ICMC – USP **SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1**

$1^{\underline{a}}$ prova – 11/5/2013 Nome:

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função massa de probabilidade
$$f(x;\theta) = 0,3 \times 0,7^{x-\theta}\, I_{\{\theta,\theta+1,\ldots\}}(x),\ \ \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
   (a) Represente graficamente a função massa de probabilidade.
   (b) Apresente um estimador de momentos para θ.
   (c) Apresente uma estatística suficiente unidimensional para θ.
   (d) Apresente o EMV de θ.
   (e) Na equação (1), $0,3$ e $0,7$ são substituídos por α e $1-\alpha$, respectivamente, em que $0 < \alpha < 1$, conhecido ou desconhecido. Sua resposta ao item 1d mudaria?

2. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} P_\theta$, em que $P_\theta(X_i = -1) = P_\theta(X_i = 1) = (1-\theta)/2$ e $P_\theta(X_i = 0) = \theta$, $i = 1, \ldots, n$, e $\Theta = (0,1)$.
   (a) Apresente uma estatística suficiente unidimensional para θ. Esta estatística é completa?
   (b) Proponha estimadores de θ pelos métodos dos momentos e de máxima verossimilhança. Se existir, apresente um ENVVUM para θ.
   (c) Apresente uma função de θ com ENVVUM cuja variância é igual à cota inferior da desigualdade da informação.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(a_i\,\theta, \sigma_i^2)$, a_i e σ_i conhecidos, $i = 1, \ldots, n$.
(a) Apresente uma estatística suficiente e encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.
(b) Apresente um estimador de momentos para θ.

4. Considere uma função densidade de probabilidade dada por
$$f(x;\theta) = c(\theta)\, h(x)\, I_{[0,\theta]}(x), \quad \theta > 0,$$
sendo que $c(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções com valores positivos. Se $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(\cdot;\theta)$, apresente uma estatística suficiente unidimensional para θ.

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com função distribuição acumulada $F(\cdot)$. Sejam c_0 uma constante conhecida e $\theta = P(X_1 > c_0)$.
   (a) Apresente uma sequência de estimadores consistente para θ.
   (b) Apresente uma sequência de estimadores consistente para $\theta/(1-\theta)$.

Justifique suas respostas.