ICMC – USP
SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1
3ª lista de exercícios

1. Considere uma distribuição da família exponencial com parâmetros naturais $\eta_1, \ldots, \eta_k$ e estatísticas suficientes naturais $T_1(\boldsymbol{X}), \ldots, T_k(\boldsymbol{X})$, $k \geq 2$.

   (a) Se as estatísticas $T_1(\boldsymbol{X}), \ldots, T_k(\boldsymbol{X})$ satisfazem uma restrição linear, prove que o modelo $\{P_\eta : \boldsymbol{\eta} \in H\}$ não é identificável.

   (b) Se os parâmetros naturais $\eta_1, \ldots, \eta_k$ satisfazem uma restrição linear, prove que a dimensão da distribuição pode ser reduzida.

2. Prove que as distribuições abaixo pertencem à família exponencial de distribuições.

   (a) $\mathsf{gama}(p, \lambda)$, $p$ conhecido.

   (b) $\mathsf{gama}(p, \lambda)$, $\lambda$ conhecido.

   (c) $\mathsf{beta}(r, s)$, $r$ conhecido.

   (d) $\mathsf{beta}(r, s)$, $s$ conhecido.

3. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com uma das seguintes funções densidade:

   (a) $f(x;\theta) = \theta\, x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \;\; \theta > 0.$

   (b) Weibull:
   $f(x;\theta) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a) I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0, \;\; a > 0.$

   (c) Pareto:
   $f(x;\theta) = \theta a^\theta x^{\theta+1} I_{(a,\infty)}(x), \;\; \theta > 0$, $a > 0.$

   Prove que as três distribuições são da família exponencial ($a$ conhecido) e apresente as estatísticas suficientes.

4. Qual(is) das seguintes funções densidade pertence(m) à família exponencial?

   (a) $f(x;\theta) = \{\exp[-2\log\theta + log(2x)]\}\, I_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0.$

   (b) $f(x;\theta) = 1/9 I_{\{1+\theta, 2+\theta, \ldots, 9+\theta\}}(x).$

   (c) $\mathsf{normal}(\theta, \theta^2), \quad \theta > 0.$

   (d) $f(x;\theta) = 2(x+\theta)/(1+2\theta)\, I_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0.$

   (e) $f(x;\theta)$ é a função massa de probabilidade condicional de uma variável $X$ com distribuição $\mathsf{binomial}(n, \theta)$ dado $X > 0$, $0 < \theta < 1$.

5. Prove que as distribuições $\mathsf{beta}(r, s)$ e $\mathsf{gama}(p, \lambda)$ são da família exponencial biparamétrica. Apresente as estatísticas suficientes.

6. Seja $X$ uma variável aleatória que pode assumir os valores $v_1, \ldots, v_{k+1}$ com probabilidades $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$, respectivamente, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{k+1})'$ desconhecido, variando em $\boldsymbol{\Theta} = \{(\theta_1, \ldots, \theta_{k+1})' : \theta_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, k+1, \; \sum_{j=1}^{k+1} \theta_j = 1\}$. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} X$. Seja $N_j$ o número de $X_j$ iguais a $v_j$. Prove que as distribuições de $X$ e $(X_1, \ldots, X_n)$ são da família exponencial e apresente as estatísticas suficientes.

7. Determine a função geradora de momentos das seguintes distribuições:

   (a) $\mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$.

   (b) $\mathsf{gama}(p, \lambda)$.

   (c) $\mathsf{binomial}(n, \theta)$.

   (d) $\mathsf{Poisson}(\theta)$.

8. A família exponencial de distribuições $k$-paramétrica é dita curvada se a dimensão $p$ do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é menor do que $k$. Verifique se as distribuições abaixo são curvadas. Tente representar o espaço paramétrico por uma curva.

   (a) $\mathsf{normal}(\theta, \theta), \quad \theta > 0.$

   (b) $\mathsf{gama}(\alpha, 1/\alpha)$.

   (c) $f(x;\theta) = C\exp\{-(x-\theta)^4\}$, onde $C$ é uma constante de normalização.