11a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear 31.10.2011

`Problemas envolvendo autovalores e diagonalização`

1. Resolva os seguintes exercícios das páginas 153 da apostila do Zani de Álgebra Linear.
   (a) 10.21: a, b
   (b) 10.22: a, b
   (c) 10.23: a, b

2. Considere a matriz A dada por: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica dos autovalores da matriz A. A matriz A é diagonalizável?

3. Considere a matriz A dada por: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Determine se é possível existir uma matriz $P \in M_4(\mathbb{R})$ inversível de modo que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. Em caso afirmativo, calcule de modo eficiente A^n para $n \in \mathbb{N}$.

4. Considere o operador linear T sobre $P_2(\mathbb{R})$ definido por: $T(p(x)) = p(x) + (x+1)p'(x)$. Determine os autovalores e os autovetores do operador T. O operador linear T é diagonalizável? Em caso afirmativo, determine uma base ordenada B para $P_2(\mathbb{R})$ de modo que $[T]_B$ seja uma matriz diagonal.

5. Considere o operador linear T sobre $P_2(\mathbb{R})$ definido por: $T(p(x)) = xp'(x) + p''(x)$. Determine os autovalores e os autovetores do operador T. operador linear T é diagonalizável? Em caso afirmativo, determine uma base ordenada B para $P_2(\mathbb{R})$ de modo que $[T]_B$ seja uma matriz diagonal.

6. Dê um exemplo de um operador linear diagonalizável T sobre $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelo elemento $u = (1,0,1)$.

7. Dê um exemplo de um operador linear diagonalizável T sobre $\mathbb{R}^3$ cujo imagem é gerada pelos elementos $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (1,0,1)$.

8. Determine explicitamente a expressão da transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:
   (a) T é diagonalizável.
   (b) $N(T) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y-z+t = 0 \quad \text{e} \quad z-t=0\}$.
   (c) $T(0,0,1,0) = (0,0,2,0)$.
   (d) $(0,1,0,0) \in Im(T)$.
   (e) $\lambda = -3$ é um autovalor de T.

9. Prove que se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonalizável, então o determinante de A é o produto dos autovalores de A.

10. (a) Suponha que P diagonaliza simultaneamente as matrizes A e B, ou seja, $A = P^{-1}D_1P$ e $B = P^{-1}D_2P$, sendo D_1 e D_2 matrizes diagonais. Prove que $AB = BA$.

    (b) É possível provar[1] que uma espécie recíproca deste resultado também é válida, a saber: se A e B são diagonalizáveis e $AB = BA$, então A e B possuem os mesmos autovetores, e portanto, existe uma matriz P que diagonaliza simultaneamente as matrizes A e B. Teste isto para as matrizes:
$\begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

    (c) Se D é uma matriz diagonal com autovalores distintos e $CD = DC$, mostre que C também é uma matriz diagonal. (Sugestão: compare o elemento (i, j) em $CD = DC$.)

    (d) Se A é diagonalizável com autovalores distintos e se $BA = AB$, mostre que B também é diagonalizável. (Sugestão: use 10.d.)

[1]Hoffman e Kunze, página 190