Definição. Para qualquer $n = 1, 2, 3, \cdots$, se uma função f tiver todas as derivadas até ordem n em algum intervalo contendo a como ponto interior, então o polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em a é o polinômio

$$P_n(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

onde $f^{(j)(a)}$ denota a derivada de ordem j no ponto a.

Exemplo 1. Encontrando os polinômios de Taylor para $f(x) = e^x$ em $x = 0$.

Solução. Como

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \cdots \quad , f^{(k)}(x) = e^x, \cdots ,$$

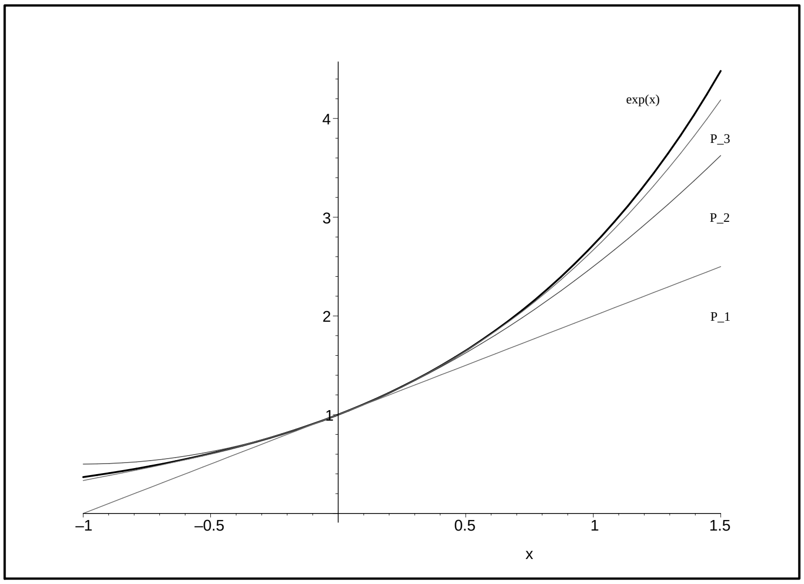
temos

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1, \cdots \quad , f^{(k)}(0) = e^0 = 1, \cdots ,$$

o polinômio de Taylor de ordem n em 0 é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Veja na figura a seguir o gráfico de $f(x) = e^x$ e seus polinômios de Taylor de ordem 1, 2 e 3. Note a proximidade dos gráficos perto do ponto $x = 0$.



Exemplo 2. Encontrando os polinômios de Taylor para $f(x) = \cos x$ em $x = 0$.

Solução. Como

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, \\ f''(x) = -\cos x, & f^{(3)}(x) = \sin x \\ f^{(4)}(x) = \cos x, & f^{(5)}(x) = -\sin x \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x. \end{array}$$

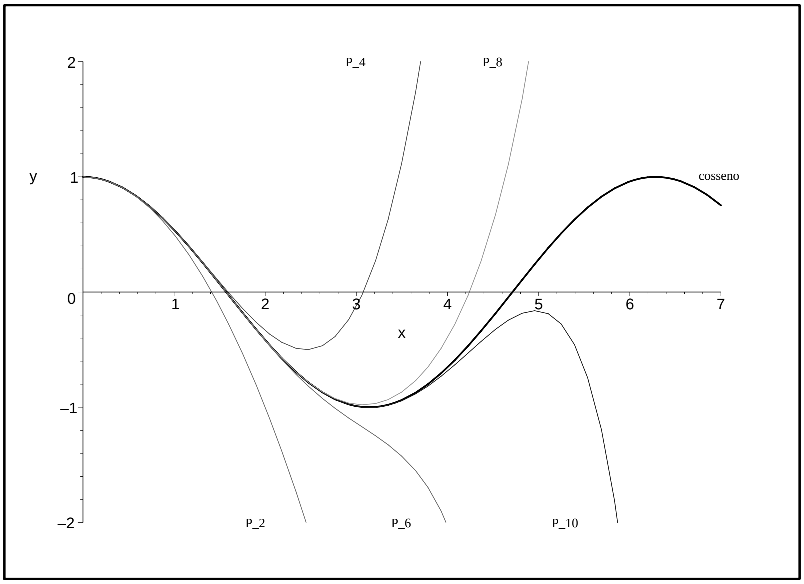
Em $x = 0$, os cossenos são 1 e os senos são 0, assim

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2n$ e $2n+1$ são iguais:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Veja na figura a seguir o gráfico de $f(x) = \cos x$ e seus polinômios de Taylor de ordem 2, 4, 6, 8 e 10.



A figura acima sugere que os polinômios de Taylor $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ convergem para $\cos x$ quando $n \to \infty$.

Resto de um Polinômio de Taylor

Precisamos de uma medida de precisão na aproximação de uma função $f(x)$ por seu polinômio de Taylor $P_n(x)$. Podemos usar a idéia de um **resto** $R_n(x)$ definido por

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

O valor absoluto $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ é chamado de **erro** associado à aproximação.

O teorema a seguir fornece uma maneira de estimar o resto associado com o polinômio de Taylor.

Teorema. *(Fórmula de Taylor com Resto) Se f for derivável até ordem $n+1$ em algum intervalo aberto I contendo a como ponto interior, então para cada x em I existe um número c entre x e a tal que*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exercício 1. Siga os passos para obter uma demonstração da Fórmula de Taylor com Resto.

1. Para cada x em I dado, considere a função $G : [0, x] \to \mathbb{R}$ definida por
$$G(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \right]$$
onde onde $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.
2. Calcule $G(a)$ e $G(x)$.
3. Verifique que G é contínua no intervalo fechado $[a, x]$ e derivável no intervalo aberto $]a, x[$.
4. Use o Teorema de Rolle para garantir a existência de um número $c \in]a, x[$, tal que $G'(c) = 0$.
5. Verifique que $G'(c) = 0$ acarreta $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Exemplo 1. Vamos estimar $\cos 61^\circ$ usando um polinômio de ordem 2 de $\cos x$, em $a = \pi/3$.

Sendo $f(x) = \cos x$, temos
$$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \quad f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2},$$
o polinômio P_2 em $a = \pi/3$ é
$$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{(1/2)}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2.$$
Fazendo $x = \pi/3 + \pi/180$, que corresponde a 61°, obtemos a estimativa
$$\cos 61^\circ \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{180}) - \frac{1}{4}(\frac{\pi}{180})^2 \approx 0,484481.$$
Além disso, observando que $f'''(x) = -\sin x$, o resto de $R_2(61^\circ)$ pode ser estimado segundo o teorema da seguinte forma:
$$|R_2(x)| = \left| \frac{\sin c}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 \right|$$

para algum c entre $\pi/3$ e $\pi/3 + \pi/180$.

Sendo $|\sin(c)| \leq 1$, obtemos para $x = \pi/3 + \pi/180 = 61^\circ$ que

$$|R_2(61^\circ)| \leq \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \leq 10^{-6}.$$

Portanto, $\cos 61^\circ \approx 0,484481$, com precisão de cinco casas decimais.

Exemplo 2. Vamos estimar $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ usando os polinômios de Taylor de $\sin x$, em $a = 0$.

Observação: aqui é possível ver a utilidade dos polinômios de Taylor para a obtenção de estimativas, uma vez que é conhecido que a primitiva $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ não se expressa por meio de funções elementares.

Solução. Como

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, \\
f''(x) = -\sin x, & f^{(3)}(x) = -\cos x \\
f^{(4)}(x) = \sin x, & f^{(5)}(x) = \cos x \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, & f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.
\end{array}$$

Em $x = 0$, os cossenos são 1 e os senos são 0, assim

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $f^{(2n)}(0) = 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2n+2$ e $2n+1$ são iguais:

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

O Teorema de Taylor dá

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x), \quad \text{onde} \quad R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}x^{(2n+2)},$$

para algum c entre 0 e 1. Assim,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{P_{2n+1}(x)}{x} + \frac{R_{2n+1}(x)}{x},$$

ou seja,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \frac{R_{2n+1}(x)}{x}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx &= (x - \frac{x^3}{3.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!})\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{R_{2n+1}(x)}{x}\, dx \\
&= 1 - \frac{1}{3.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1).(2n+1)!} + \int_0^1 \frac{R_{2n+1}(x)}{x}\, dx.
\end{aligned}$$

Para estimar o resto, notamos que todas as derivadas de $\sin x$ têm valores absolutos menores ou iguais a 1, assim

$$|\int_0^1 \frac{R_{2n+1}(x)}{x}\, dx| = |\frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)(2n+2)!}| \le \frac{1}{(2n+2)(2n+2)!}.$$

Como $1/(2n+2)(2n+2)! \to 0$ quando $n \to \infty$, resulta que o erro cometido nessa aproximação da integral definida pela integral definida dos polinômios de Taylor é tão pequeno quanto se queira, desde que o grau do polinômio utilizado seja suficientemente grande.

Exercício 2. Encontre um polinômio que aproxime $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2\, dt$, com $x \in [0,1]$, com um erro menor do 10^{-3}.

Série de Taylor

Exercício 3. Suponha que f tenha derivadas de todas as ordens no intervalo aberto $]a-r, a+r[$, onde $r > 0$. Use a Fórmula de Taylor com Resto para mostrar que a sequência $(P_n(x))$ dos polinômios de Taylor de f em torno de a converge para $f(x)$. Use isso para concluir que a Série de Taylor de f em torno de a converge para $f(x)$ em cada $x \in]a-r, a+r[$.

Exercício 4. Use a Fórmula de Taylor com Resto para mostrar que a sequência $(P_n(x))$ dos polinômios de Taylor de f em torno de a converge para $f(x)$, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < r.$$

Exercício 5. *(Estimativa do resto)* Suponha que f tenha derivadas de todas as ordens no intervalo aberto $]a-r, a+r[$, onde $r > 0$, e suponha que existe uma constante positiva M tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ para todo $x \in]a-r, a+r[$. Prove que o resto $R_n(x)$ na fórmula de Taylor com resto satisfaz

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |x-a| < r.$$

Verifique que essa hipótese em f é uma condição suficiente para a convergência da Série de Taylor de f em torno de a para $f(x)$ em cada $x \in]a-r, a+r[$.

Exercício 6. Encontre a série de Taylor em torno de 0 (conhecida como série de Maclaurin) e estude a convergência.

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = \ln(1 + x^2)$
3. $f(x) = x \sin x$
4. $f(x) = \sinh x$

Exercício 7. Em estatística a função

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

leva o nome de *Função Erro*. Encontre a série de Maclaurin da função $E(x)$. Calcule a derivada $E^{(17)}(0)$.

Exercício 8. Explique como o Teorema do Valor Médio é um caso especial da Fórmula de Taylor com Resto.

Exercício 9. Suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x em um intervalo aberto $]-r, r[$. Mostre que

1. Se f é uma função par, então $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$, isto é, a série de Taylor de f contém somente potências pares de x.
2. Se f é uma função ímpar, então $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$, isto é, a série de Taylor de f contém somente potências ímpares de x.

Série Binomial

Exercício 10. Usando a série binomial para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mostre que

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{n!(2n+1)2^n} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Exercício 10. Usando a série binomial para $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, calcule o valor $\sqrt[3]{25}$ com três casas decimais e compare o calor com o resultado obtido em uma calculadora.

Exercício 11. Avalie a integral $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$ com um erro de magnitude menor que 10^{-3}.

Observação. Veja mais sobre séries de Taylor e suas aplicações no livro G. B. Thomas, volume 2.