1. Para cada n natural, seja f_n dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2x + 2n & \text{se } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Esboce o gráfico de f_n.

   (b) Mostre que para todo $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

2. Determine o domínio da função dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Esboce os gráficos de f_n e f.

   (a) $f_n(x) = e^{nx}$

   (b) $f_n(x) = \frac{n}{1+nx^2}$

   (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$

3. A sequência (f_n) do item (b) do exercício 2 converge uniformemente para f em $[0, +\infty)$? E em $[\frac{1}{2}, +\infty)$?

4. A sequência (f_n) do item (c) do exercício 2 converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$? E em $[\alpha, +\infty)$, com $\alpha > 0$?

5. Seja f dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2}$.

   (a) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx$.

   (b) É falsa ou verdadeira a seguinte afirmativa:
   "A seqüência de funções $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ converge uniformemente a f em $[0,1]$"
   Justifique a sua resposta.

6. Demonstre que a sequência de funções $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge uniformemente em $[0, \pi]$. (sugestão: use o critério de Cauchy.)

7. Dê exemplo de uma sequência de funções f_n sendo cada f_n contínua e f dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, tabém, contínua e tal que a convergência de f_n a f não seja uniforme. Há alguma contradição neste fato?

8. Seja a seqüência de funções $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$. Verifique que f_n converge uniformemente em $\mathbb{R}$ a f dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. É verdade que para todo x, $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$? Há alguma contradição neste fato?