ICMC/USP – SME0802 Inferência I

1ª prova – 1º/2013 – S O L U Ç Ã O

1. Considere X_1, uma amostra de tamanho $n = 1$, obtida de uma população $\mathsf{normal}(\mu_0, \sigma^2)$, em que μ_0 é conhecido e $\sigma^2 > 0$.

   (a) Se existirem, apresente estimadores de momentos e de máxima verossimilhança para a variância σ^2.

   Solução. Utilizando o segundo momento não central, temos que $\mathrm{E}(X_1^2) = \sigma^2 + \mu_0^2$. Pelo método dos momentos, resolvemos $\sigma^2 + \mu_0^2 = X_1^2$ obtendo $\sigma^2 = X_1^2 - \mu_0^2$. Portanto, um estimador de momentos de σ^2 é dado por $\widehat{\sigma^2} = X_1^2 - \mu_0^2$, se $X_1^2 > \mu_0^2$.

   Para $\sigma^2 > 0$, a função verossimilhança é dada por

$$L(\sigma^2; x_1) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x_1 - \mu_0)^2 \right\},$$

   cujo logaritmo é

$$\ell(\sigma^2; x_1) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(x_1 - \mu_0)^2.$$

   Calculando as duas primeiras derivadas em relação a σ^2 obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell(\sigma^2; x_1) = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(x_1 - \mu_0)^2 \tag{1}$$

   e

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ell(\sigma^2; x_1) = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}(x_1 - \mu_0)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\left\{ \frac{1}{2} - \frac{(x_1 - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right\}. \tag{2}$$

   Igualando a expressão (1) a 0 e resolvendo obtemos $\sigma^2 = (x_1 - \mu_0)^2$. Se $x_1 \neq \mu_0$, substituindo esta solução em (2) obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ell(\sigma^2; x_1) = -\frac{1}{2(x_1 - \mu_0)^4} < 0,$$

   de modo que a solução $\sigma^2 = (x_1 - \mu_0)^2$ corresponde ao máximo da função verossimilhança. Logo, o estimador de máxima verossimilhança (MV) de σ^2 é $\widehat{\sigma^2} = (X_1 - \mu_0)^2$, se $X_1 \neq \mu_0$.

   (b) Considere $\mu_0 = 3$ e a observação $x_1 = 2$. Se existirem os estimadores do item 1a, apresente as estimativas de σ^2 baseadas nestes estimadores.

   Solução. Notando que $x_1^2 = 4 < \mu_0^2 = 9$, concluímos que o estimador de momentos não existe.

   A estimativa de MV de σ^2 é $(2-3)^2 = 1$.

2. A variável aleatória X tem distribuição $\mathsf{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$. Em um experimento é possível coletar uma amostra aleatória $Y_1, \ldots, Y_n$, em que $Y_i = 0$, se $X_i = 0$ e $Y_i = 1$, se $X_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Apresente um estimador para θ.

   Solução. A amostra aleatória $Y_1, \ldots, Y_n$ é coletada de uma população com distribuição $\mathsf{Bernoulli}(\omega)$, em que $\omega = \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 > 0) = 1 - \mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - e^{-\theta}$, pois $X_1 > 0$ representa o evento sucesso. Temos que $\mathrm{E}(Y_1) = \omega = 1 - e^{-\theta}$. Utilizando o primeiro momento não central, pelo método dos momentos resolvemos $1 - e^{-\theta} = \overline{Y}$ obtendo $e^{-\theta} = 1 - \overline{Y}$ e $\theta = -\log(1 - \overline{Y})$. Logo, um estimador de momentos de θ é dado por $\widehat{\theta} = -\log(1 - \overline{Y})$, se $0 < \overline{Y} < 1$.

   (b) Com base no estimador do item 2a e nas observações

   `0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0`,

   apresente uma estimativa para θ.

   Solução. Para estes dados, $n = 13$ e $\overline{y} = 9/13 = 0,692$, de modo que $\widehat{\theta} = 1,18$.

3. Uma variável aleatória X tem distribuição com $\mathrm{E}(X) = \theta + g_0\beta$ e $\mathrm{Var}(X) = \pi^2\beta^2/6$, em que $g_0 \cong 0,5772$, β e θ são os parâmetros, $\beta > 0$ e $\theta > 0$. A partir de uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$, $n > 1$, apresente estimadores para β e θ.

   Solução. Conhecendo a esparança e a variância de X, podemos aplicar o método dos momentos, cujas equações são

$$\theta + g_0\beta = \overline{X} \tag{3}$$

$$\text{e } \frac{\pi^2\beta^2}{6} + (\theta + g_0\beta)^2 = M_2', \tag{4}$$

   em que $M_2' = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$. Substituindo (3) em (4) resulta em $\pi^2\beta^2/6 = M_2$, em que $M_2 = M_2' - \overline{X}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/n$, com solução $\widehat{\beta} = \sqrt{6M_2}/\pi \cong 0,780\sqrt{M_2}$, sendo que $\widehat{\beta} > 0$, se $M_2 > 0$. Substituindo esta expressão em (3), $\widehat{\theta} = \overline{X} - g_0\sqrt{6M_2}/\pi \cong \overline{X} - 0,450\sqrt{M_2}$. Pode ser provado que $\widehat{\theta} > 0$.

4. Pretendemos estimar $\tau_1(\theta)$, $\tau_2(\theta)$ e $\tau_3(\theta)$ com base em uma amostra aleatória $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

   (a) Um estimador $T_1(\boldsymbol{X})$ é tal que $\mathrm{E}[T_1(\boldsymbol{X})] = \tau_1(\theta) + a_1$, em que a_1 é conhecido, com $a_1 \neq 0$.

(b) Um estimador $T_2(\boldsymbol{X})$ é tal que $\mathrm{E}[T_2(\boldsymbol{X})] = b_2\tau_2(\theta)$, em que b_2 é conhecido, com $b_2 \neq 0$.

(c) Um estimador $T_3(\boldsymbol{X})$ é tal que $\mathrm{E}[T_3(\boldsymbol{X})] = b_3\tau_3(\theta) + a_3$, em que a_3 e b_3 são conhecidos, com $a_3 \neq 0$ e $b_3 \neq 0$.

Apresente estimadores não viesados para $\tau_1(\theta)$, $\tau_2(\theta)$ e $\tau_3(\theta)$.

Solução. Levando em conta que $\tau_1(\theta) = \mathrm{E}[T_1(\boldsymbol{X})] - a_1 = \mathrm{E}[T_1(\boldsymbol{X}) - a_1]$, temos que $T_1(\boldsymbol{X}) - a_1$ é um estimador não viesado de $\tau_1(\theta)$.

Levando em conta que $\tau_2(\theta) = \mathrm{E}[T_2(\boldsymbol{X})]/b_2 = \mathrm{E}[T_2(\boldsymbol{X})/b_2]$, temos que $T_2(\boldsymbol{X})/b_2$ é um estimador não viesado de $\tau_2(\theta)$.

Levando em conta que $\tau_3(\theta) = \{\mathrm{E}[T_3(\boldsymbol{X})] - a_3\}/b_3 = \mathrm{E}[\{T_3(\boldsymbol{X}) - a_3\}/b_3]$, temos que $\{T_3(\boldsymbol{X}) - a_3\}/b_3$ é um estimador não viesado de $\tau_3(\theta)$.

5. As probabilidades de ocorrência de três características distintas em indivíduos de uma população são dadas por $p_1 = \theta^2$, $p_2 = 2\theta(1-\theta)$ e $p_3 = (1-\theta)^2$, em que $0 < \theta < 1$. Em uma amostra de tamanho n, X_j representa o número de indivíduos com a j-ésima característica, notando que $X_1 + X_2 + X_3 = n$ e a distribuição de (X_1, X_2, X_3) é $\mathsf{multinomial}(n, p_1, p_2, p_3)$.

(a) Apresente o estimador de máxima verossimilhança de θ.

Solução. Levando em conta que $x_3 = n - x_1 - x_2$, a função verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned}
L(\theta; x_1, x_2) &\propto \{p_1(\theta)\}^{x_1}\{p_2(\theta)\}^{x_2}\{p_3(\theta)\}^{n-x_1-x_2} \\
&= \theta^{2x_1}\left\{2\theta(1-\theta)\right\}^{x_2}(1-\theta)^{2(n-x_1-x_2)} \\
&\propto \theta^{2x_1+x_2}(1-\theta)^{2(n-x_1-x_2)+x_2},
\end{aligned}$$

cujo logaritmo é dado por

$$\ell(\theta; x_1, x_2) = \text{const.} + (2x_1 + x_2)\log(\theta) + \{2(n - x_1 - x_2) + x_2\}\log(1-\theta). \quad (5)$$

As duas primeiras derivadas de (5) em relação a θ são

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta; x_1, x_2) = \frac{2x_1 + x_2}{\theta} - \frac{2(n - x_1 - x_2) + x_2}{1-\theta} \quad (6)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ell(\theta; x_1, x_2) = -\frac{2x_1 + x_2}{\theta^2} - \frac{2(n - x_1 - x_2) + x_2}{(1-\theta)^2}. \quad (7)$$

Igualando (6) a 0 obtemos $(1-\theta)(2x_1+x_2) = \theta\{2(n-x_1-x_2)+x_2\}$ e $2x_1+x_2-\theta(2x_1+x_2) = \theta\{2(n-x_1-x_2)+x_2\}$, com solução

$$\theta = \frac{2x_1+x_2}{2(n-x_1-x_2)+x_2+2x_1+x_2} = \frac{2x_1+x_2}{2n}.$$

Notando que em (7) o sinal é negativo, concluímos que o EMV de θ é

$$\widehat{\theta} = \frac{2X_1+X_2}{2n}, \text{ se } 0 < 2X_1+X_2 < 2n. \tag{8}$$

(b) Em uma amostra de $n = 65$ indivíduos, foram observados $x_1 = 16$ e $x_2 = 34$. Com base nestes dados e no estimador do item 5a, apresente estimativas para p_1, p_2 e p_3.

Solução. Utilizando a expressão (8), a estimativa de MV de θ é $\widehat{\theta} = (2\times 16 + 34)/(2\times 65) = 0,508$. A partir da estimativa de θ e aplicando a propriedade de invariância dos estimadores de MV, as estimativas das probabilidades são $\widehat{p}_1 = 0,258$, $\widehat{p}_2 = 0,500$ e $\widehat{p}_3 = 0,242$.

A função logverossimilhança está representada na Figura 1.

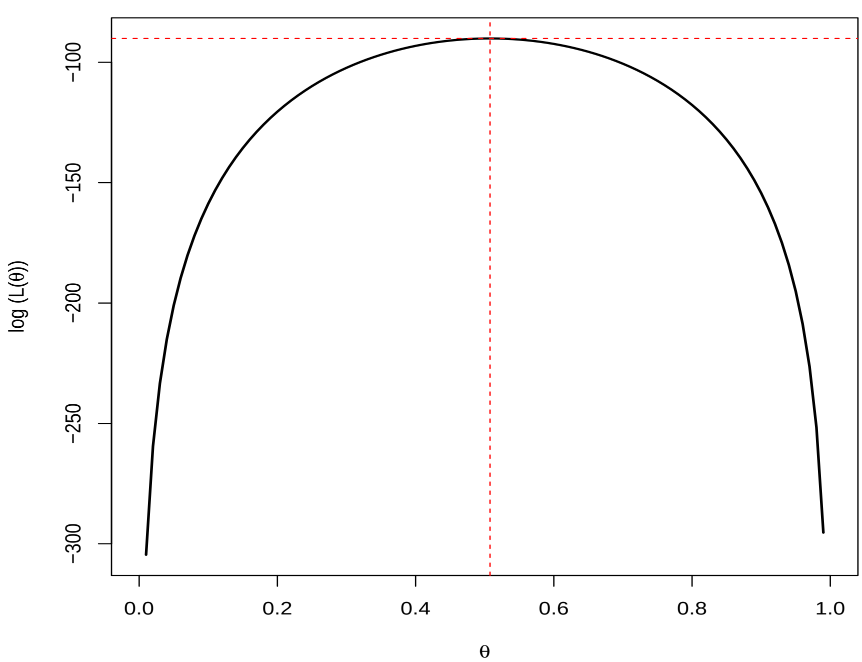

Figura 1: Função logverossimilhança com a estimativa de máxima verossimilhança.