SMA 0333 Cálculo III - Lista 9

Eng. Aeronáutica e Bach. Física

(Equação de Laplace - Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611)

1. (Ex. 2, Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, satisfazendo as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= h(x), & u(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

2. (Ex. 3, Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611)

   (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, satisfazendo as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= h(x), & u(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

   Sugestão: Considere a possibilidade de somar as soluções de dois problemas, um com condições de fronteira homogêneas exceto para $u(a, y) = f(y)$, e o outro com condições de fronteira homogêneas exceto $u(x, 0) = h(x)$.

   (b) Encontre a solução se $h(x) = (x/a)^2$ $f(y) = 1 - (y/b)$.

3. (Ex. 4, Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611) Mostre como encontrar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, satisfazendo as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= k(y), & u(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= h(x), & u(x, b) &= g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

   Sugestão: use o Exercício 3.

4. (Ex. 5 Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = 0$$

   no exterior do disco de raio a satisfazendo a condição de fronteira

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

   Suponha que $u(r, \theta)$ seja limitada para $r > a$.

5. (Ex. 6 Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611)

   (a) Encontre a solução $u(r,\theta)$ da equação de Laplace na região semicircular $0 \leq r < a$, $0 < \theta < \pi$, satisfazendo as condições de fronteira

$$u(r,0) = 0, \qquad u(r,\pi) = 0, \quad 0 \leq r < a,$$
$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

   Suponha que $u(r,\theta)$ seja limitada na região dada.

   (b) Encontre a solução se $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$.

6. (Ex. 7 Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611)

   (a) Encontre a solução $u(r,\theta)$ da equação de Laplace no setor circular $0 \leq r < a$, $0 < \theta < \alpha$, satisfazendo as condições de fronteira

$$u(r,0) = 0, \qquad u(r,\alpha) = 0, \quad 0 \leq r < a,$$
$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < \alpha.$$

   Suponha que $u(r,\theta)$ seja limitada na região dada.

   (b) Encontre a solução se $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$.

7. (Ex. 10 Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611)

   Considere o problema de encontrar uma solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, satisfazendo as condições de Neumann na fronteira:

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,b) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

   (a) Mostre que a equação de Laplace e as condições de fronteira determinam o conjunto fundamental de soluções

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= c_0, \\ u_n(x,y) &= c_n \cosh(n\pi x/b)\cos(n\pi y/b), \quad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

   (b) Use a parte (a) para determinar a função $u(x,y)$ que além de satisfazer a equação de Laplace, satisfaz também as condições de fronteira $u_x(a,y) = f(y)$. Note que quando $u_x(a,y)$ é calculado, o termo constante em $u(x,y)$ é cancelado, e portanto não há nenhuma condição para determinar c_0.

Além disso, f deve ser expressa em uma série de Fourier de cossenos de período $2b$, a qual não tem um termo constante. Isto significa que

$$\int_0^b f(y)dy = 0$$

é uma condição necessária para o problema ter solução. Por fim, note que c_0 permanece arbitrário, e portanto a solução é determinada a menos de uma constante aditiva.

8. (Ex. 11 Boyce - DiPrima, Section 10.8 page 611) Encontre a solução $u(r,\theta)$ da equação de Laplace no disco de raio a satisfazendo a condição de fronteira

$$u_r(a,\theta) = g(\theta),\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Note que este é um problema de Neumann e a solução é determinada a menos de uma constante aditiva. Estabeleça uma condição necessária para esse problema ter solução (veja o exercício anterior).