$\boxed{3.}$ $A=\{0,1,2,\dots\}$, $\mathcal{X} = A^c \cup A$, $A^c = \{-1\}$.

$$f(x;\theta) = \theta^{I_{\{-1\}}(x)} \times \left\{(1-\theta)^2\theta^x\right\}^{I_{\{0,1,2,\dots\}}(x)}$$

(omitindo $I_{\mathcal{X}}(x)$, que não depende de θ).

$$f(x_1,\dots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{1-I_A(x_i)} \times \left\{(1-\theta)^2\theta^{x_i}\right\}^{I_A(x_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \theta^{1-I_A(x_i)} \times \left\{(1-\theta)^2\right\}^{I_A(x_i)} \times \theta^{x_i I_A(x_i)}$$

$$= \theta^n \times \left\{\frac{(1-\theta)^2}{\theta}\right\}^{\sum_{i=1}^n I_A(x_i)} \times \theta^{\sum_{i=1}^n x_i I_A(x_i)}$$

Teorema da fatoração $\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n I_A(X_i), \sum_{i=1}^n x_i . I_A(x_i)\right)^T$ é conjuntamente suficiente para θ.

$\boxed{4.}$ $T = T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente e completa para θ (família exponencial de posto completo)

$\delta_K(T)$ tal que $E_\theta[\delta_K(T)] = \theta^K$ é o ENVVUM de θ^K.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta_K(t) \frac{e^{-n\theta} . (n\theta)^t}{t!} = \theta^K$$ (pois $T \sim \text{Poisson}(n\theta)$), ou seja,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\delta_K(t) \times (n\theta)^t}{t!\,\theta^K} = e^{n\theta}.$$ Reescrevendo o lado esquerdo (com $\delta_K(t)=0$, se $t<K$):

$$\sum_{t=K}^{\infty} \frac{\delta_K(t)\, n^K (n\theta)^{t-K}}{t!} = \sum_{t=K}^{\infty} \frac{\delta_K(t)\, n^K (n\theta)^{t-K}}{t \times (t-1) \times \dots \times (t-K+1) \times (t-K)!}$$

Tomando $\delta_K(t) = \frac{t \times (t-1) \times \dots \times (t-K+1)}{n^K}$ obtemos

$$\sum_{t=K}^{\infty} \frac{(n\theta)^{t-K}}{(t-K)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n\theta)^j}{j!} \underset{\text{resultado 1}}{\overset{\uparrow}{=}} e^{n\theta} \Rightarrow$$ o ENVVUM de θ^K é

$$\delta_K(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T < K, \\ \dfrac{T.(T-1) \times \dots \times (T-K+1)}{n^K}, & \text{se } T \geq K. \end{cases}$$

família exponencial

$E_\theta(T) = n\theta \Rightarrow$ $T/n = \bar{X}$ é o ENVVUM eficiente de $g_1(\theta) = \theta$.