$4^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE II - SME0801

Professora Juliana Cobre

Entregar Exercício 10

Exercício 1. Numa empresa com 100 funcionários, o número médio de usuários simultâneos de Internet, num certo período do dia, é de aproximadamente 30. Atualmente existem 30 linhas telefônicas disponíveis para conexão. Deseja-se avaliar a necessidade de aumentar esse número. Calcule valores máximos de probabilidade em função do número mínimo de usuários conectados simultaneamente (tomar $n = 30, 40, 50, 60, 70, 90$).

Exercício 2. Seja X uma variável aleatória qualquer e g uma função não negativa tal que $g(X)$ é variável aleatória e $E(g(X)) < \infty$. Se $g(x) \geq b > 0$ sempre que $x \geq a$. Mostre que $P(X \geq a) \leq \mathrm{E}[g(X)]/b$.

Exercício 3. Seja $X \sim$ Bernoulli(p).

(a) Determine a função característica de X.

(b) Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de X, sabe-se que $S_n = X_1, \ldots, X_n \sim$ Binomial(n, p). Utilize o item (a) para provar que a função característica de S_n é $\varphi_{S_n}(t) = (p\mathrm{e}^{it} + q)^n$, $\forall t \in R$.

Exercício 4. Seja $X \sim$ Bernoulli(p).

(a) Se $X \sim N(0,1)$ prove que a função característica de X é $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}, t \in R$. Sugestão $\int_{-\infty-it}^{\infty-it} \mathrm{e}^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$.

(b) Utilize o item (a) para provar que, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então a função característica de X é $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-it\mu - \sigma^2 t^2/2}, \quad t \in R$.

Exercício 5. Prove, usando funções características, que

(a) Se $X \sim$ Binomial$(n_1, p), Y \sim$ Binomial(n_2, p) e X e Y forem independentes, então $X + Y \sim$ Binomial$(n_1 + n_2, p)$.

(b) Se $X \sim$ Poisson$(\lambda_1), Y \sim$ Poisson(λ_2) e X e Y forem independentes, então $X + Y \sim$ Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercício 6. Mostre que, se X é igual a c com probabilidade 1, então sua função característica é e^{ict}.

Exercício 7. Verifique que ser $\bar{c}$ é o complexo conjugado de c, então $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t)$.

Exercício 8. Obtenha a função característica do modelo Geométrico de parâmetro p e use-a para determinar a média e a variância.

Exercício 9. Mostre, via função característica, que a soma de variáveis independentes de Bernoulli é Binomial.

Exercício 10. A variável X tem densidade $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, x$ real. Mostre que sua função característica é dada por $\varphi_X(t) = 1/(1 + t^2)$.

Exercício 11. Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), j = 1, 2, \ldots, n$. Com o uso de funções características, obtenha a distribuição de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Exercício 12. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, obtenha a função característica de X^2 e identifique sua distribuição.

Exercício 13. Calcule a função característica da variável aleatória X que, para $\lambda > 0$, tem função de distribuição $F(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} I_{(-\infty,0)(x)}$.

Exercício 14. Sejam X e Y independentes, sendo $X \sim Gama(\alpha, \beta)$ e $Y \sim Beta(\gamma, \beta - \gamma)$, para β e γ inteiros não negativos e $\gamma \neq \beta$. Mostre, usando funções características, que $Z = XY$ tem distribuição $Gama(\alpha, \gamma)$.

Exercício 15. As variáveis X_1 e X_2 são independentes com distribuição $Gama(\alpha_j, \beta), j = 1, 2$. Com o uso de funções características, determine a distribuição de $X_1 + X_2$.