

ICMC – USP
SME0818 – Inferência Estatística – 2022/1
Lista 1

1. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

- (a) Prove que \bar{X} é um estimador de momentos de θ .
- (b) Apresente um estimador de momentos para $\text{Var}(X_1)$.
- (c) Apresente um estimador de momentos para $\text{Var}(X_1)$ utilizando o segundo momento.
- (d) Com base nas observações

1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

apresente estimativas obtidas dos estimadores dos itens anteriores.

2. O tempo de sobrevivência (T , em meses) de pacientes contado desde o diagnóstico de uma certa doença segue uma distribuição exponencial com média $1/\theta$, $\theta > 0$.

- (a) Apresente dois diferentes estimadores de momentos para θ .
- (b) Apresente um estimador de momentos para a função de sobrevivência, dada por $P(T > t)$.
- (c) Com base nas observações

9 15 8 25 6 17 23 5

apresente estimativas obtidas dos estimadores dos itens anteriores.

3. Os diâmetros de esferas metálicas (em mm) seguem uma distribuição normal(μ, σ^2). Com base nas observações

12,2 12,5 12,1 13,8 11,0 16,0 11,6 13,6 12,6 4,2 9,3 11,9 9,8 15,2

apresente uma estimativa para o desvio padrão dos diâmetros.

4. O tempo de espera para atendimento de pedidos de um certo item (em dias) segue uma distribuição gama com média μ e desvio padrão σ . Uma amostra aleatória de tamanho n , $n > 1$, é coletada.

- (a) Apresente estimadores de momentos para μ e σ .
- (b) Com base nas observações

0,4 1,6 2,8 6,1 2,5 1,5 0,6 0,6 1,2 4,2 1,6 4,5 2,4 1,3 2,6 1,6 4,8

apresente estimativas de momentos para μ e σ .

5. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{binomial negativa}(\alpha, \theta)$, $\alpha \geq 1$, inteiro, e $0 < \theta < 1$.

- (a) Apresente estimadores de momentos para α e θ .
- (b) Com base nas observações

6 0 4 6 2 3 13 11 5 3 1 4 10 10 4 7 3 4 6 1

apresente estimativas de momentos para α e θ .

6. A variável aleatória X tem distribuição binomial truncada (em 0) com função massa de probabilidade

$$f(x; \theta) = \frac{\binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}}{1 - (1 - \theta)^n} I_{\{1,2,\dots,n\}}(x).$$

- (a) Apresente um estimador de momentos para θ .
- (b) Sabendo que $n = 25$ e $x = 9$ foi observado, apresente uma estimativa de momentos para θ .
- (c) Utilizando a estimativa de θ do item anterior, apresente o gráfico da função massa de probabilidade de X .

7. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

- (a) Represente graficamente a função densidade.
- (b) Apresente um estimador de momentos para θ .
- (c) Com base nas observações

0,82 0,37 0,65 0,75 0,07 0,47 0,50 0,78 0,28 0,04 0,37

apresente uma estimativa de momentos para θ .

8. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x; \theta) = \frac{\log(\theta)}{\theta - 1} \theta^x I_{(0,1)}(x), \theta > 1.$$

- (a) Represente graficamente a função densidade.
- (b) Apresente um estimador de momentos para θ .
- (c) Com base nas observações

0,92 0,72 0,84 0,34 0,71 0,55 0,89 0,34 0,93 0,25 0,75 0,13 0,64 0,94

apresente uma estimativa de momentos para θ .

- 9. Resolva o exercício 1 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função log-verossimilhança.
- 10. Resolva o exercício 4 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função log-verossimilhança.
- 11. Resolva o exercício 6 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função log-verossimilhança.
- 12. Resolva o exercício 7 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função log-verossimilhança.
- 13. Resolva o exercício 8 utilizando o método de máxima verossimilhança e represente graficamente a função log-verossimilhança.
- 14. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(x; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \exp\{-(x - \theta)\} I_{[\theta, \infty)}(x)$, $\theta > 0$.
 - (a) Represente graficamente a função densidade.
 - (b) Apresente o EMV de θ .

(c) Com base nas observações

19,1 17,7 19,4 17,7 18,9 18,0 18,1 17,9 18,2 19,3 18,2 17,4 18,5 17,6 17,4
apresente a estimativa de MV para θ . Represente graficamente a função verossimilhança.

15. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da população com função massa de probabilidade

$$f(x; \theta) = \theta (1 - \theta)^{x-1} I_{\{1,2,\dots\}}(x), \quad 0 < \theta < 1.$$

(a) Represente graficamente a função massa de probabilidade.

(b) Apresente o EMV de θ .

(c) Com base nas observações

1 3 2 2 1 2 1 1 2 2 3 1 2 6 1 1 2 5 2 2 1 2 1 1 3 4 1

apresente a estimativa de MV para θ . Represente graficamente a função log-verossimilhança.

16. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da população com função massa de probabilidade

$$f(x; \theta) = 0,3 \times 0,7^{x-\theta} I_{\{\theta, \theta+1, \dots\}}(x), \quad \theta > 0. \quad (1)$$

(a) Represente graficamente a função massa de probabilidade.

(b) Apresente o EMV de θ .

(c) Com base nas observações

3 5 4 7 4 2 7

apresente a estimativa de MV para θ . Represente graficamente a função verossimilhança.

(d) Na equação (1), 0,3 e 0,7 são substituídos por α e $1 - \alpha$, respectivamente, em que $0 < \alpha < 1$, conhecido ou desconhecido. Sua resposta ao item 16b mudaria?

17. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta^2}\right) I_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Represente graficamente a função densidade.

(b) Apresente o EMV de θ .

(c) Com base nas observações

2.80 8.02 0.59 5.82 9.23 6.41 5.52 4.42 5.36 3.33 11.48

apresente a estimativa de MV para θ . Represente graficamente a função log-verossimilhança.