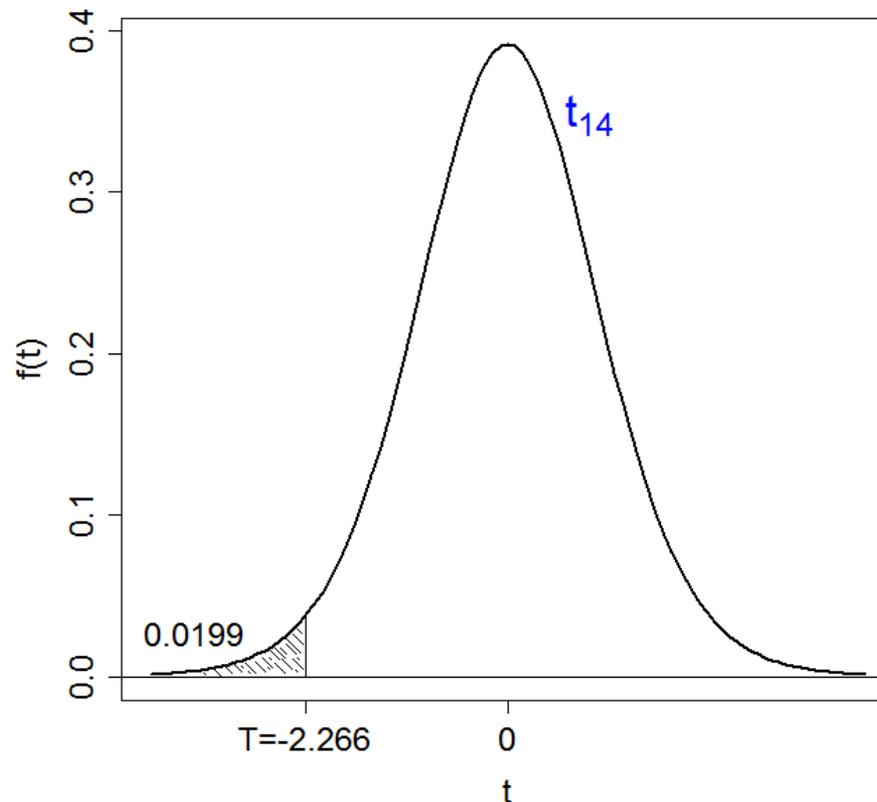


Exemplo 4

Obs. $R_c = \{ T < -c \}$, sendo que T tem distribuição t de Student com 14 g.l., se H_0 for verdadeira.

Neste caso, $\text{valor-p} = P(T < -2,266) = 0,0199$. Rejeitamos H_0 , pois $\text{valor-p} < \alpha$.

Em Excel: `=DISTT(2,266; 14; 1)`.



Exemplo 5

Heim & Peng (2010), The impact of information technology use on plant structure, practices, and performance: An exploratory study, *Journal of Operations Management* 26, 144 – 162.

This study examines the **impact** of information technology (IT) use on the structure, practices, and performance of manufacturing plants.

O impacto de uma variável sobre outra é quantificado por um **coeficiente** (b).

É de interesse verificar a **significância** do coeficiente ($H_0: b = 0$ versus $H_1: b \neq 0$). Em um primeiro momento não é necessário saber que teste foi utilizado.

Resultados. SPC has a **marginally positive** association with the total number of plant employees ($b = 0.126$, $p = 0.080$) and with plant sales ... ($b = 0.161$, $p = 0.074$). The SPC variable is not significantly related to any of the productivity measures at the **0.10 level**.

Ou seja, $\alpha = 10\%$ (estudo **exploratório**). Se o problema envolvesse a comparação de dois métodos de medição em que se pretende substituir um dos métodos por outro melhor, o nível de significância seria menor.

SPC is negatively related to willingness to introduce new products ($b = -0.393$, **$p = 0.000$**) .

Integration intelligence only exhibits a **weak** positive relationship with developing unique practices ($b = 0.012$, **$p = 0.077$**).