1. A soma S de uma série alternada, que satisfaz as condições do critério da série alternada, está entre os valores de quaisquer duas somas parciais consecutivas. Isto sugere o uso da média
$$\frac{S_n + S_{n+1}}{2} = S_n + \frac{(-1)^{n+2}a_{n+1}}{2}$$
para estimar S. Calcule $S_{20} + \frac{1}{2}\frac{1}{21}$ como uma aproximação da soma da série harmônica alternada. (A soma exata é $\ln 2$.)

2. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Já sabemos que esta série é convergente. (A soma exata é $\ln 2$.)
   (a) Mostre que existe uma reordenação desta série com soma 10.
   (b) Dado um número s real qualquer, mostre que existe uma reordenação desta série com soma s.
   (c) Mostre que existe uma reordenação de modo que esta série diverge para $+\infty$ e outra para $-\infty$.

   Sugestão: veja o exemplo 6, página 108, do Thomas, ou Exemplo 3.8.2, página 69, de http://www2.icmc.usp.br/ eugenio/calculo3/notas-sma333-wagner.pdf

3. Seja $p > 0$ uma constante real. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^p}$ converge para todo $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ e quando $x = k\pi$, a série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

4. Use a identidade
$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^p}$ converge para todo x.

5. I. Prove as identidades
$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)[\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)] = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}$$
e
$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)[\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)] = \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}$$
II. Seja (a_n) uma sequência decrescente de números reais positivos tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Use essas identidades para mostrar que

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ converge para todo x.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge para todo $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

6. Investigue o comportamento de convergência de

$$\frac{\cos(3x)}{2} + \frac{\cos(6x)}{3} + \frac{\cos(9x)}{4} + \dots$$

7. Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n}$ é divergente.

(sugestão: verifique que $|\sin n| \geq \sin^2 n$ e observe que $\sin^2 n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2n)$.)

8. É convergente ou divergente? Justifique.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin n \qquad b)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{1}{n} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2},$$

onde b_n é a sequência $1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots$