Algoritmos e Estruturas de Dados II

Introdução a Grafos

Profa. M. Cristina /

Profa. Rosane (2012)

Baseado no material de aula original: Profª. Josiane M. Bueno

Divisão do arquivo

- 1ª parte:
  - Motivação
  - Definição: Ordem, Multigrafo, Grafo Simples, Grafo Trivial, Grafo Vazio, Laço, Vértices Adjacentes, Arestas Adjacentes, Grafo Completo.
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 2ª parte
  - Aplicações
  - Grafo Orientado
  - Grau, Grau de Saída, Grau de Entrada, Grafo Regular
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 3ª parte
  - Grafo Valorado
  - Caminho e Caminho Simples
  - Circuito, Ciclo, Grafo Cíclico
  - Caminho e Grafo: Hamiltoniano e Euleriano.
  - Subgrafo
  - Grafo: Conexo e (Totalmente) Desconexo
  - Dígrafo Fortemente Conexo
  - Componente Conexa
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 4ª parte
  - Grafo Bipartido, Bipartido Completo
  - Complemento
  - Isomorfismo
  - Árvore, Árvore Enraizada, Floresta
  - Subgrafo, Subgrafo Gerador, Árvore Geradora, Sugrafo Induzido
  - Exercícios

Divisão do arquivo

- 5ª parte
  - Estrutura de Dados: Matriz de Adjacências e Estrutura de Adjacências.
  - TAD Grafo
  - Comparação
  - Exercícios

Divisão do arquivo

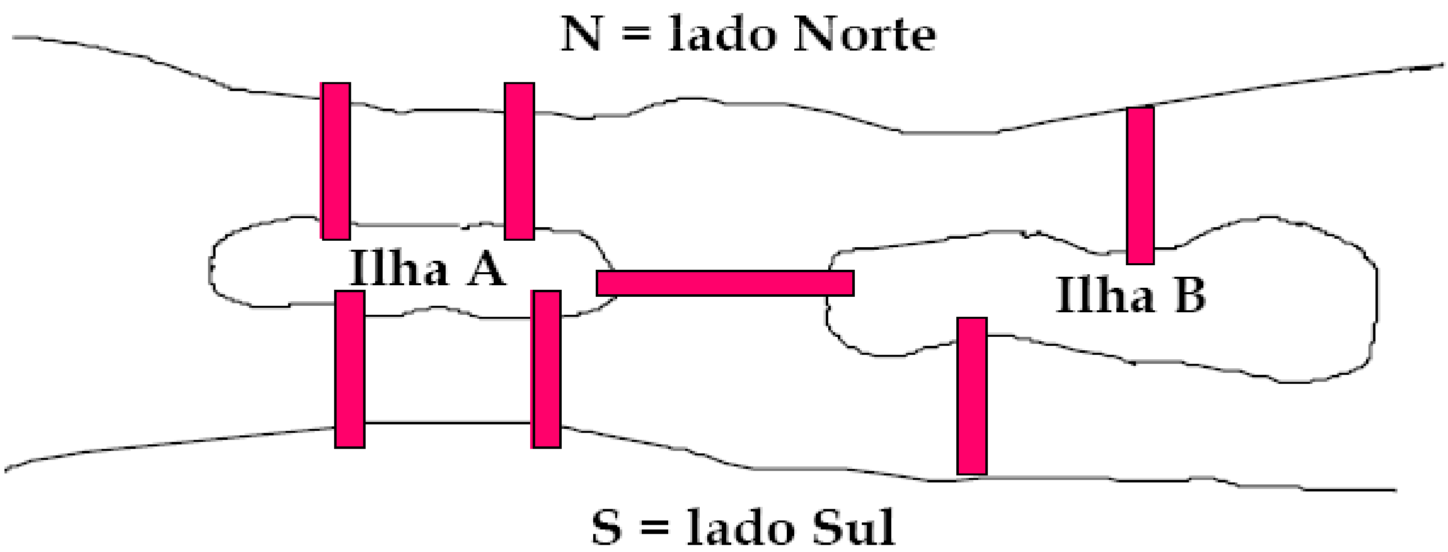
- 1ª parte:
  - Motivação
  - Definição: Ordem, Multigrafo, Grafo Simples, Grafo Trivial, Grafo Vazio, Laço, Vértices Adjacentes, Arestas Adjacentes, Grafo Completo.
  - Exercícios

Grafos - Motivação

- Grafos: conceito introduzido por Euler, em 1736
  - Problema da Ponte de Könisberg
- Modelos matemáticos para resolver problemas práticos do dia a dia...
- Muito usados para modelar problemas em computação -> ênfase em aspectos computacionais

Um problema famoso

As 7 pontes de Konigsberg

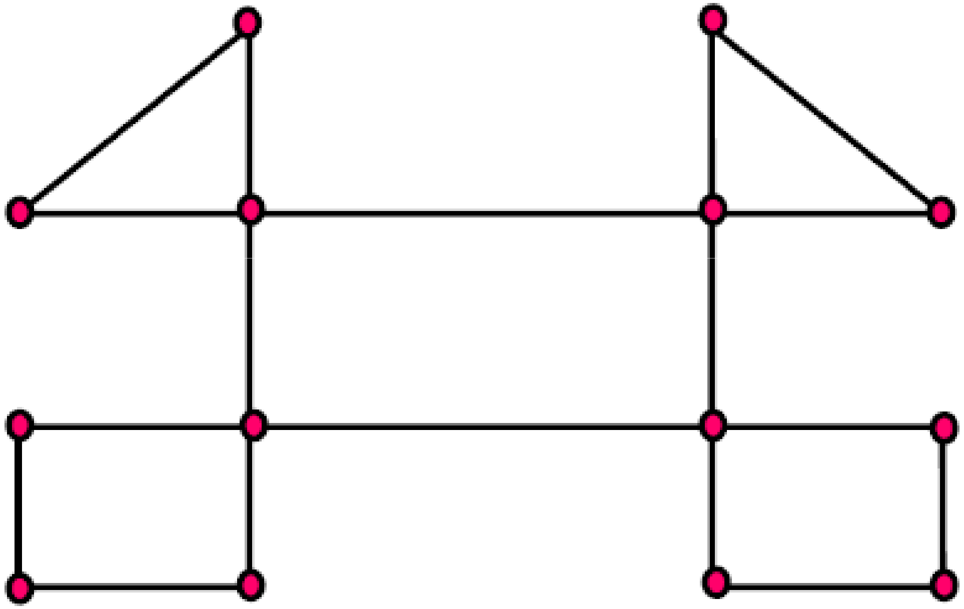


Grafos - Motivação

O problema do carteiro chinês...

- Não é exatamente um problema de Ciência da Computação...
- Mas a Teoria dos Grafos permite que ele seja resolvido automaticamente, usando o computador como ferramenta!
- Você acha que o problema tem solução?
- Se tem, qual seria uma 'rota ideal'?

Problema do carteiro chinês

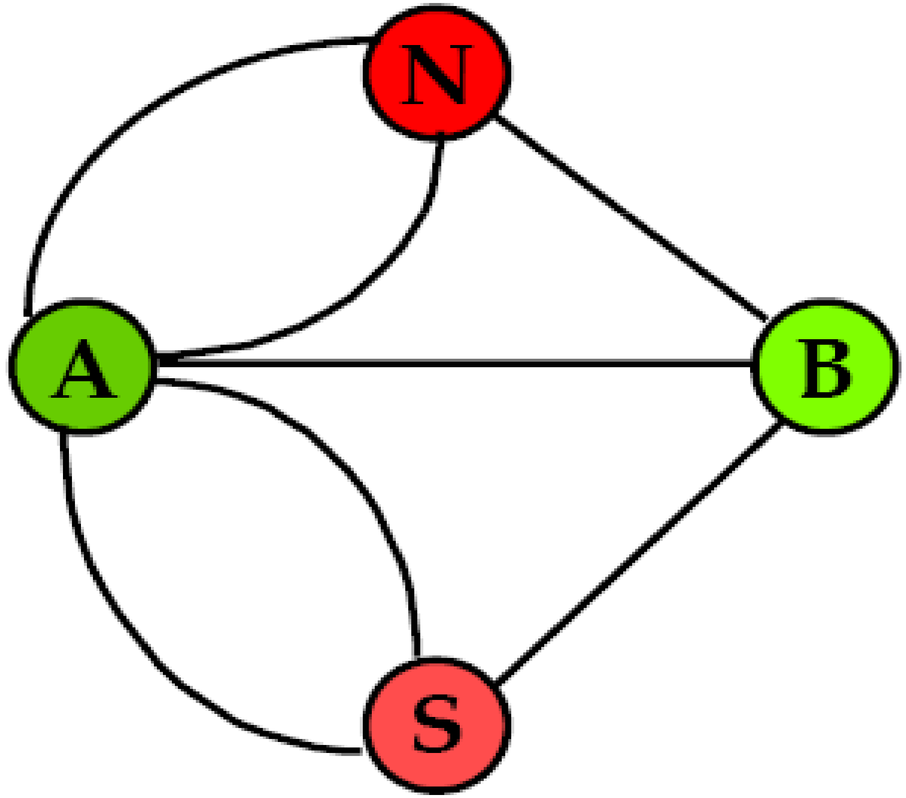


Um problema simples do carteiro chinês

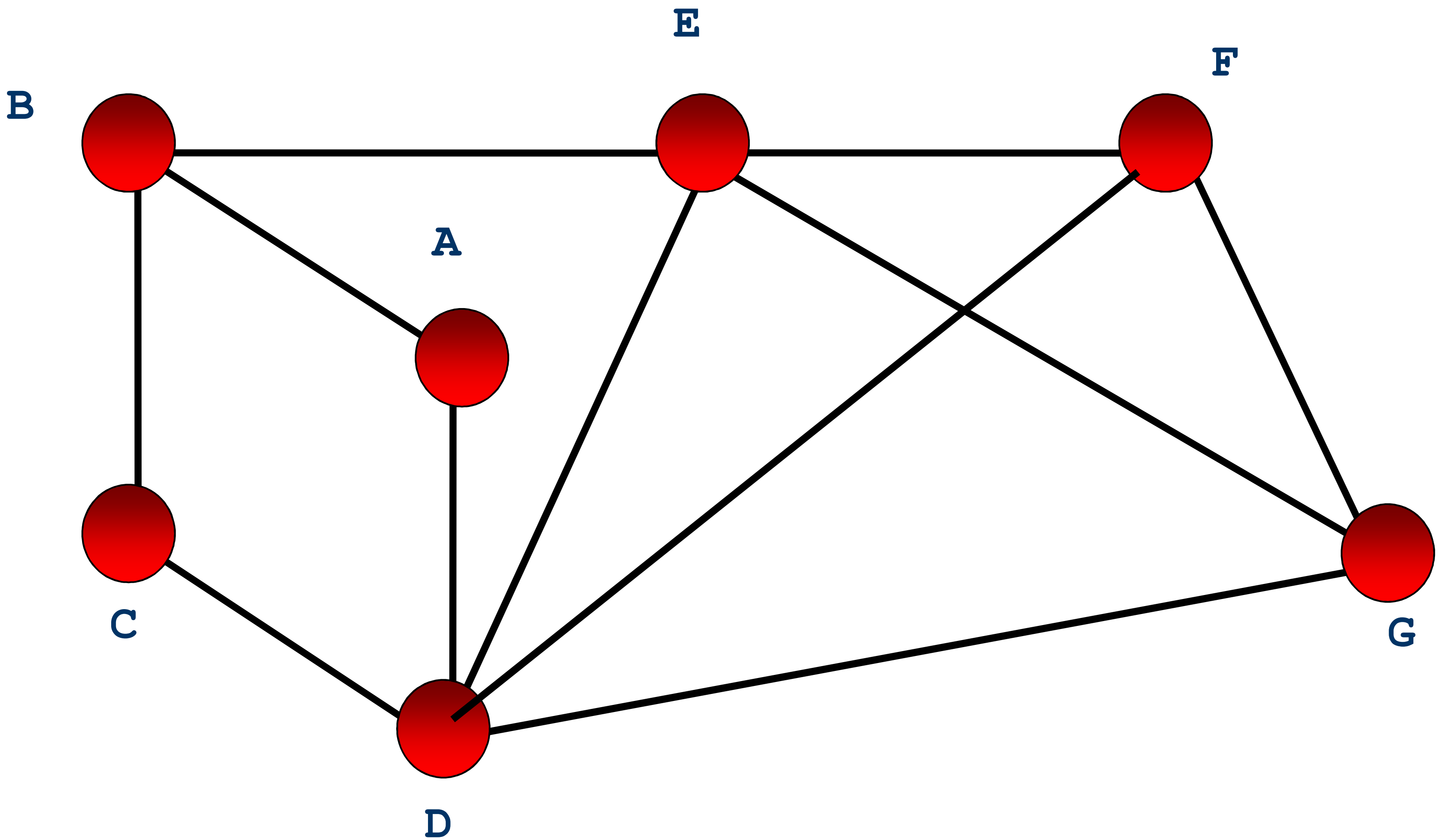
Exemplos de estruturas que podem ser representadas como grafos

- Circuitos elétricos
- Redes de distribuição
- Relações de parentesco entre pessoas
- Outras Redes Sociais
- Rede de estradas entre cidades/vôos
- Redes (físicas e lógicas) de computadores
- Páginas da Web

Exemplo



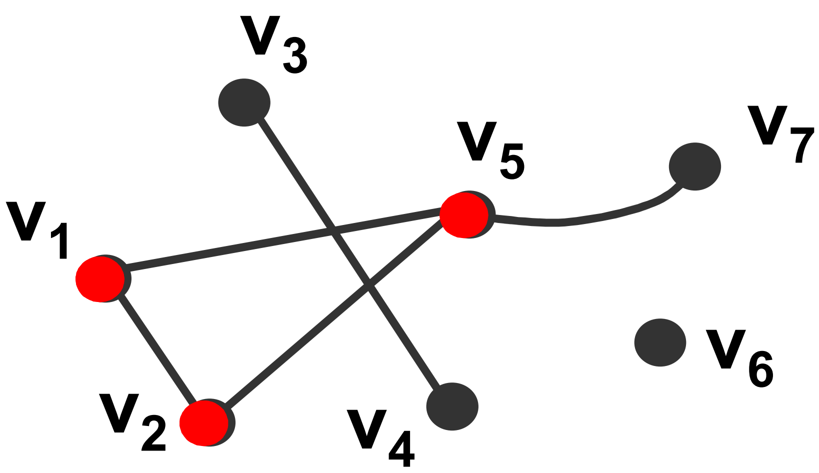
Exemplo



Grafos
Definição

- Grafo é um modelo matemático que representa relações entre objetos. Um grafo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto de <u>vértices</u> V, ligados por um conjunto de <u>arestas</u> ou <u>arcos</u> E.

Representação:



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

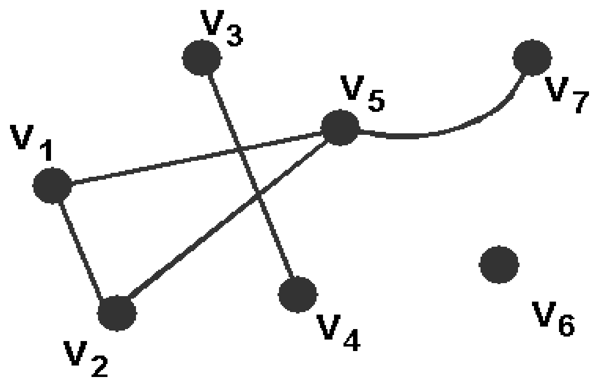
$E(G) = \{(v_1, v_2); \ (v_1, v_5); \ (v_2, v_5); \ (v_3, v_4); \ (v_5, v_7)\}$

Grafos
Definição

- A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices $|V(G)|$, ou seja, pelo número de vértices de G.
- O **número de arestas** de um grafo é dado por $|E(G)|$. Assim, para o grafo do exemplo anterior:

$$|V(G)| = 7$$

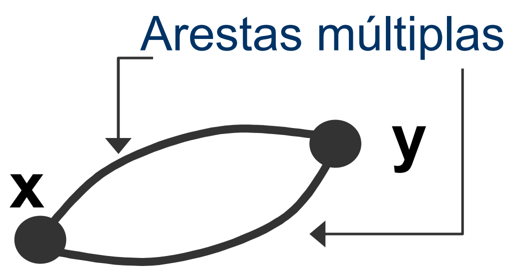
$$|E(G)| = 5$$



Grafos

Multigrafo

- Quando um grafo possui mais de uma aresta interligando os mesmos dois vértices diz-se que este grafo possui **arestas múltiplas** (ou **arestas paralelas**). Ele é chamado de **multigrafo** ou **grafo múltiplo**. Por exemplo:



V = {x, y}

E = {(x, y); (y, x)}

$|V| = 2$ e $|E| = 2$

- Um grafo **simples** é um grafo que <u>não</u> possui arestas múltiplas.

Grafos

Grafo Trivial e Grafo Vazio

- Um grafo é dito **trivial** se for de ordem 0 ou 1. Por Exemplo:

$$V = \{v_1\}$$

$$E = \varnothing$$

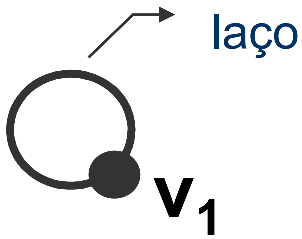
$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 0$$

- Um grafo **vazio** $G=(\varnothing, \varnothing)$ pode ser representado somente por $G = \varnothing$.

Grafos
Laço

- Se houver uma aresta e do grafo G que possui o mesmo vértice como extremos, ou seja, e=(x,x), então é dito que este grafo possui um **laço**.

Exemplo:



$$V = \{v_1\}$$

$$E = \{(v_1, v_1)\}$$

$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 1$$

Grafos
Vértices Adjacentes

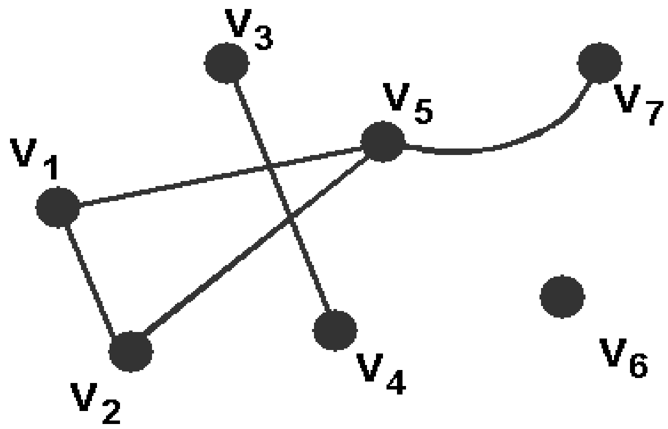
- Diz-se que os vértices x e y são adjacentes (ou vizinhos) quando estes forem os extremos de uma mesma aresta e=(x,y). Assim:

v_3 é adjacente a v_4

v_4 é adjacente a v_3

v_5 NÃO é adjacente a v_4

v_7 NÃO é adjacente a v_2



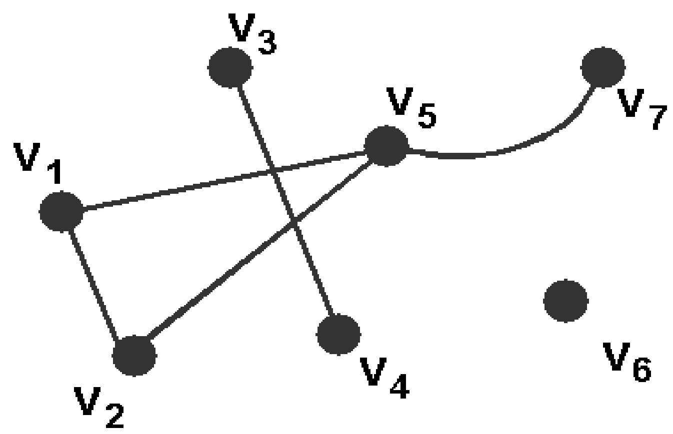
Grafos
Arestas Adjacentes

- Diz-se que duas arestas são adjacentes (ou vizinhas) quando estas possuírem um mesmo extremo, ou vértice.

Assim:

(v_1,v_2) é adjacente a (v_2,v_5)

(v_1,v_2) NÃO é adjacente a (v_3,v_4)



- A aresta e =(v_3,v_4) é dita incidente a v_3 e a v_4

Ou, duas arestas adjacentes são incidentes a um vértice comum.

Grafos
Grafo Completo

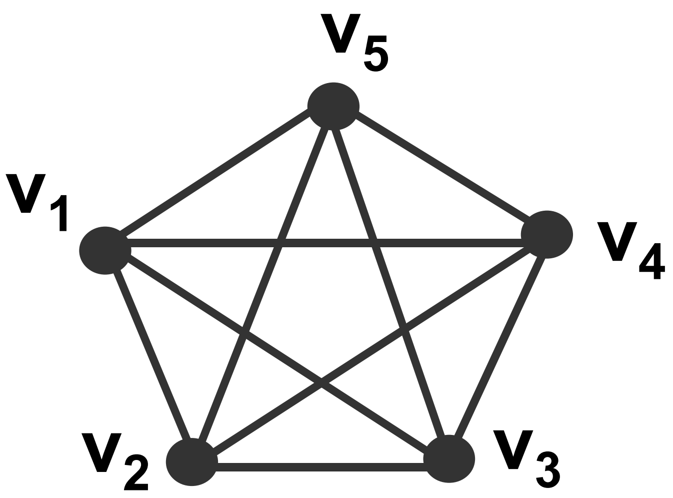
- Um grafo é **completo** se todos os seus vértices forem adjacentes. Um grafo completo K_n possui $n(n-1)/2$ arestas.

Exemplo:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

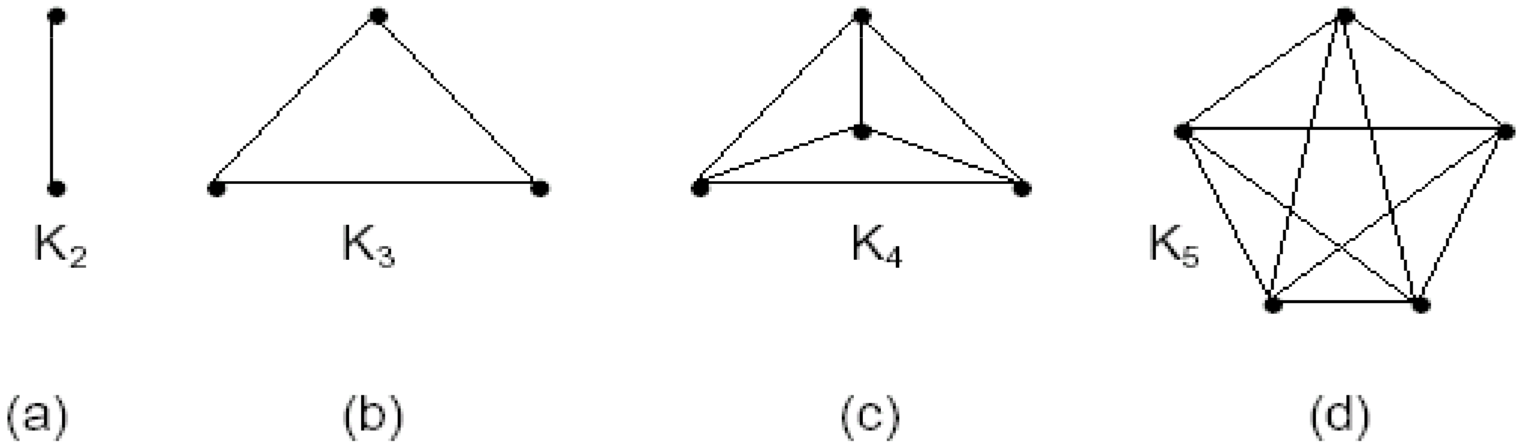
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5),$
$(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5),$
$(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$

$|V| = 5$ e $|E| = 5(5-1)/2 = 10$



Grafo K_5

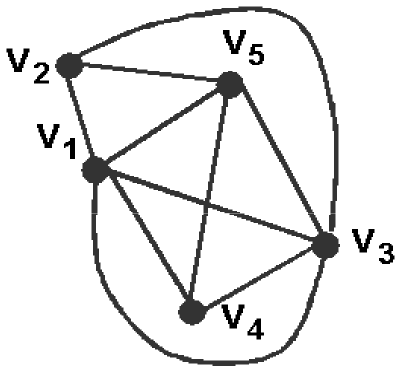
Grafos Completos



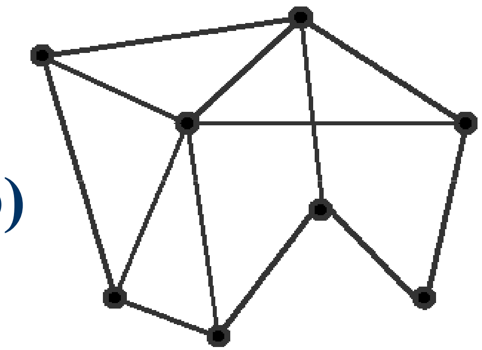
Grafos

Exercícios de Fixação

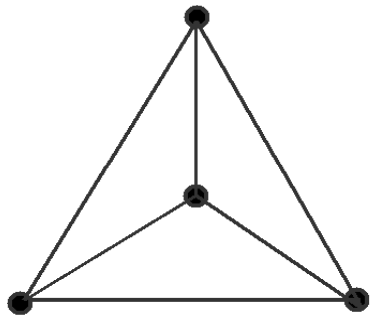
(a)



(b)



(c)

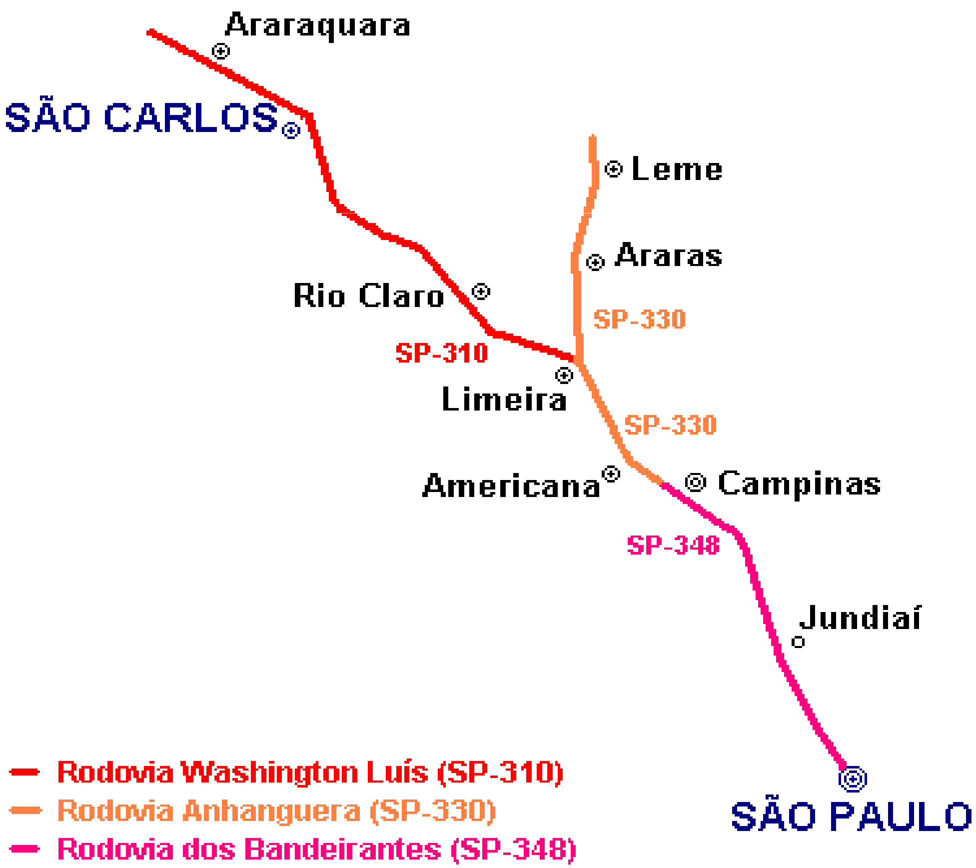


- Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
- Quais dos grafos acima são completos?
- Quais dos grafos acima são simples?
- No grafo **(a)**, quais vértices são adjacentes a $\mathbf{v_3}$? E quais arestas são adjacentes a $\mathbf{(v_3,v_5)}$?

Divisão do arquivo

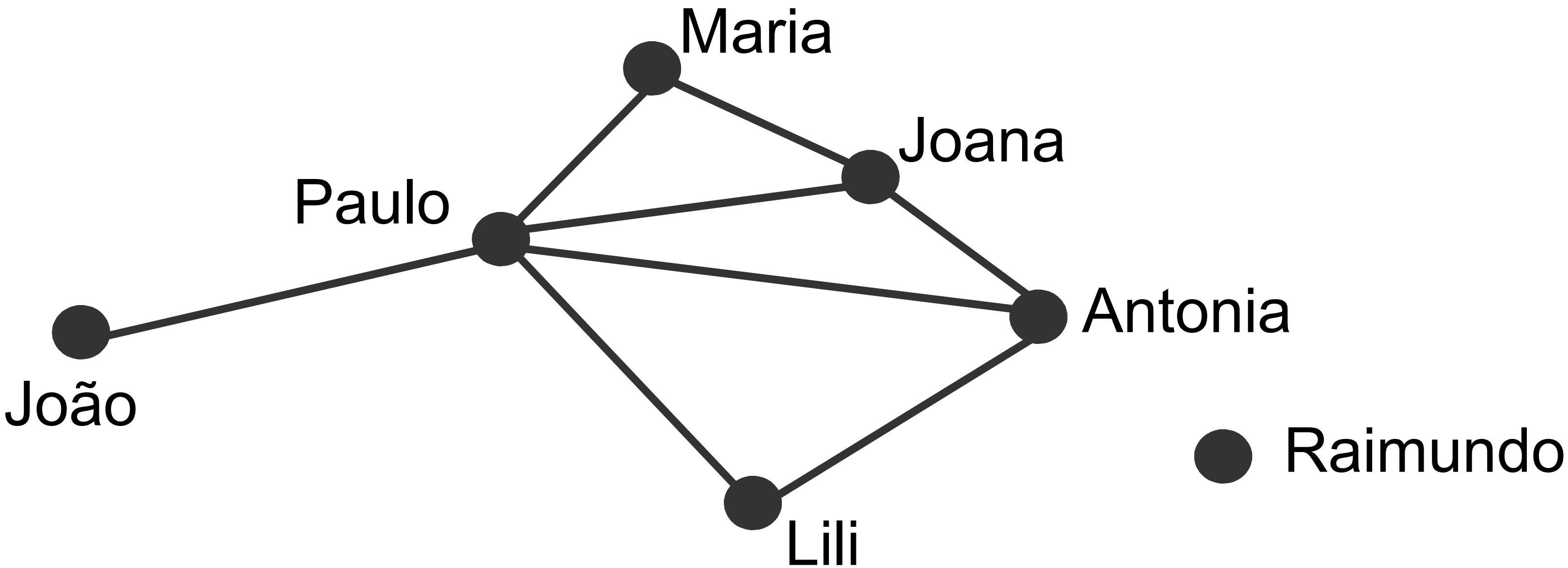
- 2ª parte
  - Aplicações
  - Grafo Orientado
  - Grau, Grau de Saída, Grau de Entrada, Grafo Regular
  - Exercícios

Grafos
Aplicações



Grafos
Aplicações

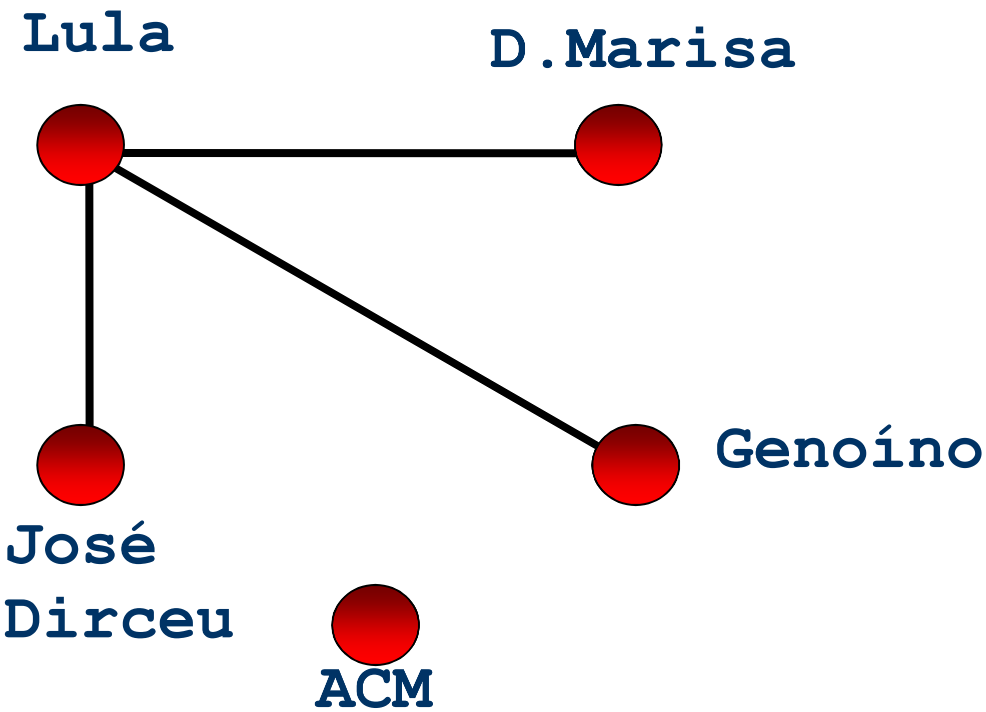
Rede de Relacionamentos (relação "Conhecer"):



Grafos

Aplicações

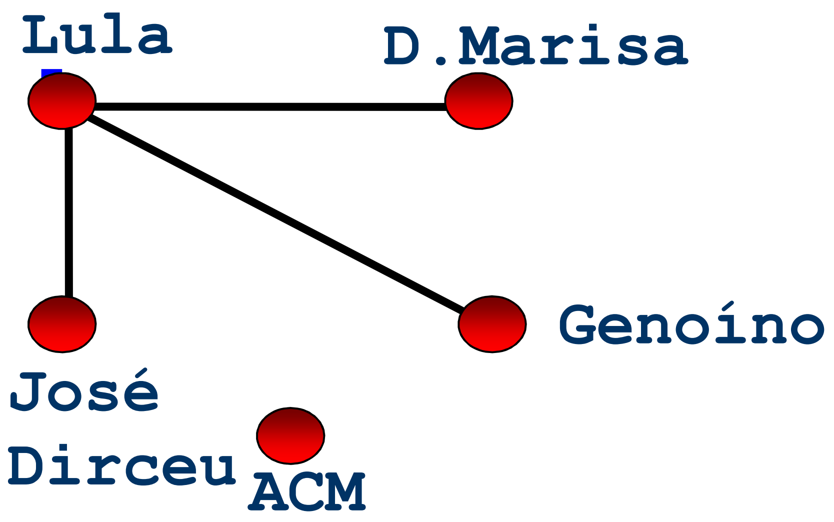
Rede de Relacionamentos (relação "amizade"):



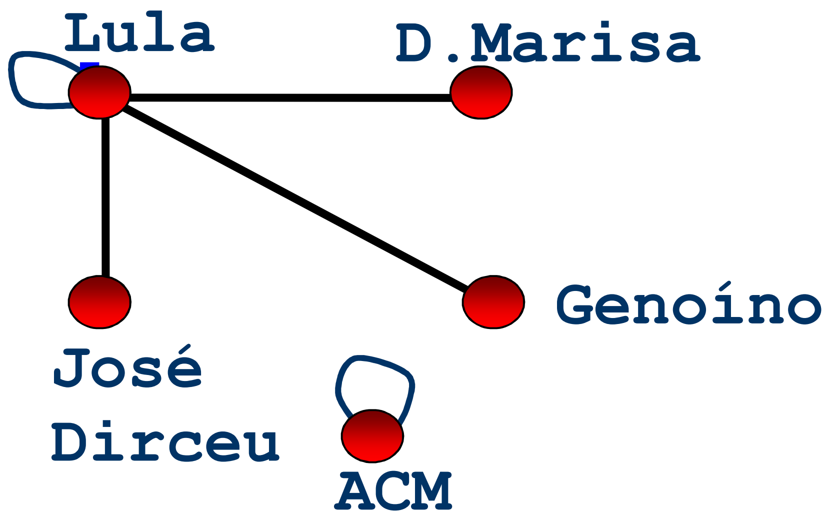
Quem possui mais amigos?
E menos amigos?

Grafos
Aplicações

Grafo sem laço



Grafo com laço



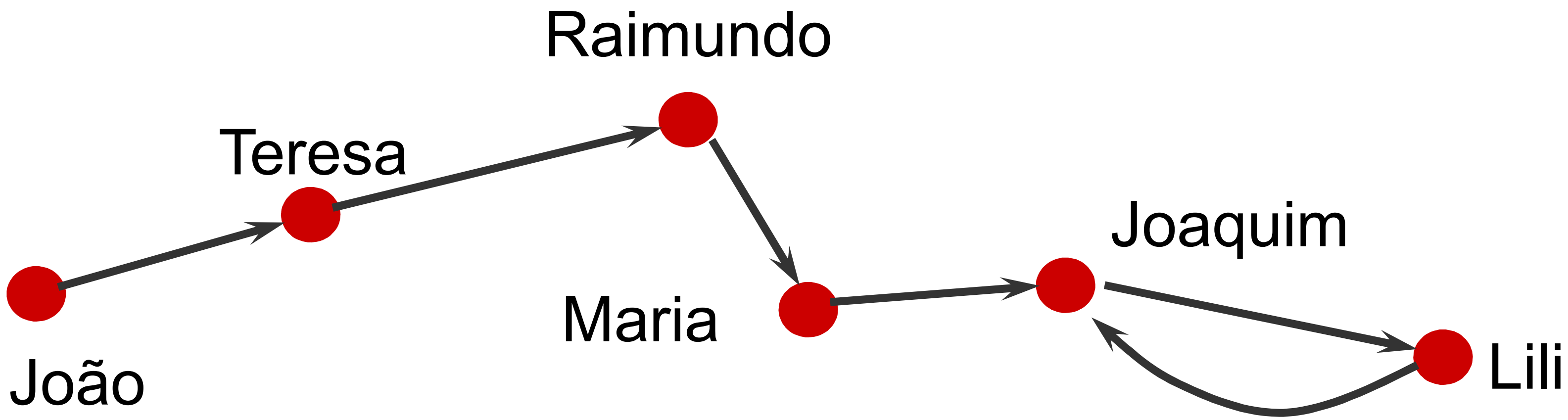
Grafos

Aplicações

- Cada vértice é uma tarefa de um grande projeto. Há uma aresta de x a y se x é pré-requisito de y, ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar.
- Cada vértice é uma página na teia WWW. Cada aresta é um link que leva de uma página a outra (Há cerca de 2 milhões de vértices e 5 milhões de arcos).
- Outros: Redes de computadores, rotas de vôos, redes de telefonia, etc

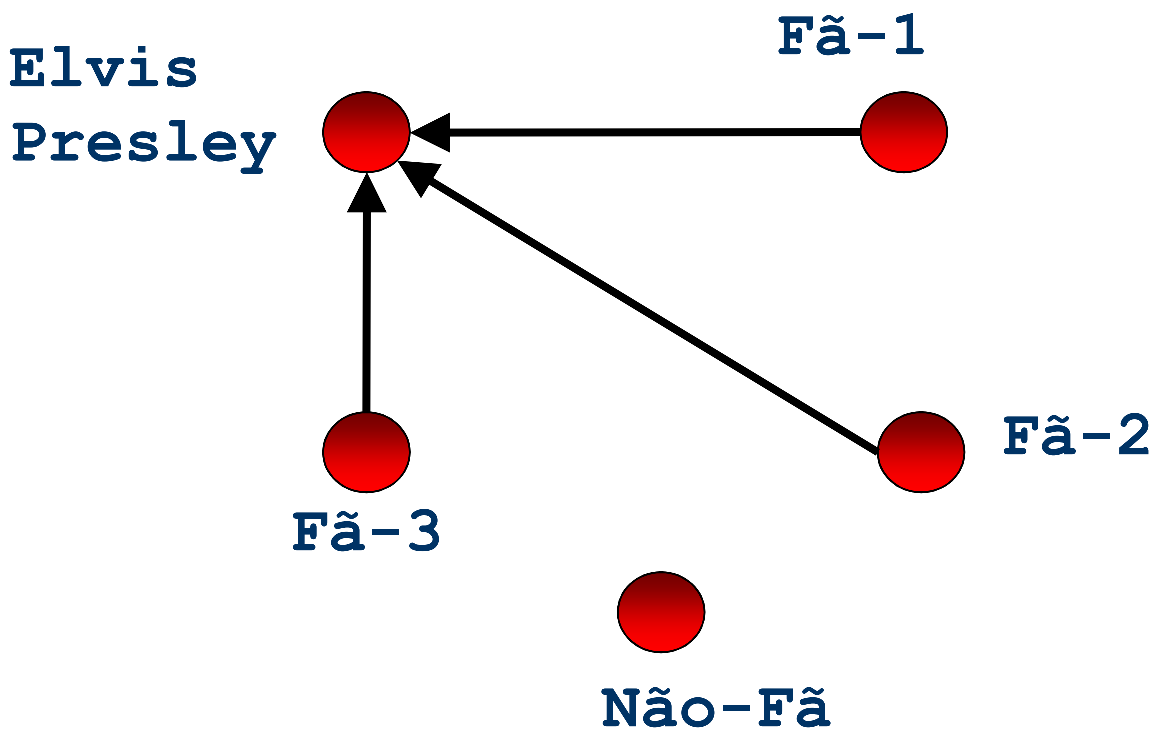
Grafos
Aplicações

"João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém..." (Carlos Drummond de Andrade)



Grafos
Aplicações

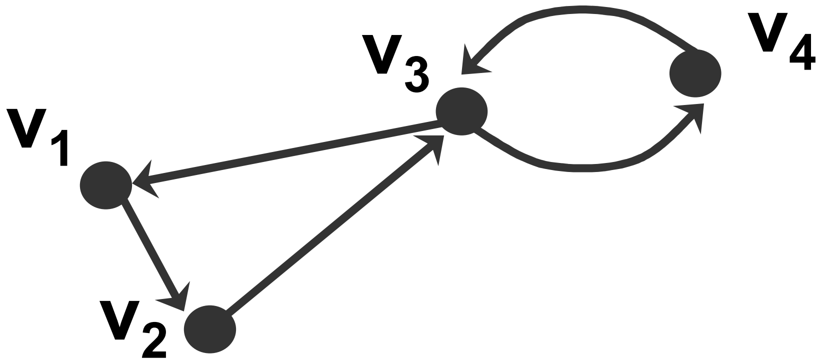
- O Grafo “sou fã de...”



Grafos
Orientados

- Um grafo **orientado** (ou **dígrafo**) $D = (V, E)$ consiste de um conjunto V (vértices) e de um conjunto de E (arestas) de pares ordenados de vértices distintos.

Representação :



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

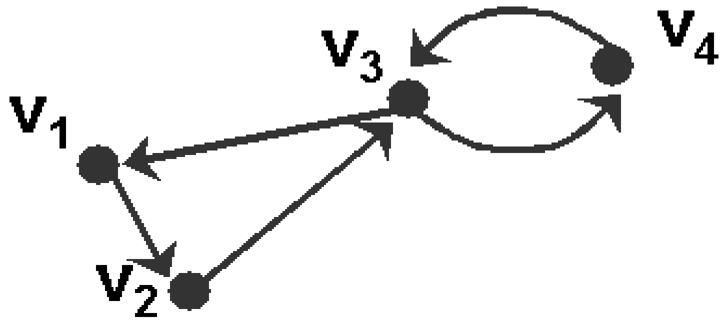
$E(G) = \{(v_1, v_2); \quad (v_3, v_1); \quad (v_2, v_3); \quad (v_3, v_4); \quad (v_4, v_3)\}$

Grafos Orientados

- Em um grafo <u>orientado</u>, cada aresta $e = (x, y)$ possui uma <u>única direção</u> de x para y. Diz-se que (x, y) é **divergente** de x e **convergente** a y. Assim:

(v_3, v_1) é divergente de v_3

(v_3, v_1) é convergente a v_1



Grafos
Grau

- O **Grau** $d(v)$ de um vértice v corresponde ao <u>número de vértices adjacentes</u> a v (ou ao número de arestas incidentes a v).

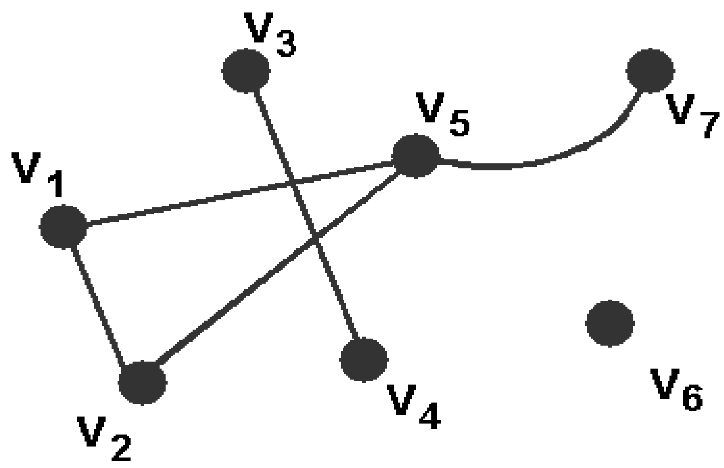
Exemplo:

$d(v_6) = 0$

$d(v_3) = d(v_4) = d(v_7) = 1$

$d(v_1) = d(v_2) = 2$

$d(v_5) = 3$



Grafos

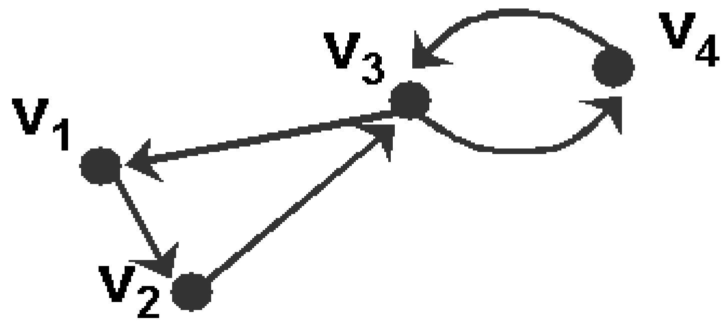
Grau

- Em um grafo orientado:
  - O **Grau de Saída** $d_{out}(v)$ de um vértice v corresponde ao número de arestas divergentes (que saem) de v.
  - O **Grau de Entrada** $d_{in}(v)$ de um vértice v corresponde ao número de arestas convergentes (que chegam) a v.

$d_{in}(v_3) = 2$ e $d_{out}(v_3) = 2$

$d_{in}(v_1) = d_{in}(v_2) = d_{in}(v_4) = 1$

$d_{out}(v_1) = d_{out}(v_2) = d_{out}(v_4) = 1$

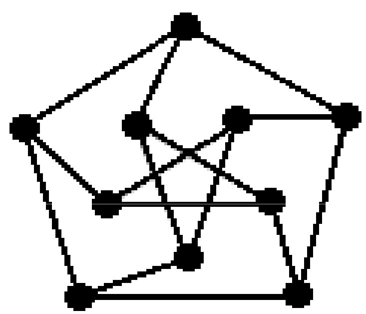


Grau

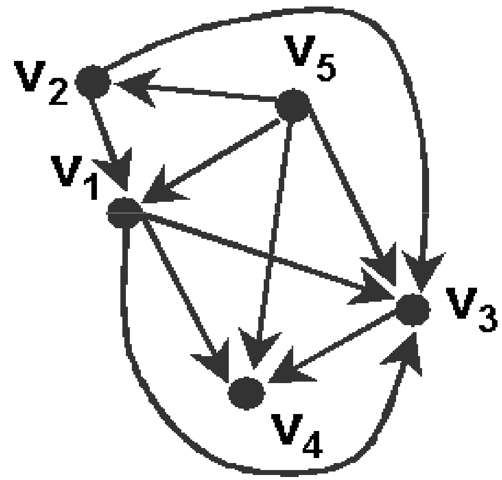
- Um vértice com grau de saída nulo, ou seja, dout(v) = 0, é chamado de sumidouro (ou sorvedouro).
- Um vértice com grau de entrada nulo, ou seja, din(v) = 0, é chamado de fonte.
- Diz-se que um grafo é **regular** se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau.

Grafos
Exercício de Fixação

(a)



(b)



- O grafo (a) é regular? Por quê?
- Existe alguma **fonte** ou **sumidouro** no grafo (b)?

Divisão do arquivo

- 3ª parte
  - Grafo Valorado
  - Caminho e Caminho Simples
  - Circuito, Ciclo, Grafo Cíclico
  - Caminho e Grafo: Hamiltoniano e Euleriano.
  - Subgrafo
  - Grafo: Conexo e (Totalmente) Desconexo
  - Dígrafo Fortemente Conexo
  - Componente Conexa
  - Exercícios

Grafos Valorados

- Um grafo valorado G(V, A) consiste de um conjunto finito não vazio de vértices V, ligados por um conjunto A de arestas (ou arcos) com pesos.
- O conjunto A consiste de triplas distintas da forma (v,w,valor), em que v e w são vértices pertencentes a V e valor é um número real.

Grafos Valorados

Quão minha amiga é uma certa pessoa ?

Grafos podem ter arestas com pesos representando a ‘força’ da relação entre os vértices:

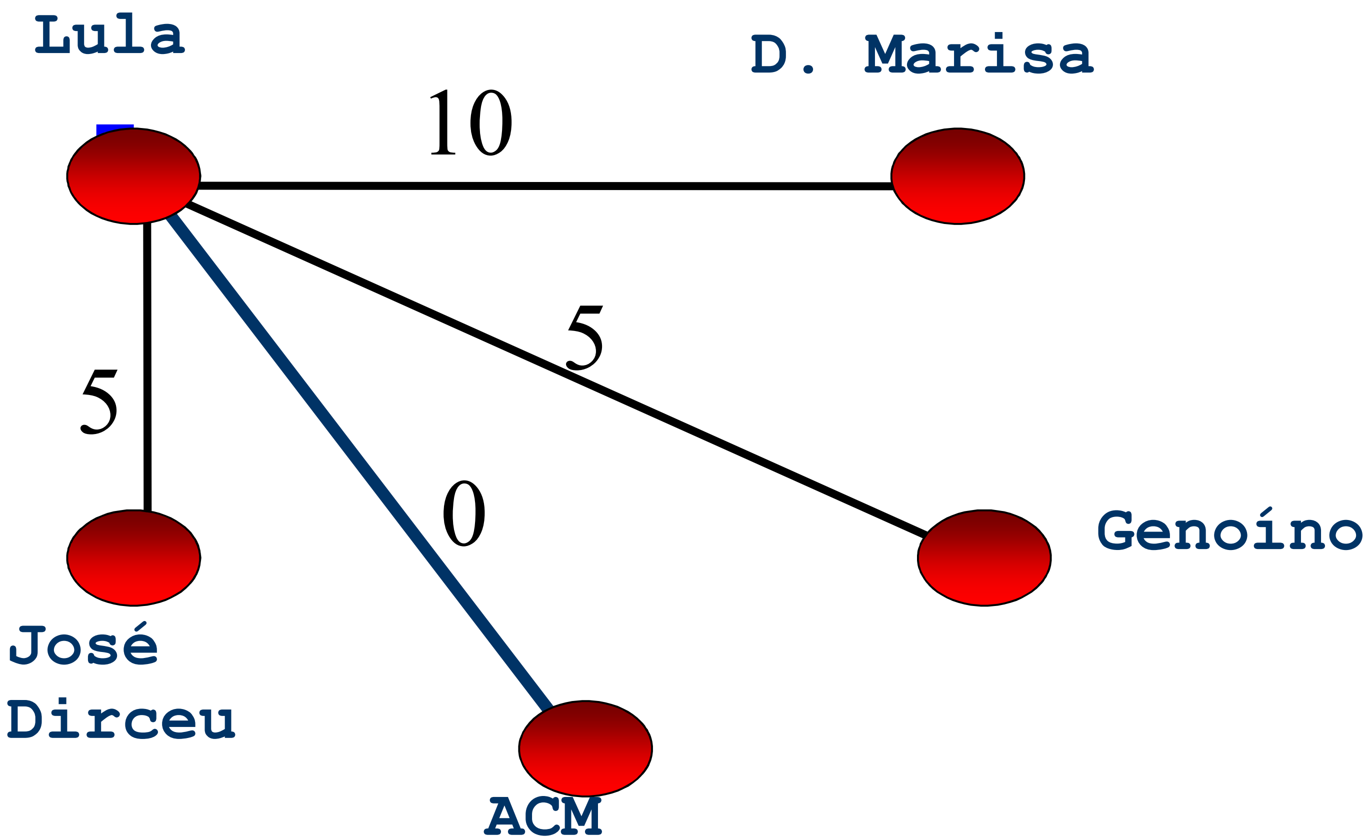
Ex.

0: inimiga

5: colega

10: amiga

Grafos Valorados – Exemplo

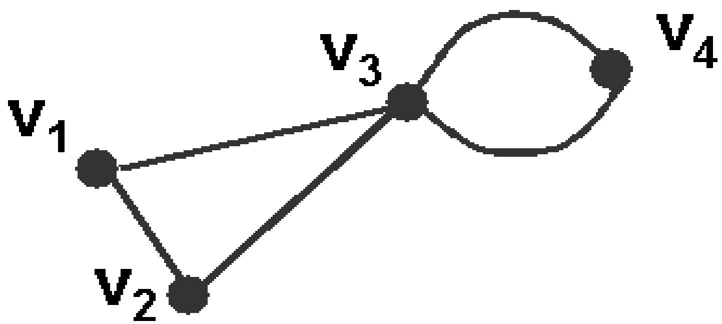


Grafos
Caminho

- Um **caminho** entre dois vértices, x e y, é uma seqüência de vértices e arestas que une x e y.
- Um caminho de **k**-vértices é formado por **k-1 arestas** (v_1,v_2), (v_2,v_3) ... (v_{k-1}, v_k), e o valor de k-1 é o **comprimento** do caminho.

$P = v_3,v_1,v_2 = P^2$

$P = v_3,v_4,v_3,v_1 = P^3$

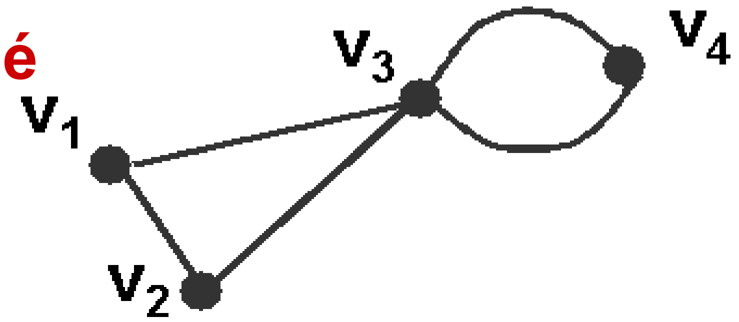


Caminho Simples

- Um caminho é **simples** se todos os <u>vértices</u> que o compõem forem <u>distintos</u>.

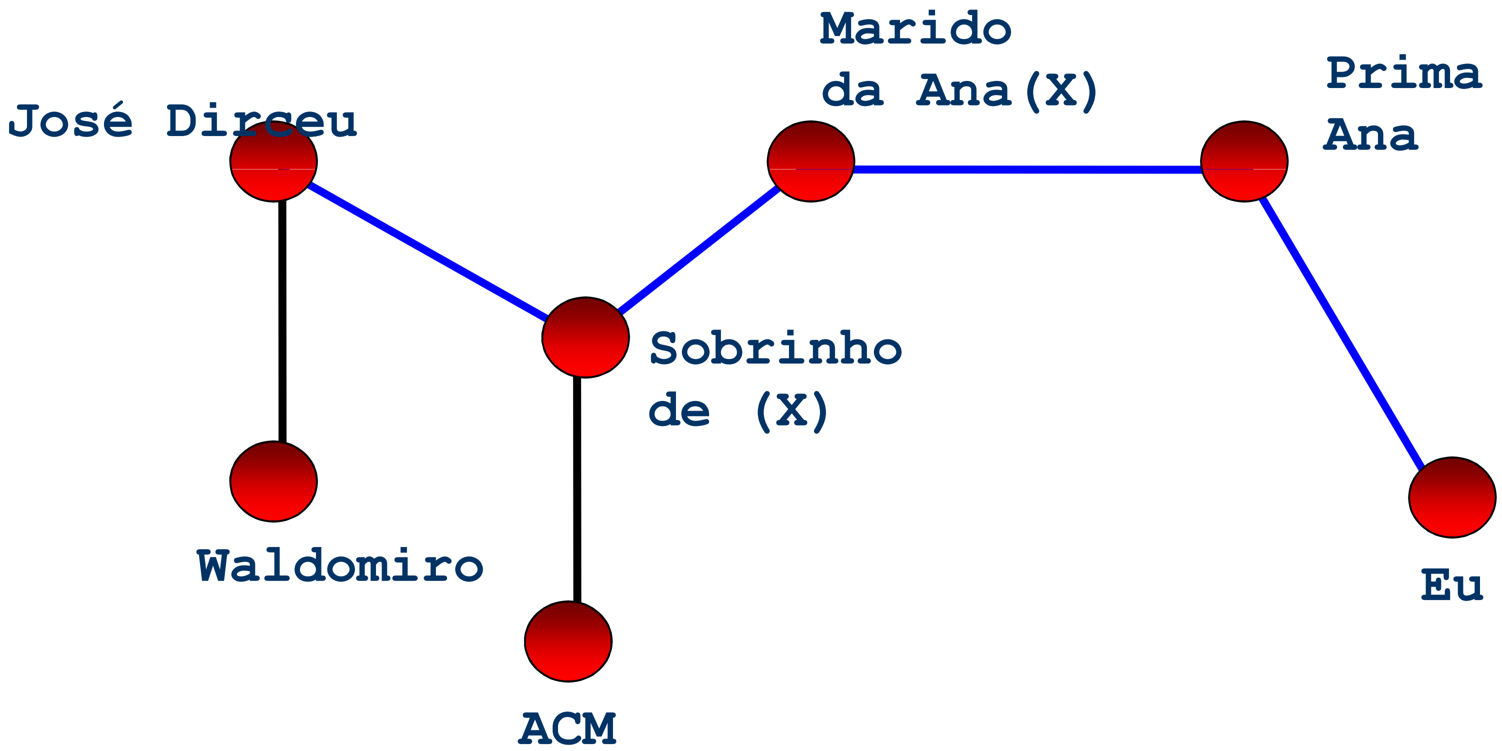
O caminho P= v_3,v_1,v_2 é simples

O caminho P= v_3,v_4,v_3,v_1 NÃO é simples



Caminho

O Grafo da Amizade…



Menor caminho

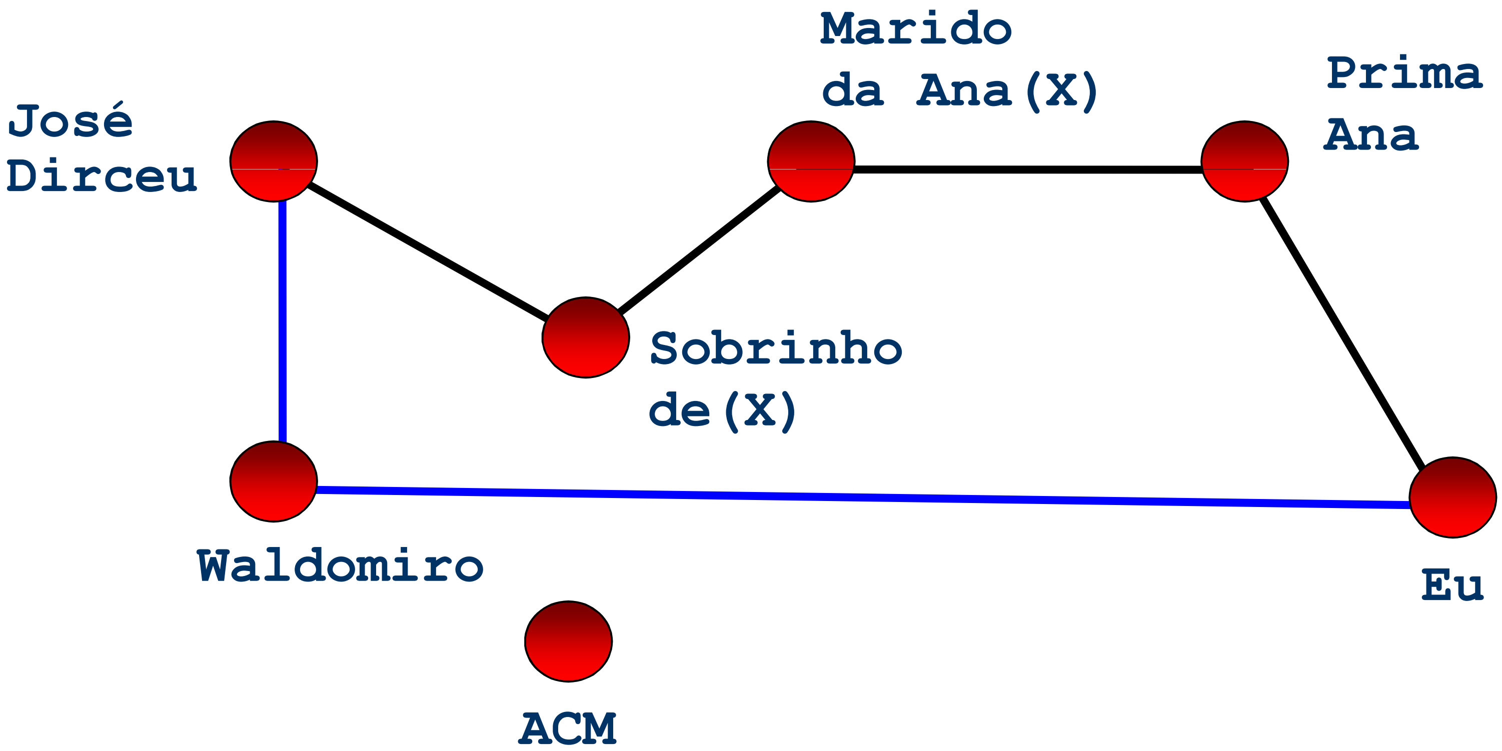
O Grafo da Amizade

Qual o menor caminho para me ligar a um político?

A multiplicidade de possíveis caminhos num grafo pode gerar a necessidade de buscar o menor caminho a um determinado vértice.

Exemplo de menor caminho

O Grafo da Amizade

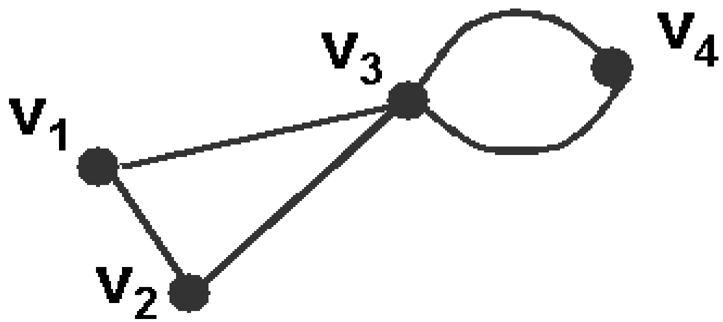


Grafos
Circuito e Ciclo

- Um circuito é um caminho P = $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$, onde $v_1 = v_{k+1}$. Um ciclo é um circuito onde todos os vértices são distintos (exceto pelo primeiro e pelo último).
- Um grafo é cíclico se apresentar ao menos um ciclo.

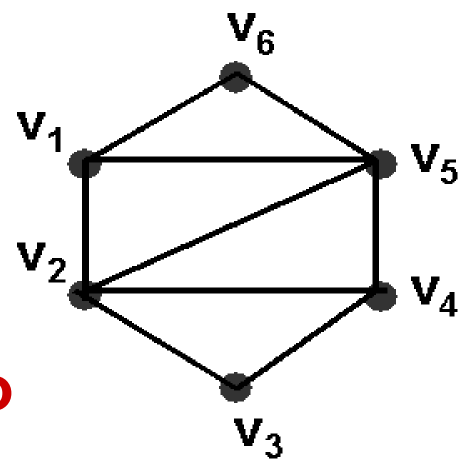
v_3, v_1, v_2, v_3 é um ciclo

Portanto, este grafo é cíclico



Caminho Hamiltoniano

- **Caminho Hamiltoniano** é aquele que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez.
- Um ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ é hamiltoniano quando o caminho $v_1, v_2, \ldots, v_k$ for um caminho hamiltoniano.



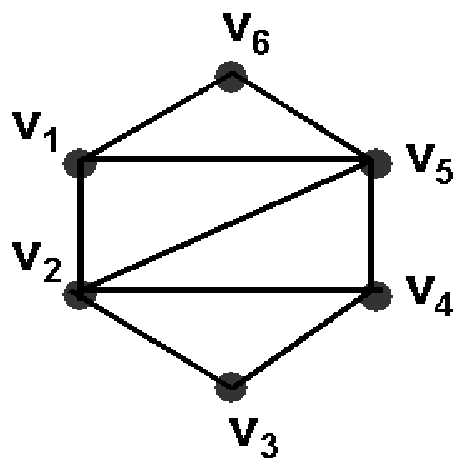
$v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$ é hamiltoniano

$v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ é um ciclo hamiltoniano

Grafos
Grafo Hamiltoniano

- Um grafo é Hamiltoniano se contiver um ciclo hamiltoniano.

$v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_6$ é um ciclo hamiltoniano, portanto o grafo é hamiltoniano

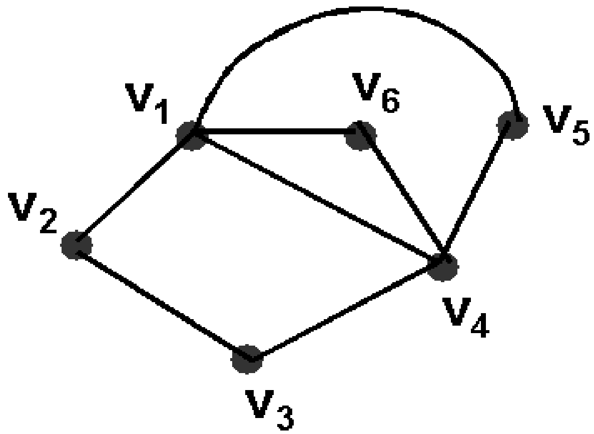


Grafos
Caminho Euleriano

- **Caminho Euleriano** é aquele que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez.
- Um grafo é **Euleriano** se há um circuito em G que contenha todas as suas arestas.

$v_1, v_6, v_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$ é euleriano

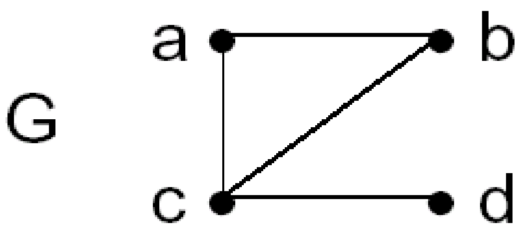
Portanto, este grafo é euleriano

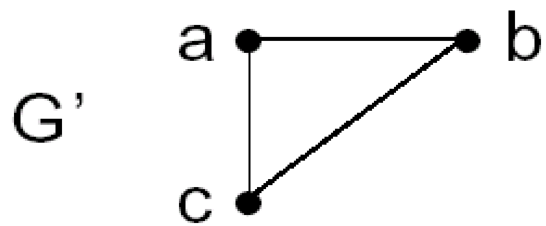


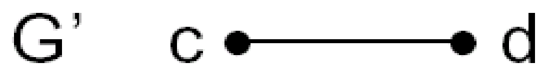
Grafos

Subgrafo

- **Um subgrafo $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.**

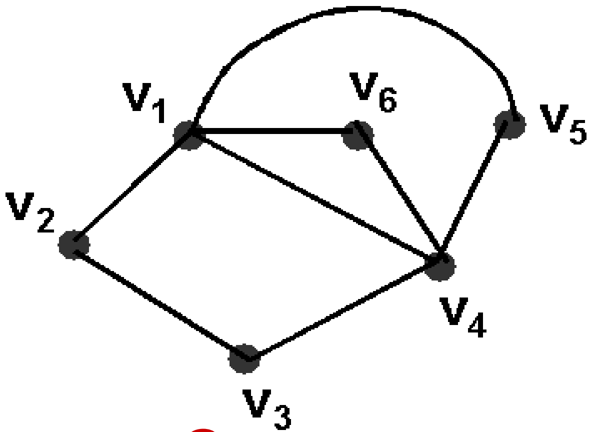




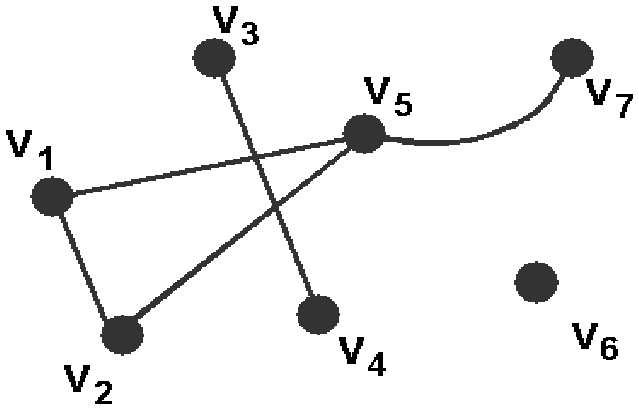


Grafo Conexo

- Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** quando existe um caminho entre cada par de vértices de G, caso contrário, G é **desconexo**. Para um grafo orientado, a decisão é feita SEM considerar a orientação da arestas.



Conexo

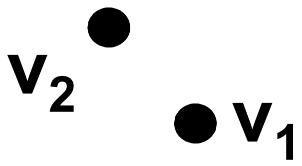


Desconexo

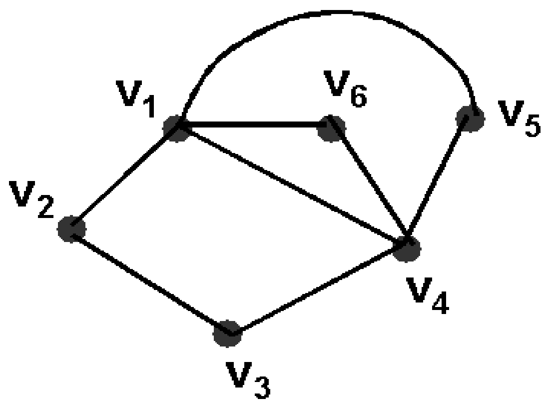
Grafos

Grafo Conexo

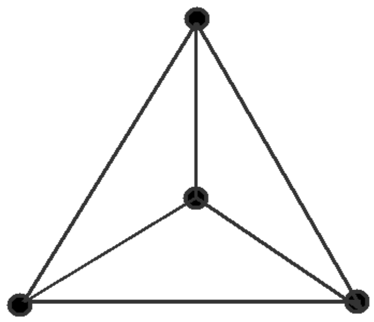
- Um grafo é **totalmente desconexo** quando <u>não</u> possui arestas.



- Todo grafo <u>euleriano</u> é **conexo** e todos os seus vértices possuem **grau par.**



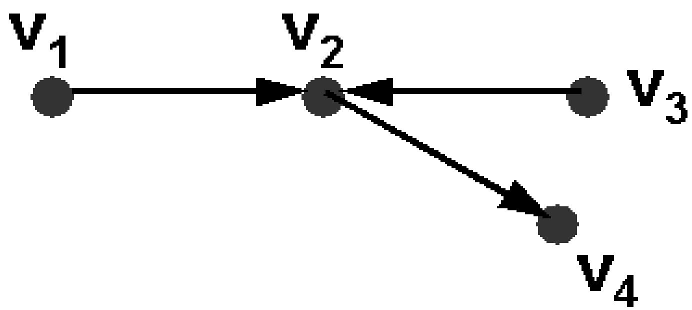
É euleriano



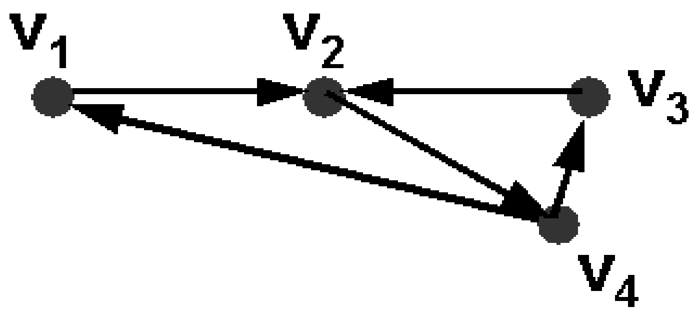
Não é euleriano

Dígrafo Fortemente Conexo

- Um grafo orientado $D = (V, E)$ é dito ser **fortemente conexo** quando existe um caminho entre cada par de vértices (x,y) e também entre (y,x).



Conexo

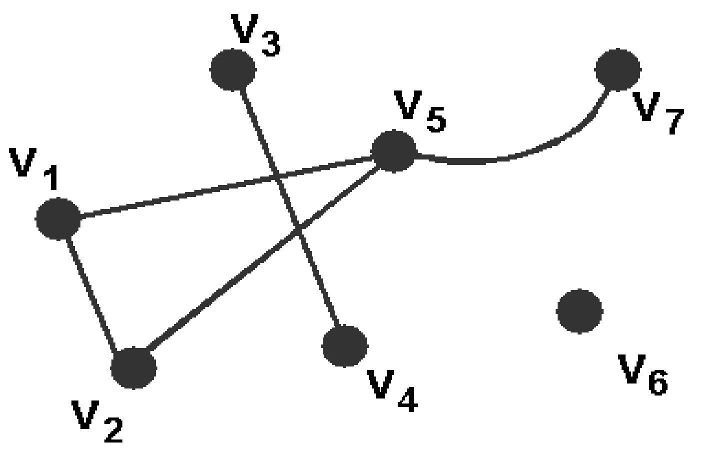


Fortemente Conexo

Grafos

Componente Conexa

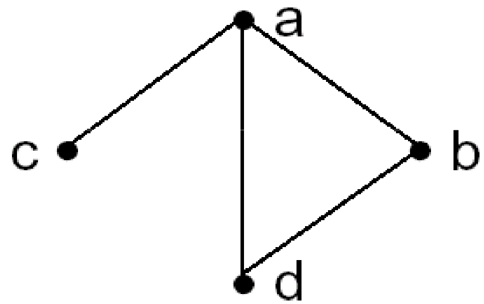
- Uma componente conexa corresponde a um subgrafo conexo maximal.



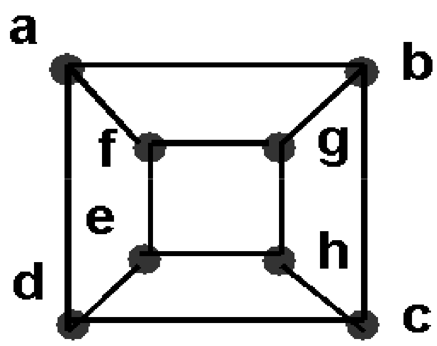
Contém 3 componentes conexas

Exercícios de Fixação

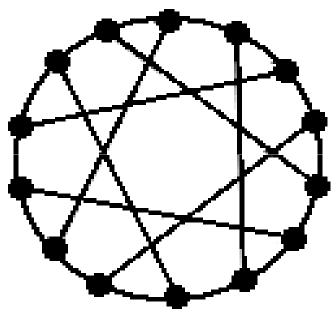
(a)



(b)



(c)



- Quais dos grafos acima são cíclicos?
- Indique os grafos que são conexos.
- Qual(is) dos grafos acima são Eulerianos? Quais são Hamiltonianos?

Grafos

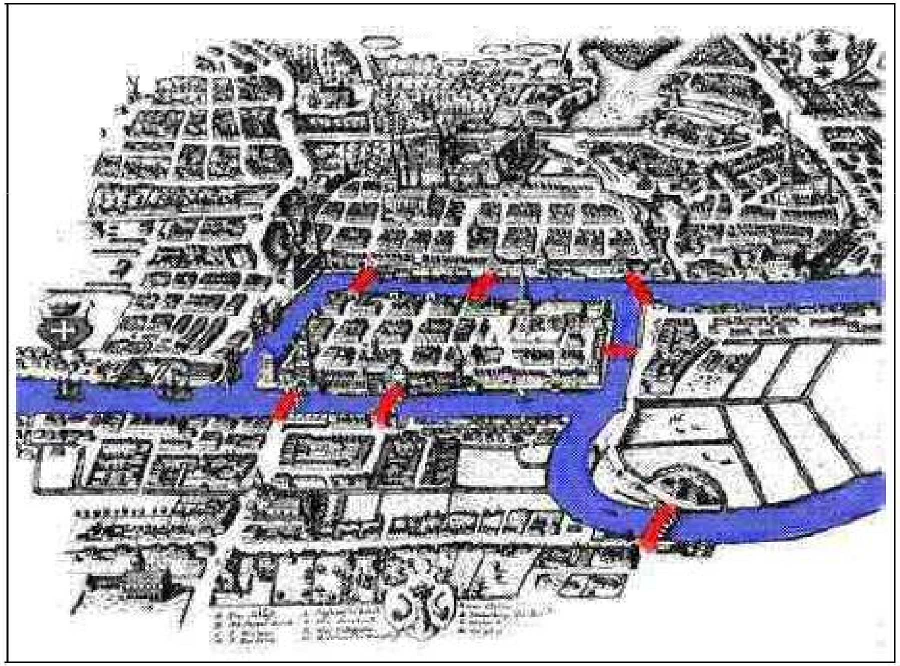
Exercício de Fixação

No século XVIII, na Prússia, havia uma controvérsia entre os moradores de Königsberg que chegou aos ouvidos do matemático Leonhard Euler.

Euler descreveu a controvérsia da seguinte forma:

"... Na cidade de Königsberg, na Prússia, há uma ilha chamada Kneiphhof, com os dois braços do rio Pregel fluindo em volta dela. Há 7 pontes – a, b, c, d, e, f e g – cruzando estes dois braços.

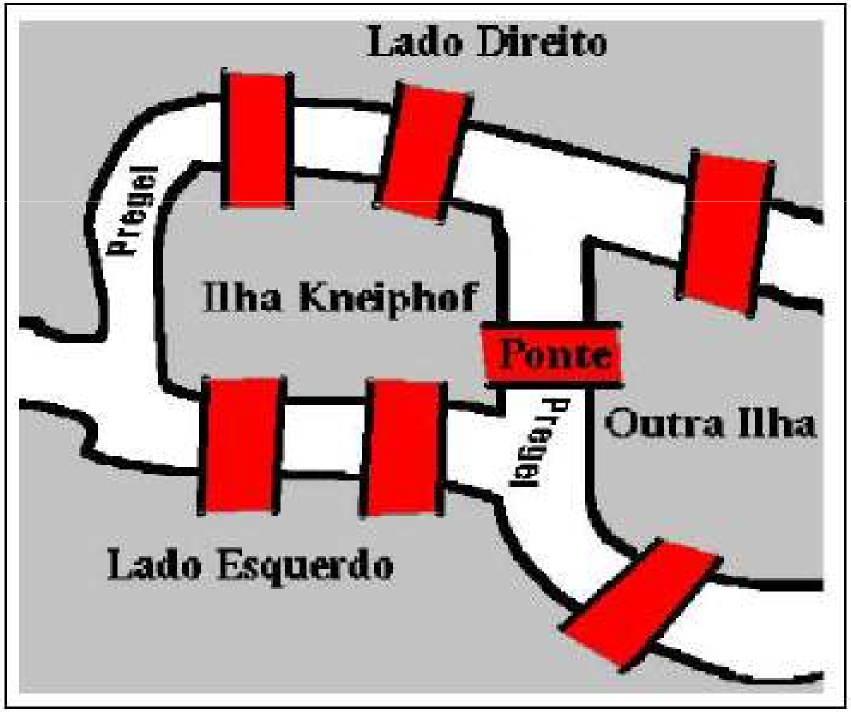
...A questão é se uma pessoa pode planejar uma caminhada de modo que ela cruze cada uma destas pontes uma única vez, e não mais que isso. . . "

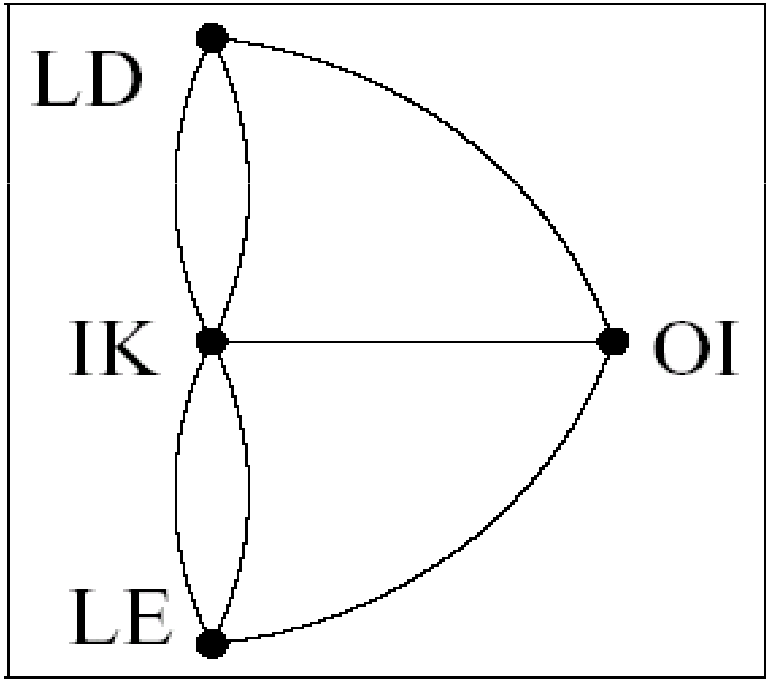


Como representar este problema?

Grafos

Exercício de Fixação

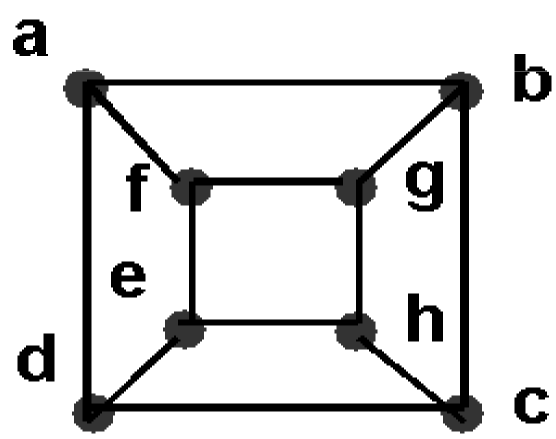




Por que não foi possível fazer tal trajeto?

Resposta

- Todos são cíclicos
- Todos são conexos
- Nenhum é Euleriano
- b) e c) Hamiltoniano.
- No grafo b)
  (a,b,c,h,g, f,e,d,a)



Divisão do arquivo

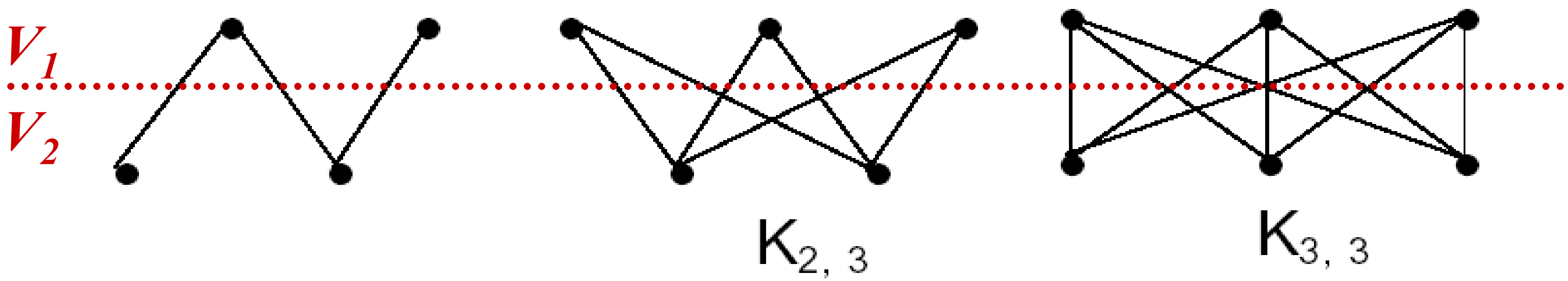
- 4ª parte
  - Grafo Bipartido, Bipartido Completo
  - Complemento
  - Isomorfismo
  - Árvore, Árvore Enraizada, Floresta
  - Subgrafo, Subgrafo Gerador, Árvore Geradora, Sugrafo Induzido
  - Exercícios

Grafos

Grafo Bipartido

- Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido quando o seu conjunto de vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos V_1, V_2 tais que toda aresta do conjunto E une um vértice de V_1 a outro vértice de V_2. Matematicamente:

$$V = V_1 \cup V_2;\ V_1 \cap V_2 = \varnothing \text{ e } \forall e = (u,v) \in E \Rightarrow u \in V_1 \text{ e } v \in V_2$$



Grafos

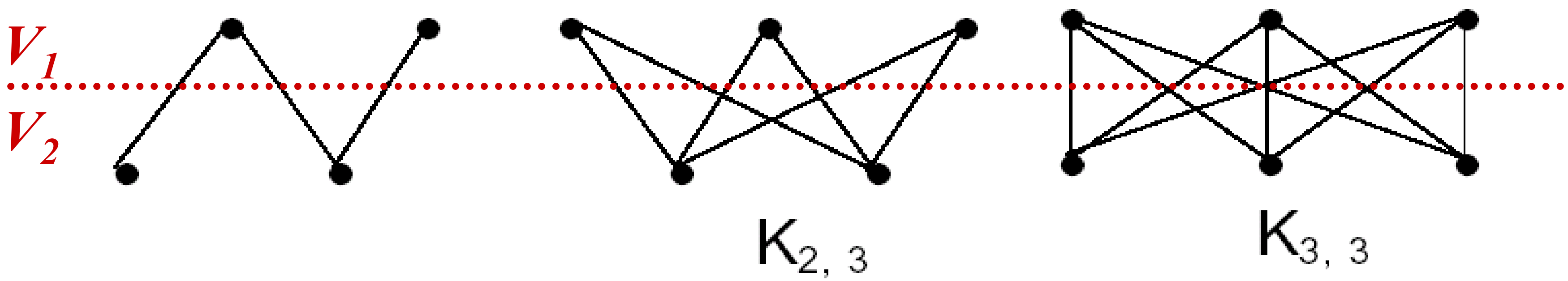
Grafo Bipartido Completo

- **Bipartido:**

  $V = V_1 \cup V_2;\ V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e $\forall e = (u,v) \in E \Rightarrow u \in V_1$ e $v \in V_2$

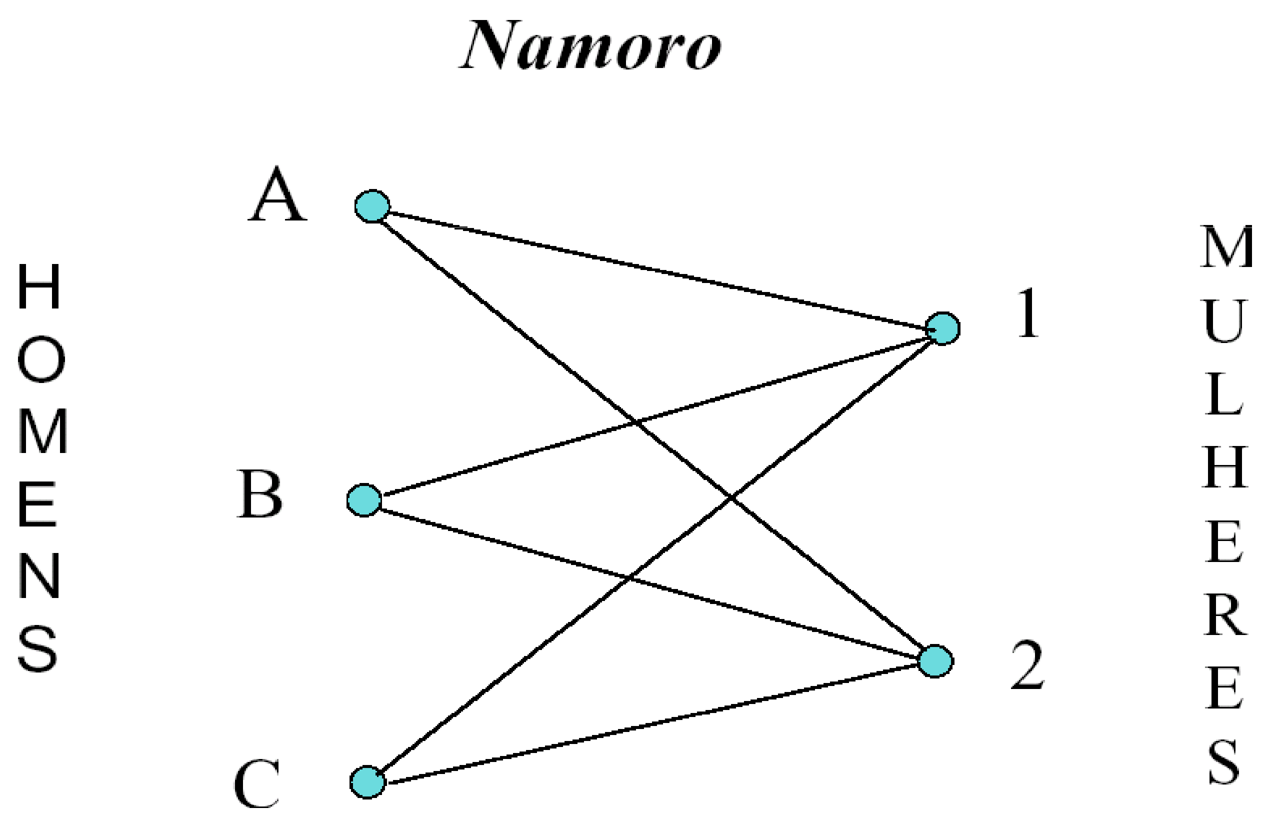
- **Bipartido Completo (notação $K_{|V_1|,|V_2|}$):**

$V = V_1 \cup V_2;\ V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e $\forall e = (u,v) \in E \Rightarrow u \in V_1$ e $v \in V_2$; $\forall u \in V_1 ,\ \forall v \in V_2 \Rightarrow e = (u,v) \in E$



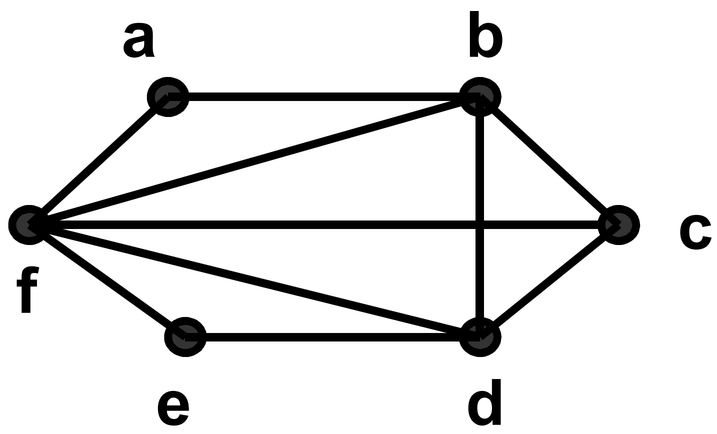
Grafos

Grafo Bipartido

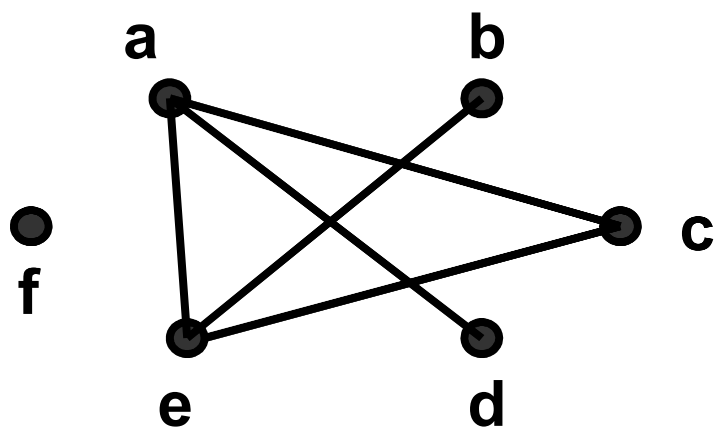


Complemento

- Denomina-se complemento de um grafo G = (V, E) a um grafo G' = (V', E') tal que V' = V e E' é complementar a E.



G

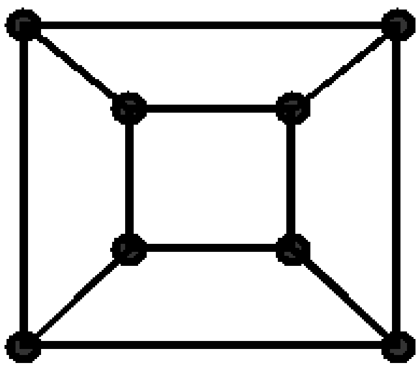


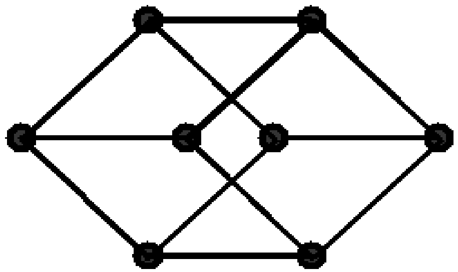
Complemento de *G*

Grafos
Isomorfismo

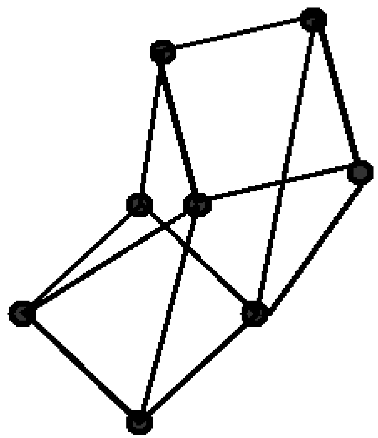
- **Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos entre si se existe correspondência entre os seus vértices e arestas de forma a preservar a relação de incidência, ou seja, $| V | = | V'|$, $| E | = | E'|$ e existe uma função unívoca $f : V \to V'$, tal que e=(x,y) $\in E$ se e somente se e'=(f(x),f(y)) $\in E'$.**

G





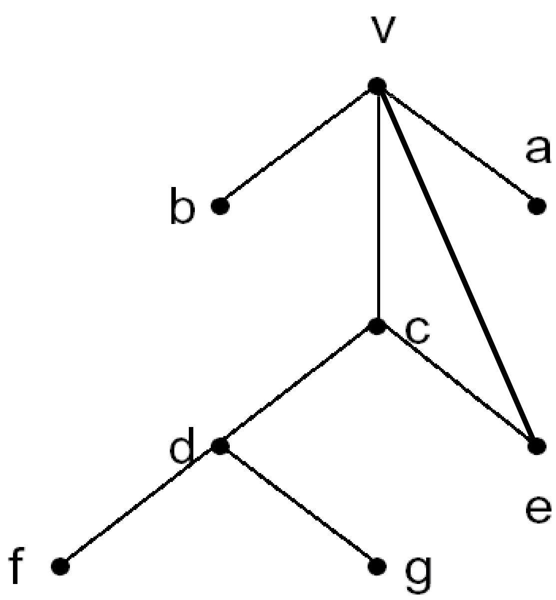
É isomorfo a G



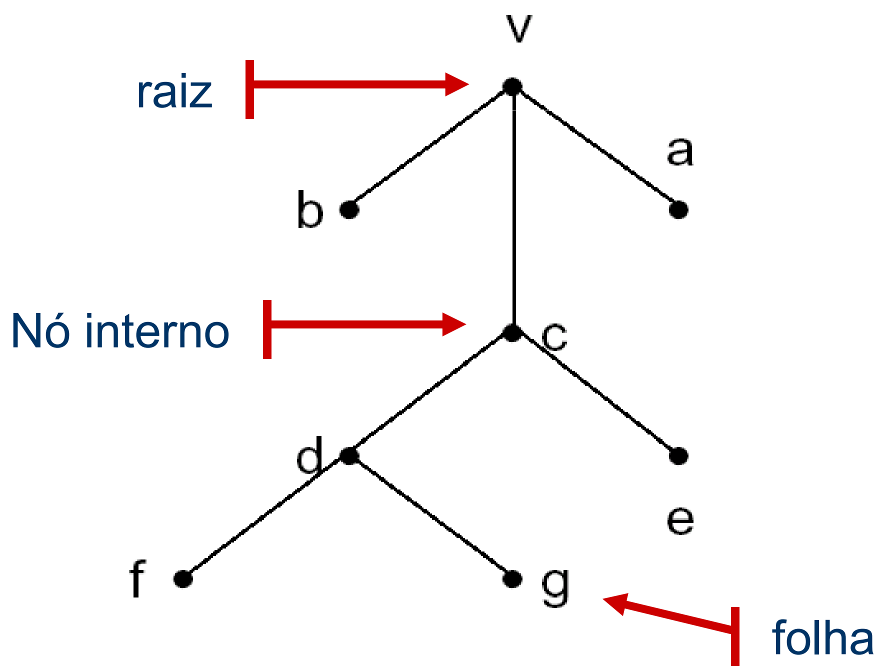
NÃO É isomorfo a G

Grafos
Árvore

- Uma árvore é um grafo <u>conexo</u> e <u>acíclico</u>.



Não é uma árvore

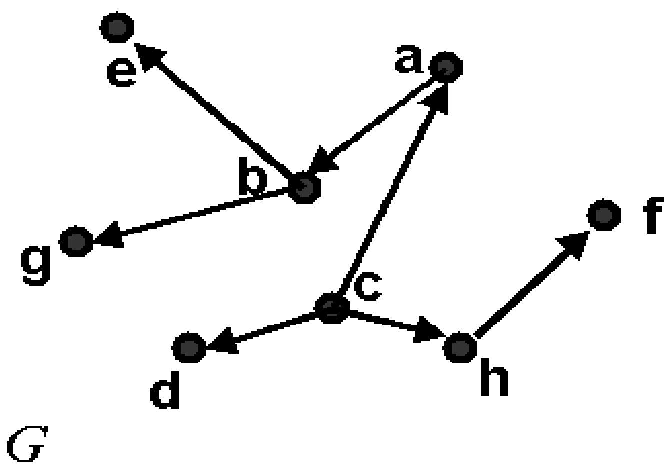


É uma árvore

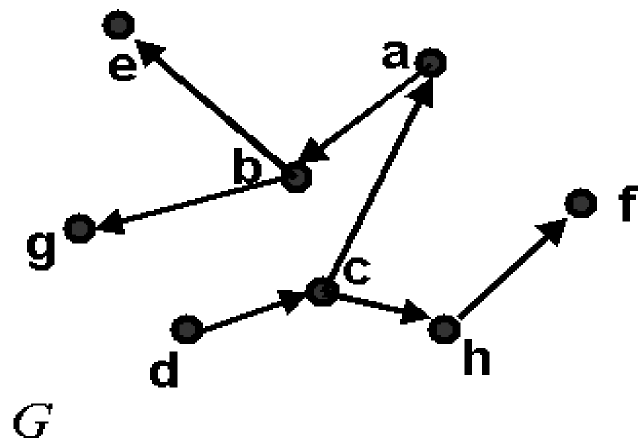
Grafos

Árvore Enraizada

- Uma **árvore enraizada** é uma <u>árvore orientada</u> em que há um vértice (**raiz**) do qual todas as arestas se afastam.



É árvore enraizada
(raiz c)

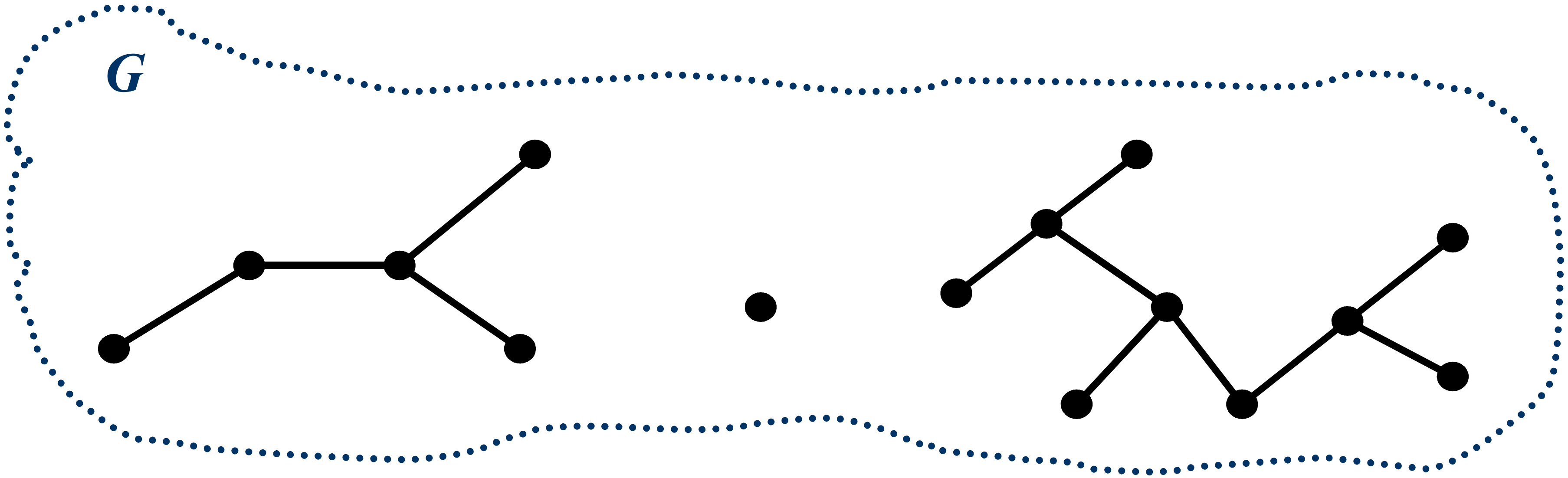


É árvore enraizada
(raiz d)

Grafos

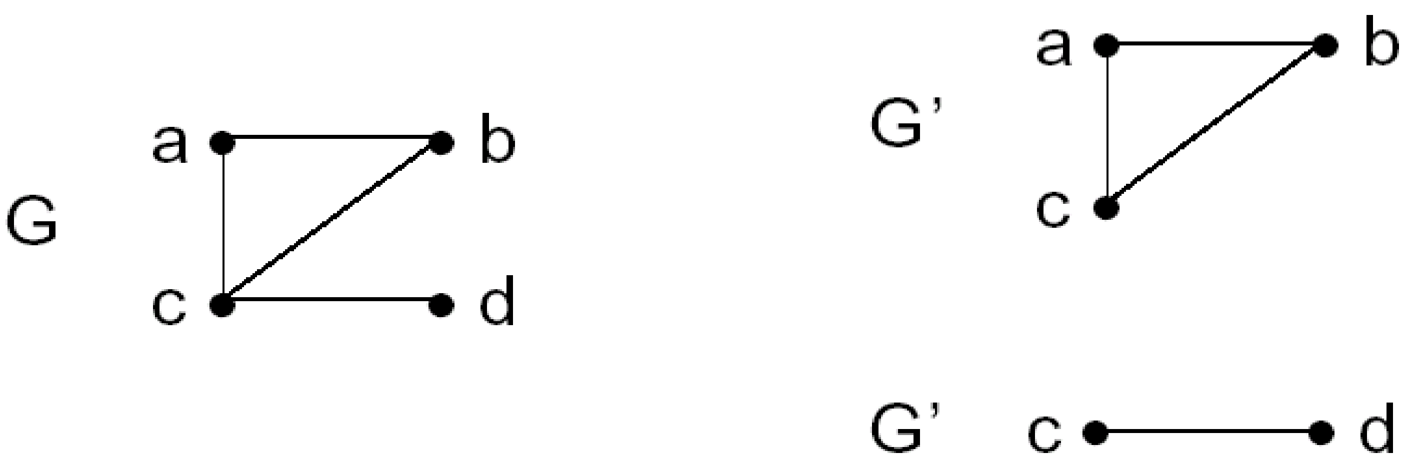
Floresta

- Uma **Floresta** é um <u>conjunto</u> <u>de</u> <u>árvores</u>.



Subgrafo

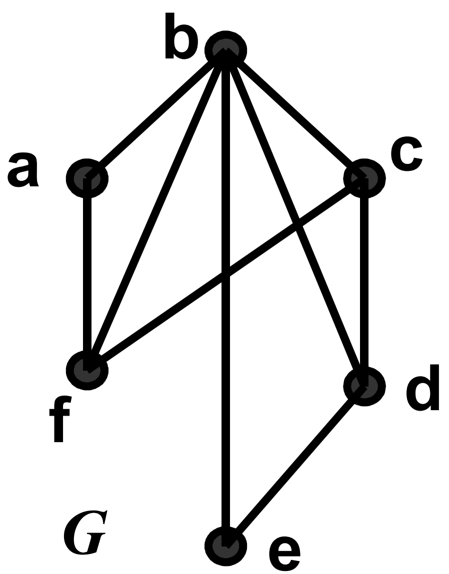
- Um **subgrafo** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

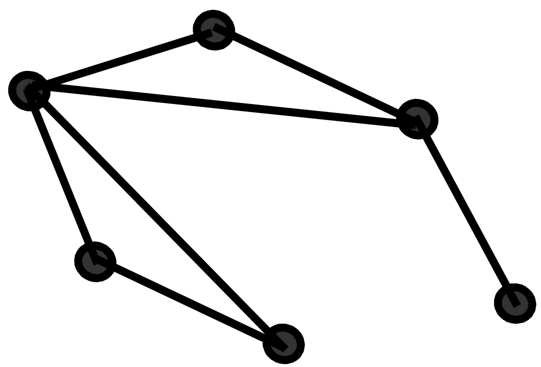


Grafos

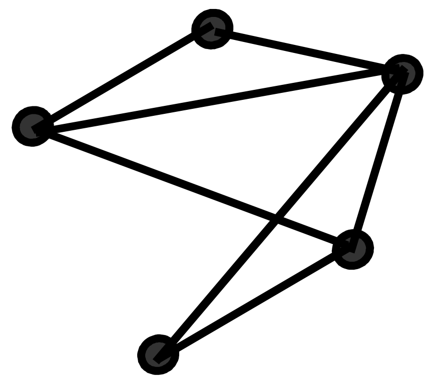
Subgrafo Gerador

- Um subgrafo gerador $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' = V$ e $E' \subseteq E$.





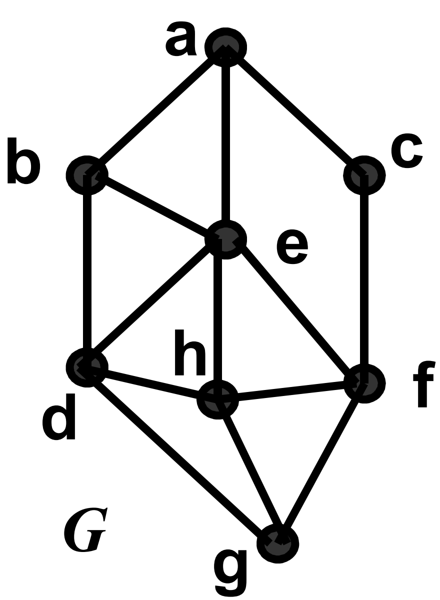
É subgrafo gerador de G

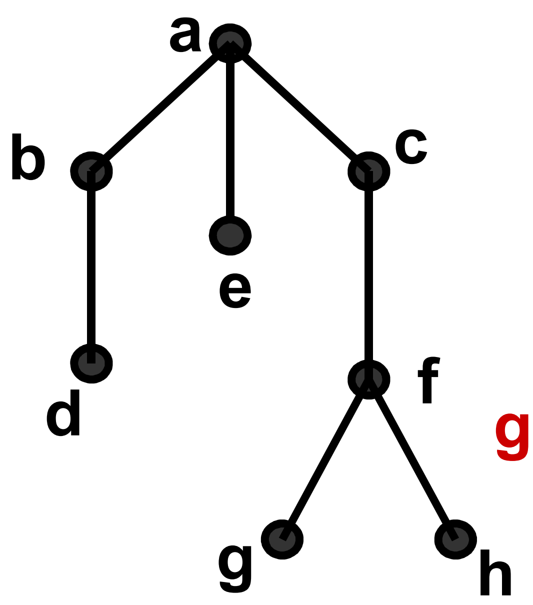


NÃO é subgrafo gerador de G

Árvore Geradora

- Uma **árvore geradora** $G' = (V', E')$ de um grafo é um subgrafo gerador que é uma árvore.

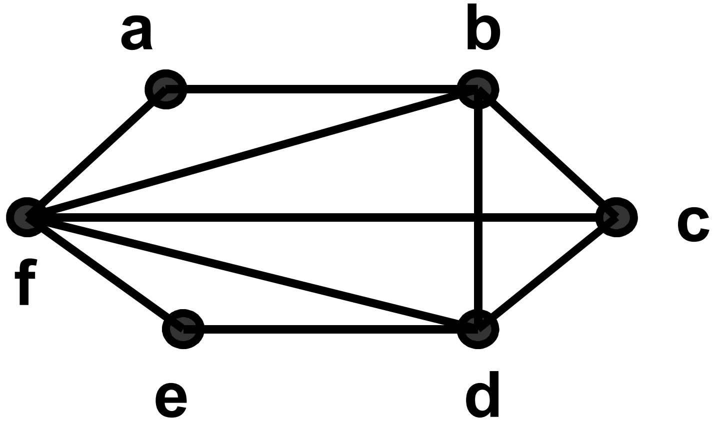




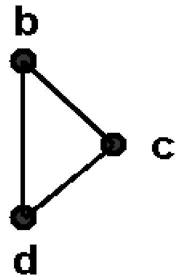
É árvore geradora de G

Subgrafo Induzido

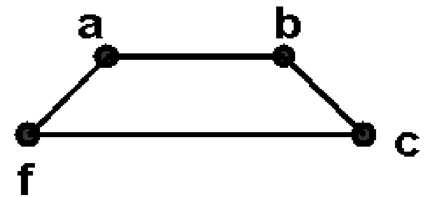
- Um **subgrafo induzido** $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e E' contém todas as arestas em E que tem as duas extremidades em V'.



G



É subgrafo induzido de G

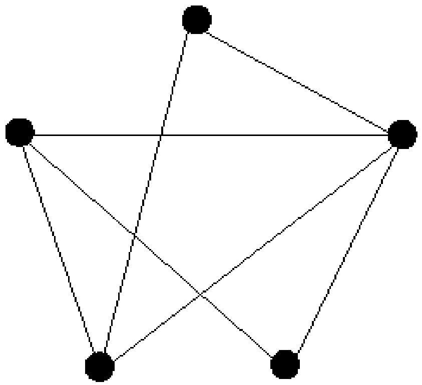


NÃO é subgrafo induzido de G

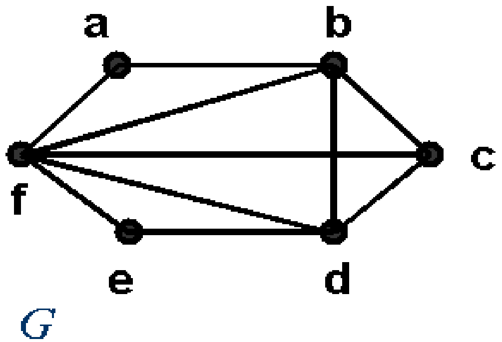
Grafos

Exercícios de Fixação

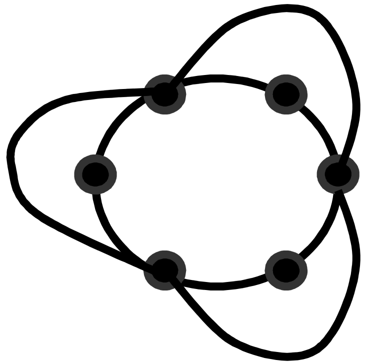
(a)



(b)



(c)



- Quais os complementos dos grafos (a) e (c)?
- Os grafos (b) e (c) são isomorfos?
- Represente graficamente um grafo $K_{4,3}$.

Divisão do arquivo

- 5ª parte
  - Estrutura de Dados: Matriz de Adjacências e Estrutura de Adjacências.
  - TAD Grafo
  - Comparação
  - Exercícios

Estruturas de Dados

- A escolha da estrutura de dados certa para a representação de grafos tem um enorme impacto no desempenho de um algoritmo.

- Há duas representações básicas:
  - Matriz de Adjacências
  - Listas Lineares de Adjacências

Matriz de Adjacências

- Dado um grafo $G = (V, E)$, a **matriz de adjacências** M é uma matriz de ordem *n x n*, tal que:

n = número de vértices

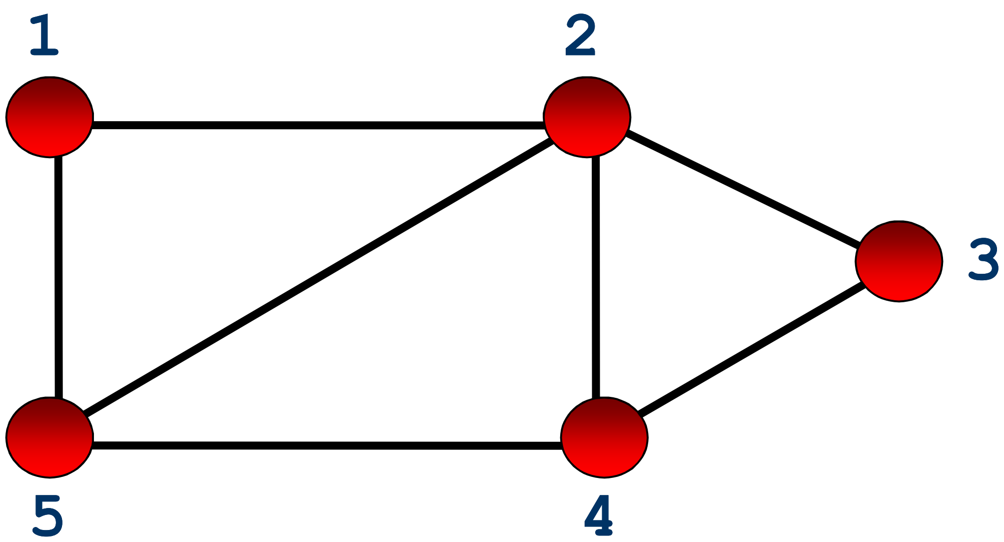
M[i,j] = 1, se existir aresta de i a j

M[i,j] = 0, se NÃO existir aresta de i a j

Grafos

Matriz de Adjacências

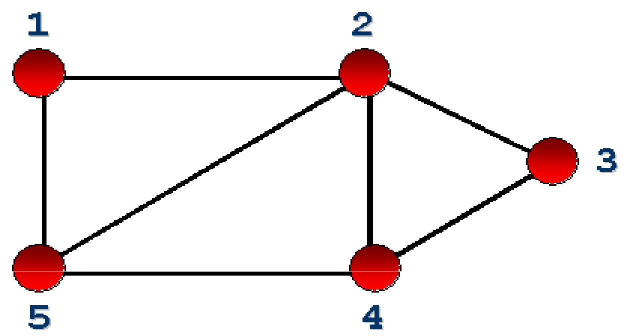
- Qual a matriz de adjacências do grafo a seguir?



Grafos

Matriz de Adjacências

- **Resposta:**



vértices

M =

1	2	3	4	5	
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	2
0	1	0	1	0	3
0	1	1	0	1	4
1	1	0	1	0	5

Grafos
Matriz de Adjacências

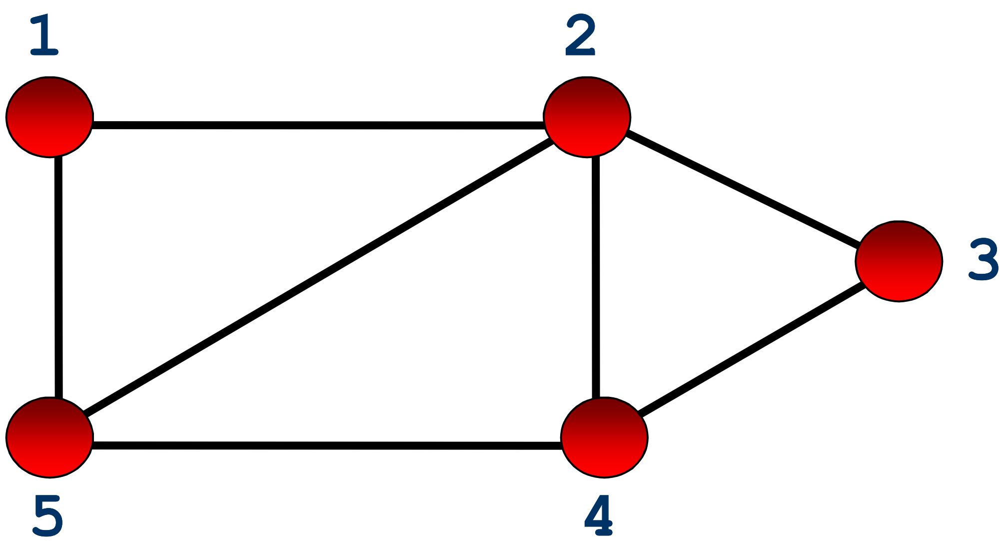
- Forma mais simples de representação.
- Propriedades:
  - representa um grafo sem ambigüidade
  - é simétrica para um grafo não direcionado
  - Armazenamento: $O(n^2)$
  - Teste se aresta (i,j) está no grafo: $O(1)$
- Uma matriz de adjacências caracteriza univocamente um grafo. Mas, um mesmo grafo pode corresponder a várias matrizes diferentes.

Estrutura de Adjacências

- Dado um grafo $G = (V, E)$, a **estrutura de adjacências** A é um conjunto de n listas $A(v)$, uma para cada vértice v pertencente a V. Cada lista $A(v)$ é denominada **lista de adjacências** do vértice v e contém os vértices w adjacentes a v em G.
- Ou seja, a **estrutura de adjacências** é um vetor de n-elementos que são capazes de apontar, cada um, para uma lista linear. O i-ésimo elemento do vetor aponta para a lista linear das arestas que incidem no vértice i.

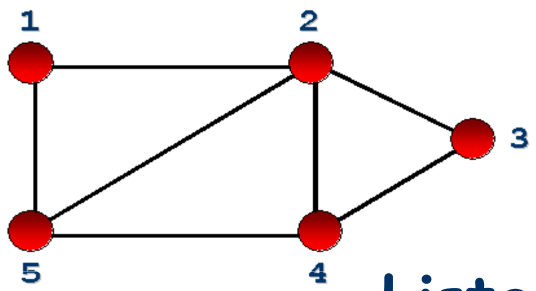
Grafos
Matriz de Adjacências

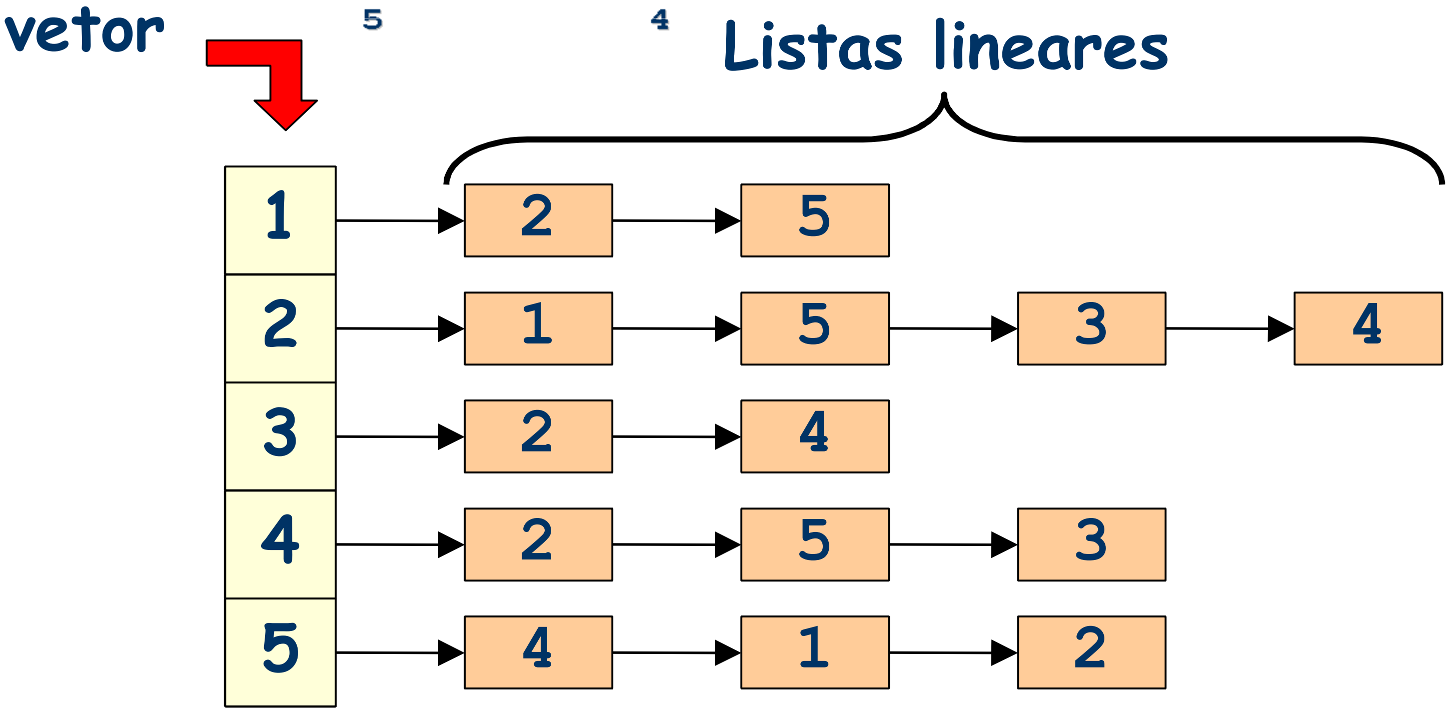
- Qual a estrutura de adjacências do grafo a seguir?



Grafos

Estrutura de Adjacências

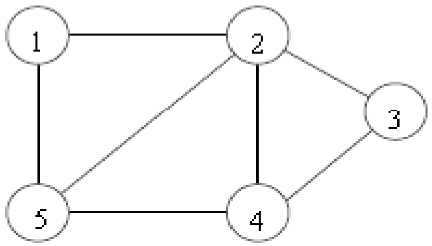


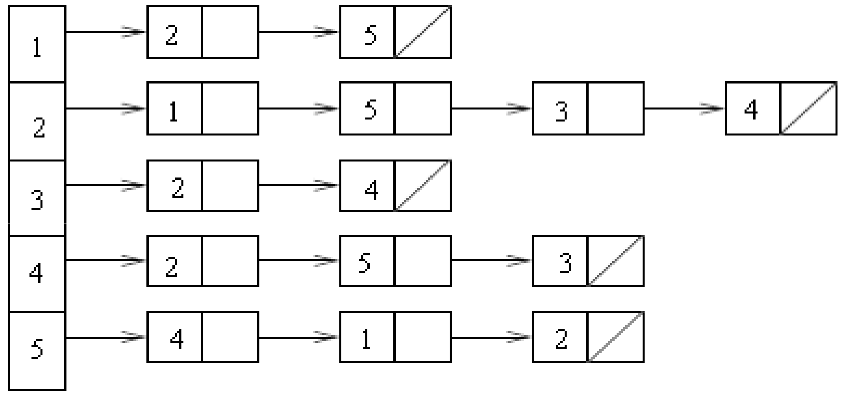


Grafos

Estruturas de Dados – exemplo fazer

▷ Grafo não orientado:



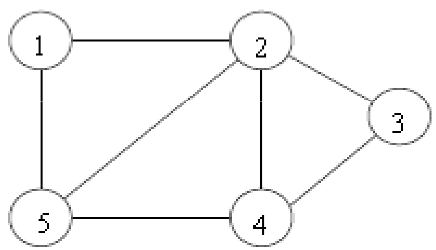


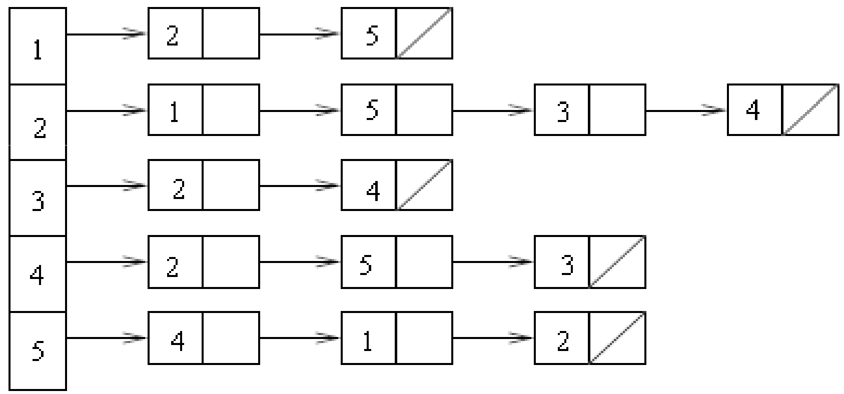
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Fonte: Material Cid S. Souza IC UNICAMP

Grafos
Estruturas de Dados – exemplo

▷ <u>Grafo não orientado</u>: representação sem uso de ponteiros.





Indice_Adj

1	2	3	4	5	6
1	3	7	9	12	15

Adj

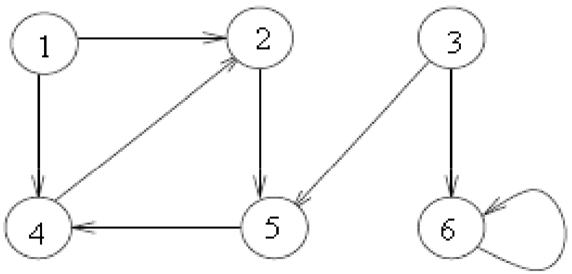
2	5	1	3	4	5	2	4	2	3	5	1	2	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Fonte: Material Cid S. Souza IC UNICAMP

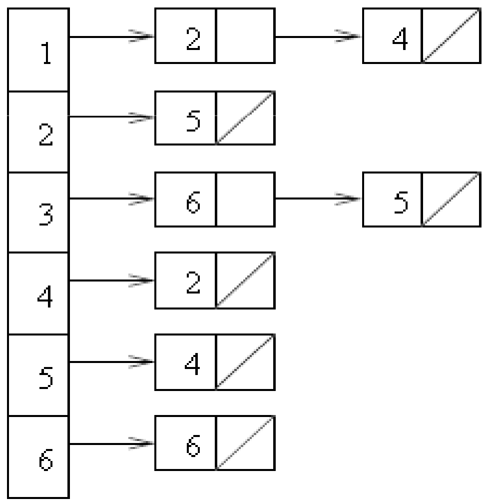
Grafos

Estruturas de Dados – exemplo 2 fazer

▷ Grafo orientado:



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1



Fonte: Material Cid S. Souza IC UNICAMP

TAD Grafo

Operadores do TAD Grafo

1. Criar um grafo vazio.
2. Inserir uma aresta no grafo.
3. Verificar se existe determinada aresta no grafo.
4. Obter a lista de vértices adjacentes a determinado vértice.
5. Retirar uma aresta do grafo.
6. Imprimir um grafo.
7. Obter o número de vértices do grafo.
8. Obter o transposto de um grafo direcionado.
9. Obter a aresta de menor peso de um grafo.

Fonte: slides livro N. Ziviani

Estrutura de Adjacências

- Representação mais elaborada.
- Armazenamento: O(m + n)
- Teste se aresta (i,j) está no grafo: $O(d_i)$, com d_i sendo o grau do vértice i.

Grafos

Comparação

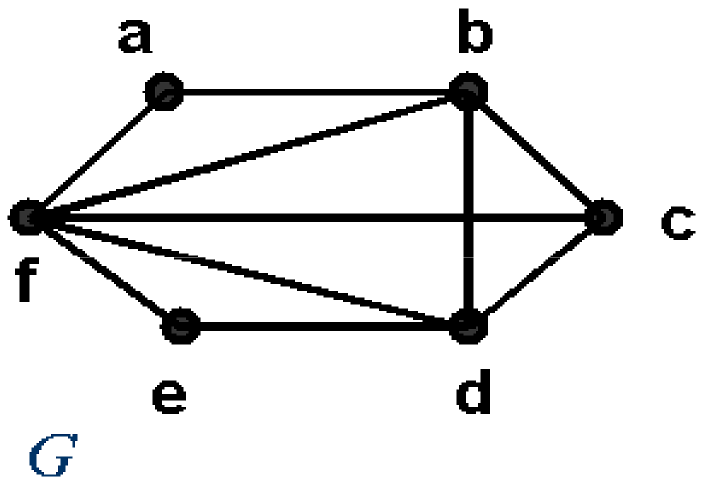
	Matriz de Adjacência	Lista de Adjacência
Rapidez para saber se (x,y) está no grafo	X	
Rapidez para determinar o grau de um vértice		X
Menor memória em grafos pequenos	$O(n^2)$	$O(m + n)$
Menor memória em grafos grandes	X	

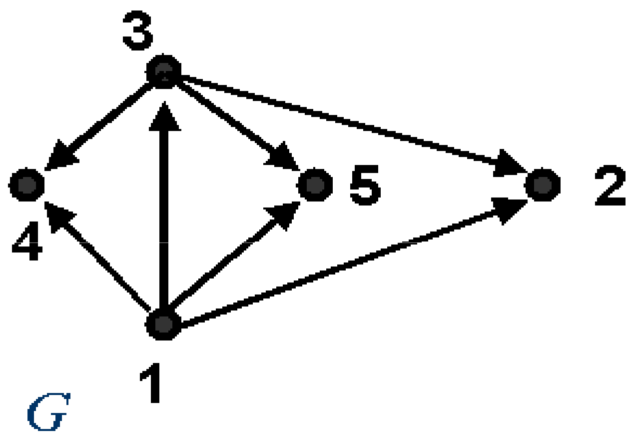
Grafos

Comparação

	Matriz de Adjacência	Lista de Adjacência
Inserção/Remoção de arestas	O(1)	O(d)
Melhor na maioria dos problemas		X
Rapidez para percorrer o grafo	$O(n^2)$	O(m + n)

Grafos
Exercício de Fixação





- Represente os grafos acima utilizando matriz de adjacências e estrutura de adjacências.

Por fim

- No final das aulas referentes ao material deste arquivo, espera-se que você tenha aprendido todos os conceitos introdutórios sobre Grafos.
- Para ajudar no aprendizado procure realizar algumas coisas, como:
  1. Defina formalmente e intuitivamente (através das duas próprias palavras) os tópicos ensinados na aula apresentados no slide “Divisão do Arquivo”.
  2. Resolva todos os exercícios propostos, e os sugeridos em sala de aula .
  3. Implemente o TAD Grafo usando as representações de matriz e de lista de adjacências.
  4. Revise os conceitos após a implementação.

Bons estudos!

Algoritmos e Estruturas de Dados II

Introdução a Grafos

Baseado no Material de aula da Profª.

Josiane M. Bueno

FIM