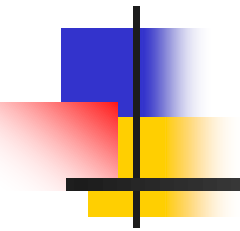


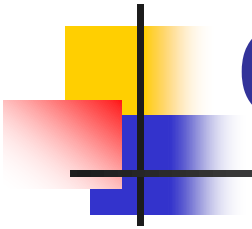
Métodos de Ordenação

Parte 3

Introdução à Ciência de Computação II

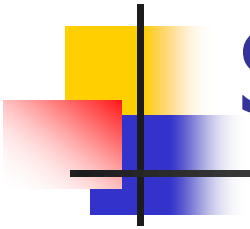
Prof. Diego Raphael Amancio

Baseado no material dos Profs. Rudinei Goularte e Thiago A. S. Pardo



Ordenação por Seleção

- Idéia básica: os elementos são selecionados e dispostos em suas posições corretas finais
  - Seleção direta (ou simples), ou classificação de deslocamento descendente
  - Heap-sort, ou método do monte



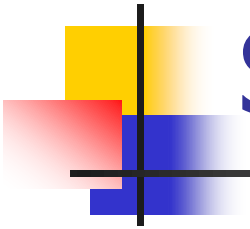
Seleção Direta

- Método
  1. Selecionar o elemento que apresenta o menor valor
  2. Trocar o elemento de lugar com o primeiro elemento da seqüência, x[0]
  3. Repetir as operações 1 e 2, envolvendo agora apenas os n-1 elementos restantes, depois os n-2 elementos, etc., até restar somente um elemento, o maior deles

Seleção Direta

- x = 44 , 55 , 12 , 42 , 94 , 18 , 06 , 67

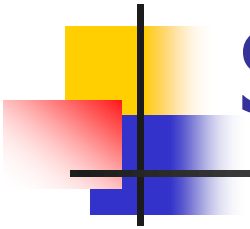
(vetor original)	44 55 12 42 94 18 06 67
passo 1 (06)	06 55 12 42 94 18 44 67
passo 2 (12)	06 12 55 42 94 18 44 67
passo 3 (18)	06 12 18 42 94 55 44 67
passo 4 (42)	06 12 18 42 94 55 44 67
passo 5 (44)	06 12 18 42 44 55 94 67
passo 6 (55)	06 12 18 42 44 55 94 67
passo 7 (67)	06 12 18 42 44 55 67 94



Seleção Direta

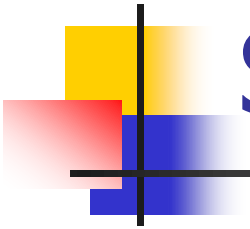
- No i-ésimo passo, o elemento com o menor valor entre x[i], ..., x[n-1] é selecionado e trocado com x[i]

- Como resultado, após i passos, os elementos x[0], ..., x[i-1] estão ordenados



Seleção Direta

- Pergunta
  - Qual a diferença para o método da inserção direta?



Seleção Direta

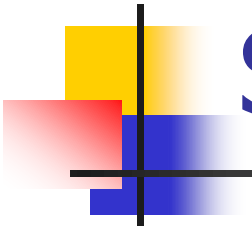
- Exercício
  - Implementação e análise do algoritmo

Versão não aprimorada

```
void selectionsort(int v[], int n) {
     int i, j, aux;
     for (i=0; i<n-1; i++)
          for (j=i+1; j<n; j++)
               if (v[j]<v[i]) {
                    aux=v[j];
                    v[j]=v[i];
                    v[i]=aux;
               }
}
```

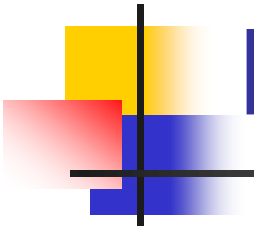
Versão aprimorada

```
void selectionsort_aprimorado(int v[], int n)
{
    int i, j, min, aux;
    for (i=0; i<n-1; i++) {
        min=i;
        for (j=i+1; j<n; j++)
            if (v[j]<v[min])
                min=j;
        aux=v[min];
        v[min]=v[i];
        v[i]=aux;
    }
}
```



Seleção Direta

- No primeiro passo ocorrem n - 1 comparações, no segundo passo n - 2, e assim por diante
  - Logo, no total, tem-se (n - 1) + (n -2) + ... + 1 = n * (n -1)/2 comparações: $O(n^2)$
- Não existe melhora se a entrada está completamente ordenada ou desordenada
- Exige pouco espaço
- É melhor que o Bubble-sort, pois faz menos operações
- É útil apenas quando n é pequeno

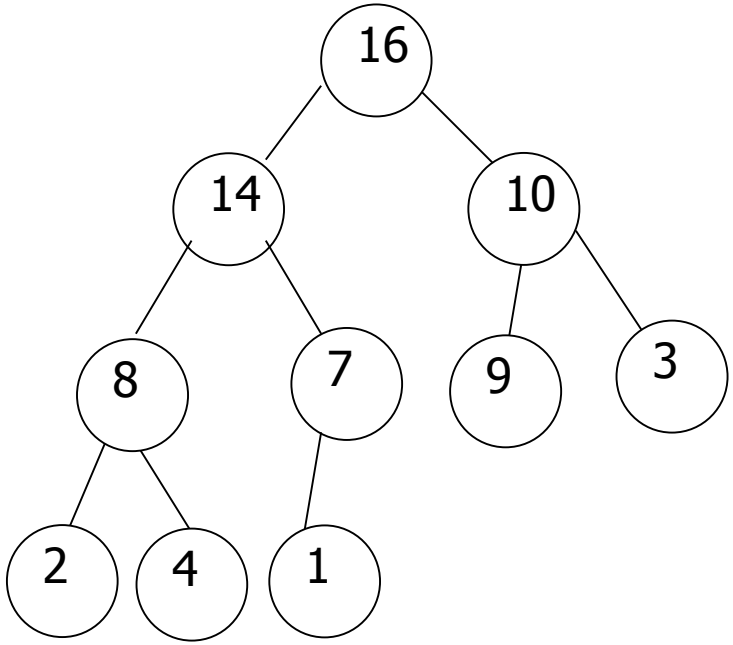


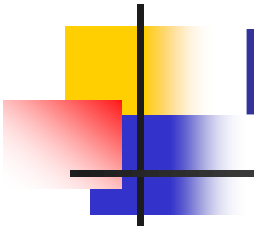
Heap-sort

- Utiliza um heap para ordenar os elementos
  - Atenção: a palavra *heap* é utilizada atualmente em algumas linguagens de programação para se referir ao "espaço de armazenamento de variáveis dinâmicas"

Heap-sort

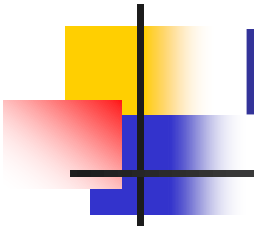
- Um heap é uma estrutura de dados em que há uma ordenação entre elementos: representação via árvore binária





Heap-sort

- Um heap observa conceitos de ordem e de forma
  - Ordem: o item de qualquer nó deve satisfazer uma relação de ordem com os itens dos nós filhos
    - **Heap máximo** (ou descendente): pai >= filhos, sendo que a raiz é o maior elemento
      - *Propriedade de heap máximo*
    - Heap mínimo (ou heap ascendente): pai <= filhos, sendo que a raiz é o menor elemento
      - *Propriedade de heap mínimo*

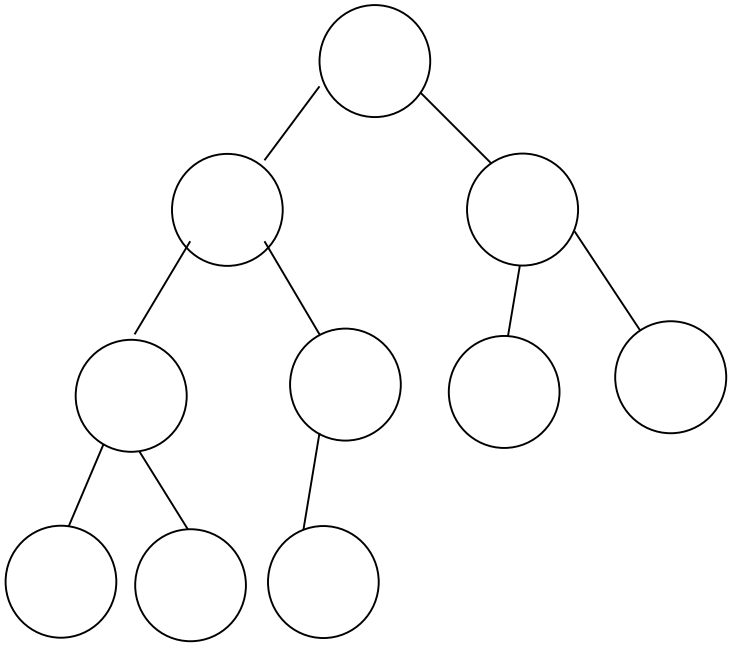


Heap-sort

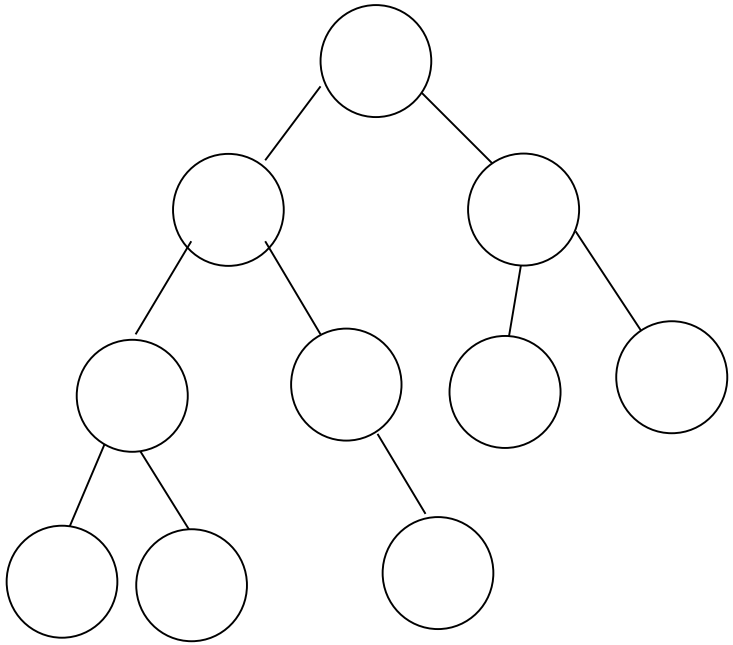
- Um heap observa conceitos de ordem e de forma
  - Forma: a árvore binária tem seus nós-folha, no máximo, em dois níveis, sendo que as folhas devem estar o mais à esquerda possível

Heap-sort

- Exemplos



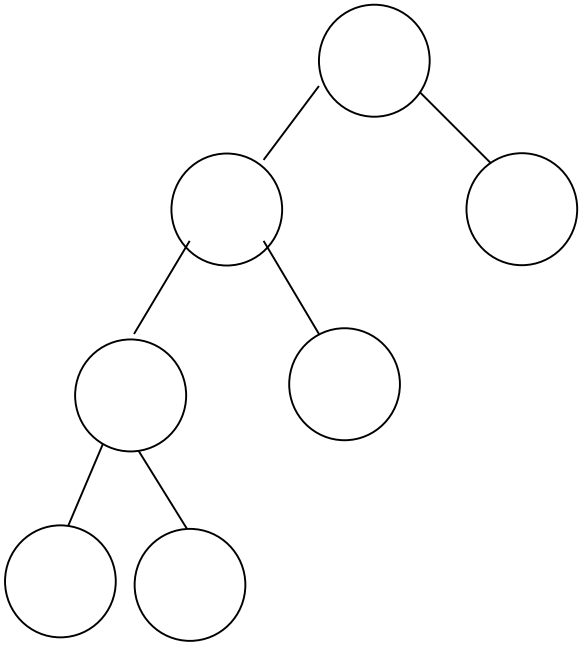
OK

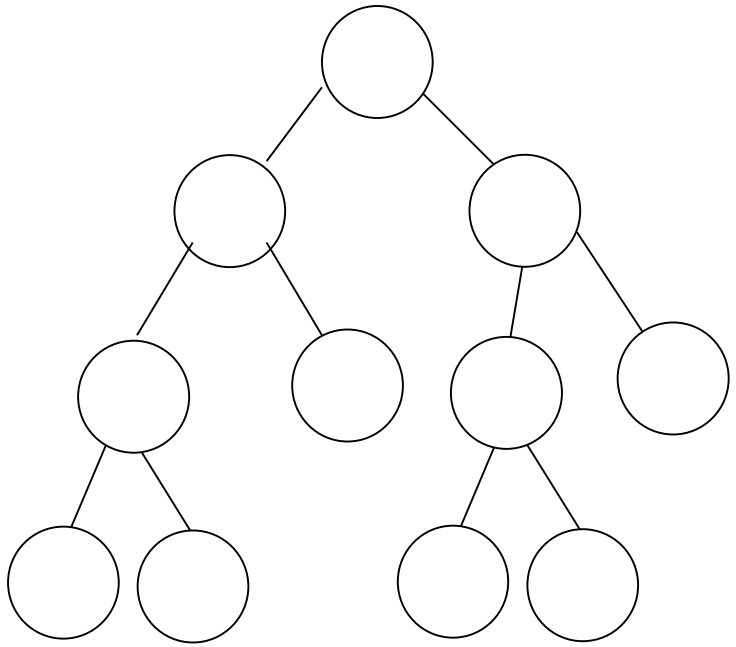


Não!

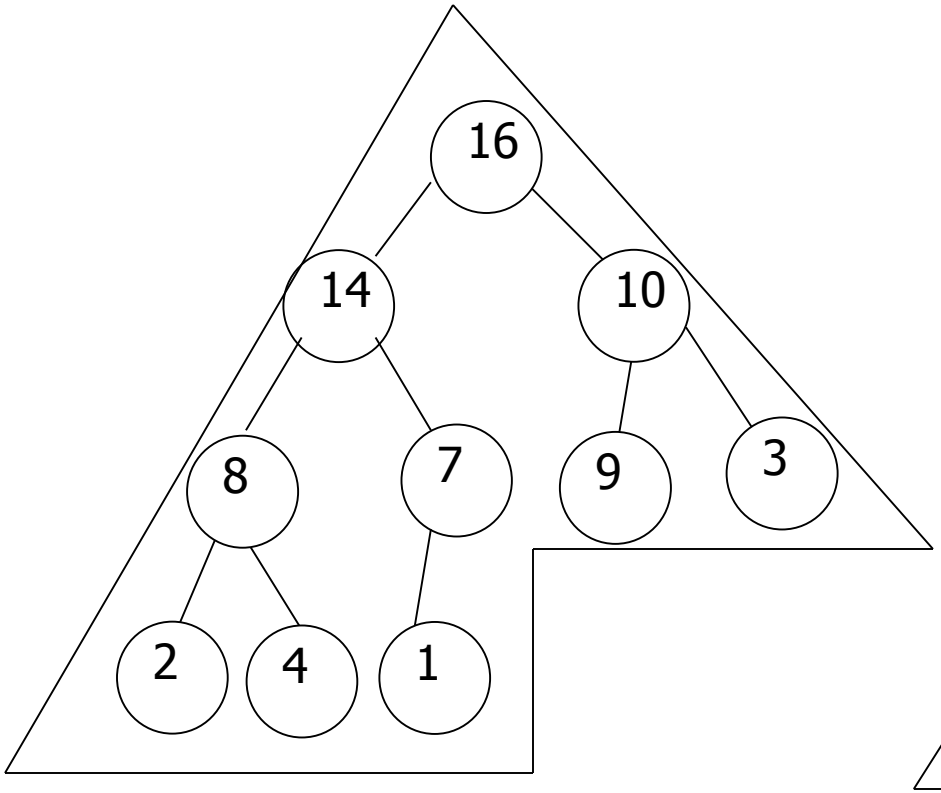
Heap-sort

- Exemplos de árvores binárias que não são heaps
  - Por quê?

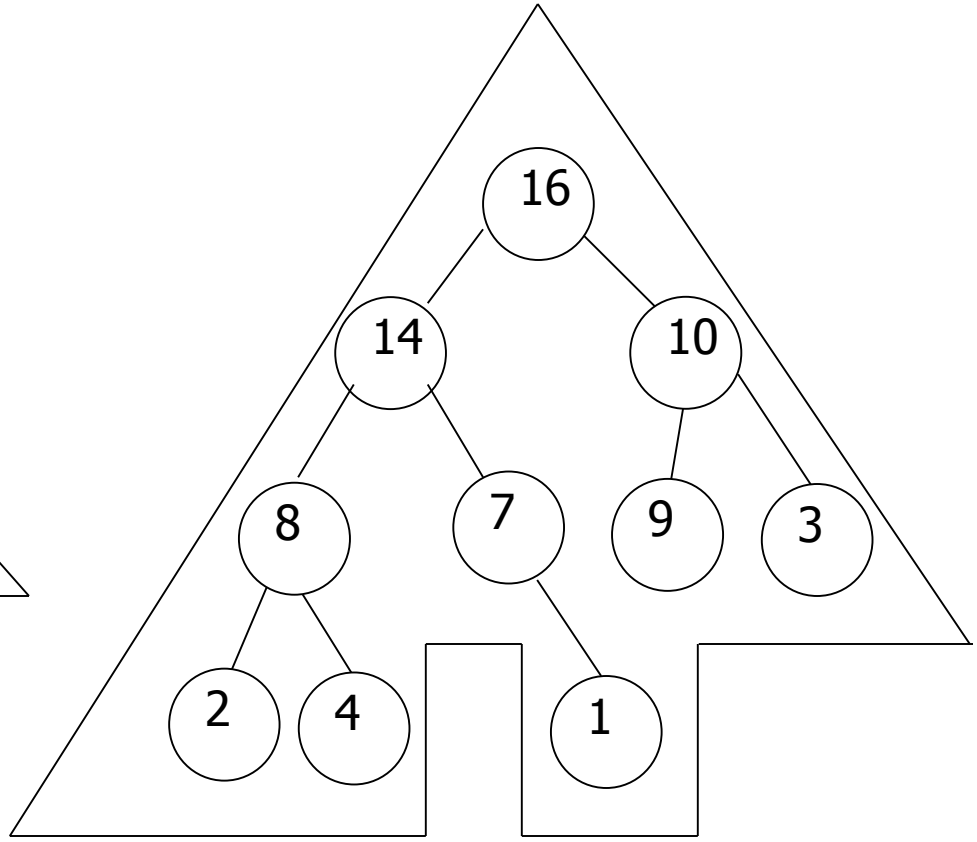




Heap-sort

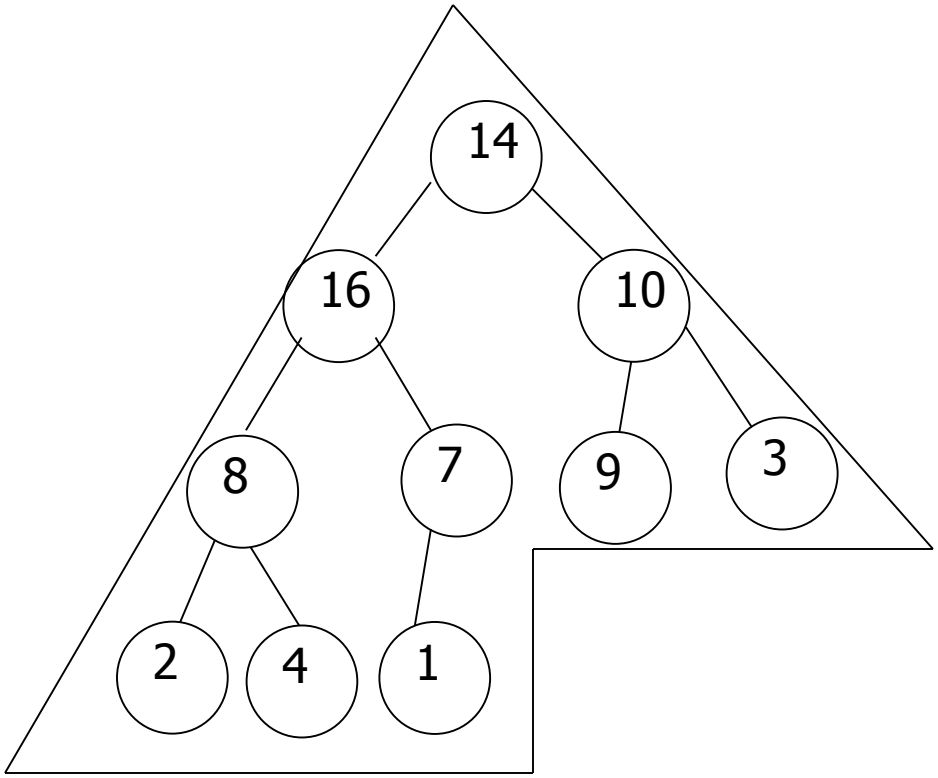


É um heap máximo

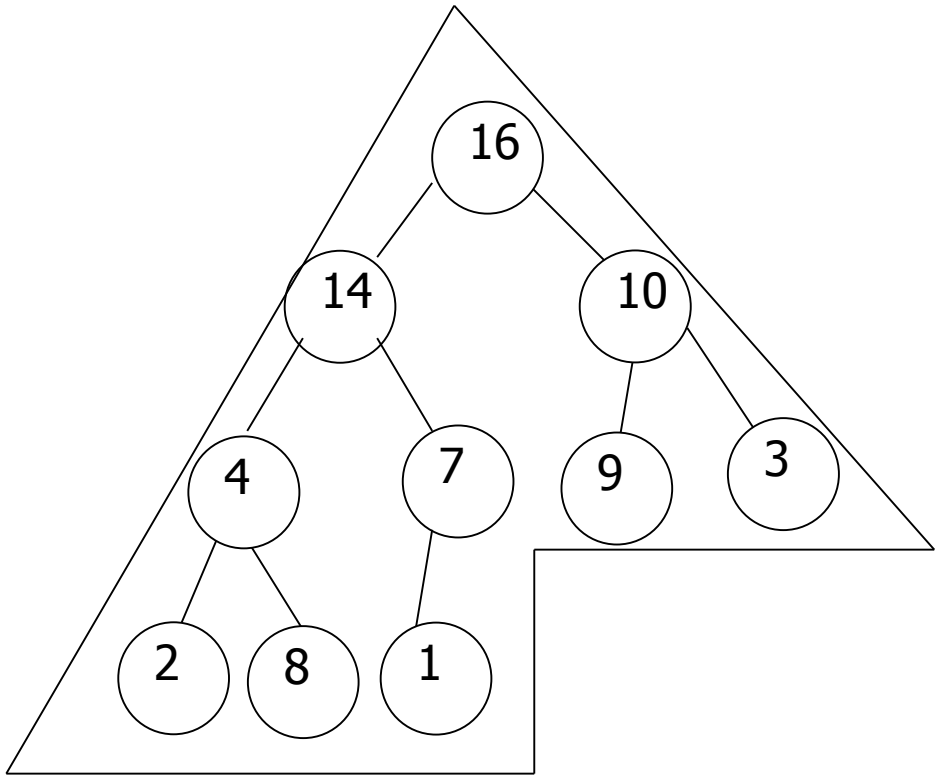


Não é um heap máximo

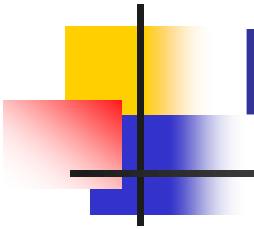
Heap-sort



Não é um heap máximo



Não é um heap máximo

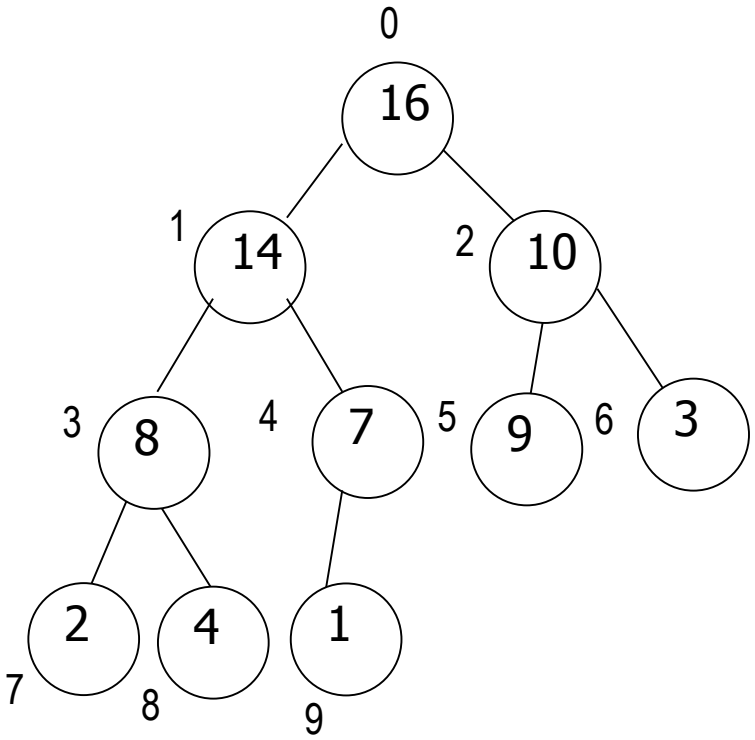


Heap-sort

- Pergunta
  - Como seria um heap mínimo?

Heap-sort

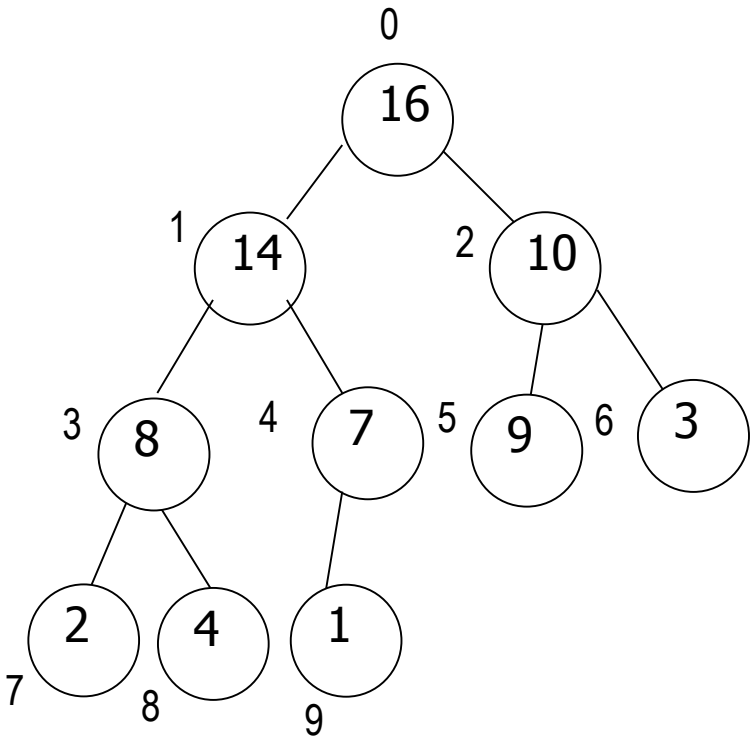
- Um heap pode ser representado por um vetor



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

Heap-sort

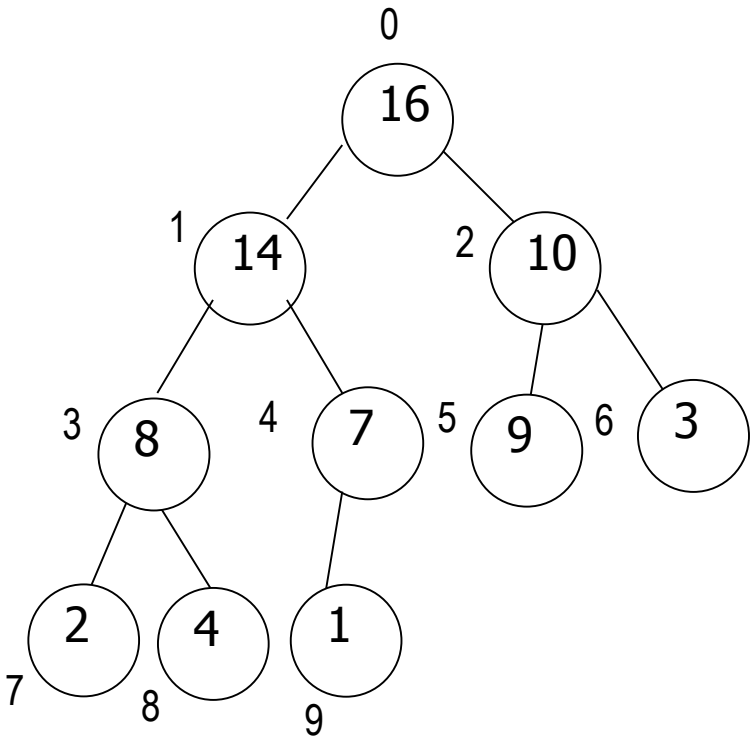
- Como acessar os elementos (pai e filhos de cada nó) no heap?



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

Heap-sort

- Como acessar os elementos (pai e filhos de cada nó) no heap?

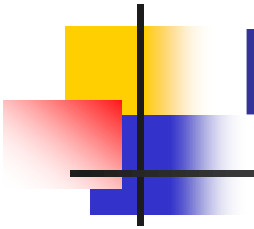


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

Filhos do nó k:
- filho esquerdo = 2k + 1
- filho direito = 2k + 2

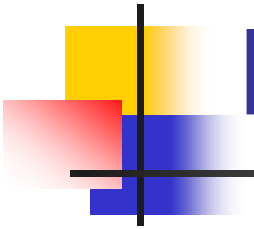
Pai do nó k: (k-1)/2

Folhas de n/2 em diante



Heap-sort

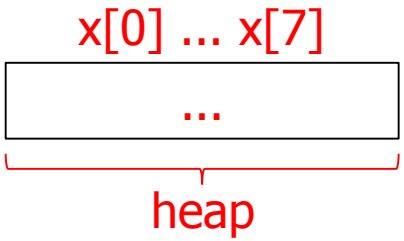
- Assume-se que:
  - A raiz está sempre na posição 0 do vetor
  - comprimento(vetor) indica o número de elementos do vetor
  - tamanho_do_heap(vetor) indica o número de elementos no heap armazenado dentro do vetor
    - Ou seja, embora A[1..comprimento(A)] contenha números válidos, nenhum elemento além de A[tamanho_do_heap(A)] é um elemento do heap, sendo que tamanho_do_heap(A)<=comprimento(A)



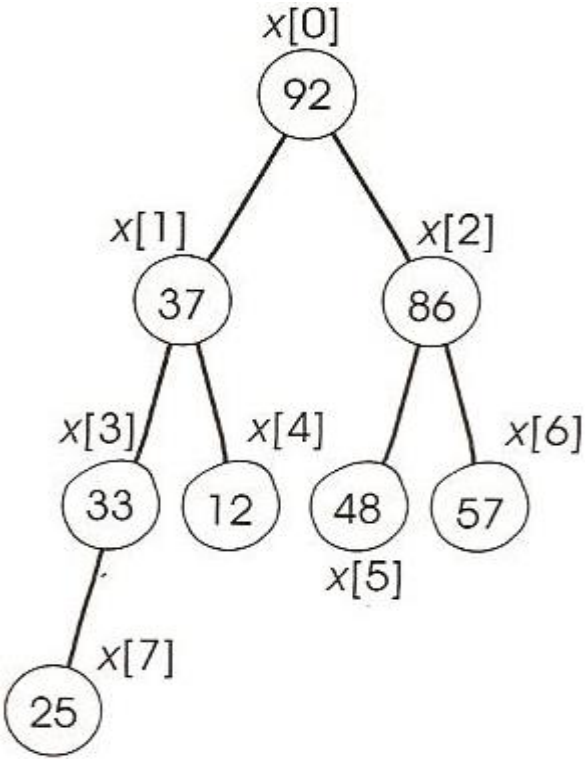
Heap-sort

- A idéia para ordenar usando um heap é:
  - Construir um heap máximo
  - Trocar a raiz – o maior elemento – com o elemento da última posição do vetor
  - Diminuir o tamanho do heap em 1
  - Rearranjar o heap máximo (agora menor), se necessário
  - Repetir o processo n-1 vezes

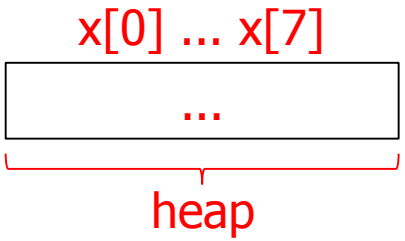
Heap-sort: exemplo

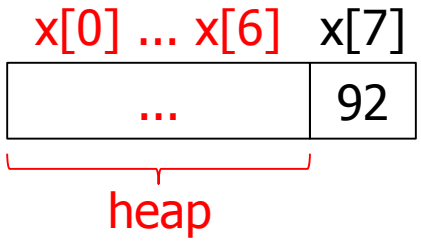


1) Monta-se o heap com base no vetor desordenado

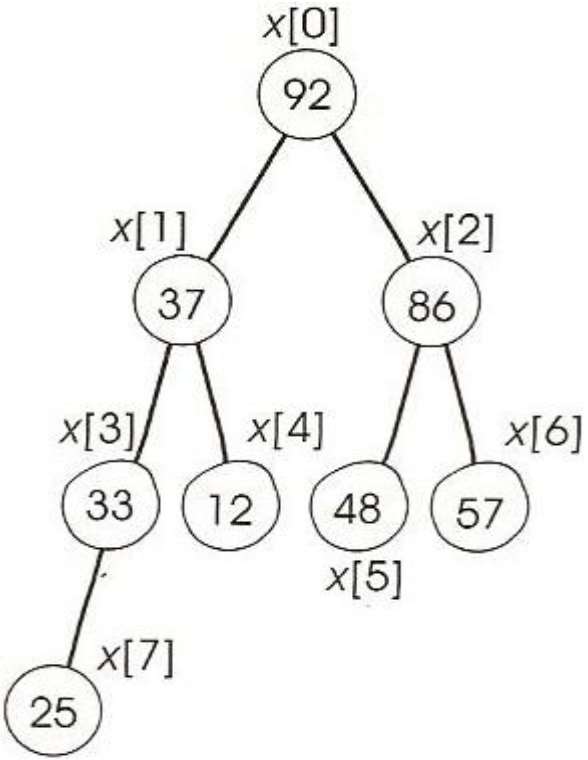


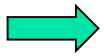
Heap-sort: exemplo

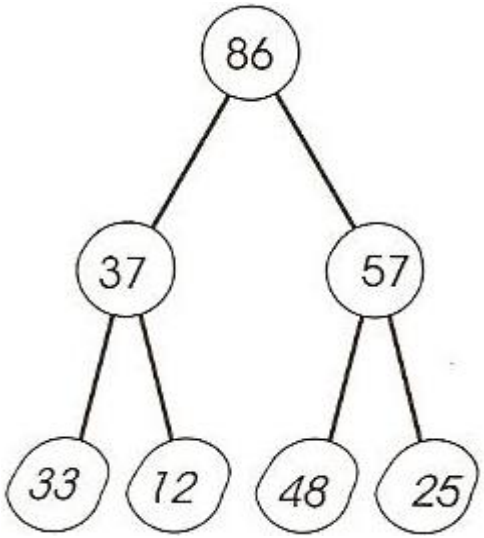




1) Monta-se o heap com base no vetor desordenado

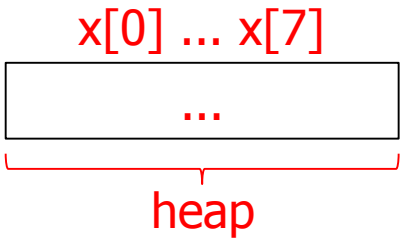


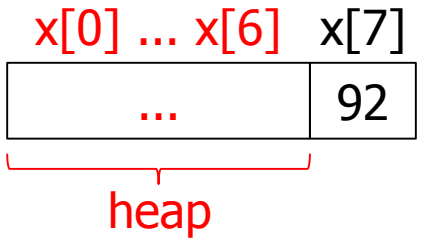


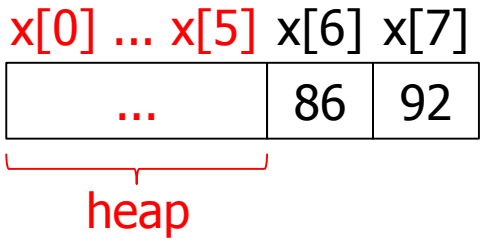


2) Troca-se a raiz (maior elemento) com o último elemento (x[7]) e rearranja-se o heap

Heap-sort: exemplo

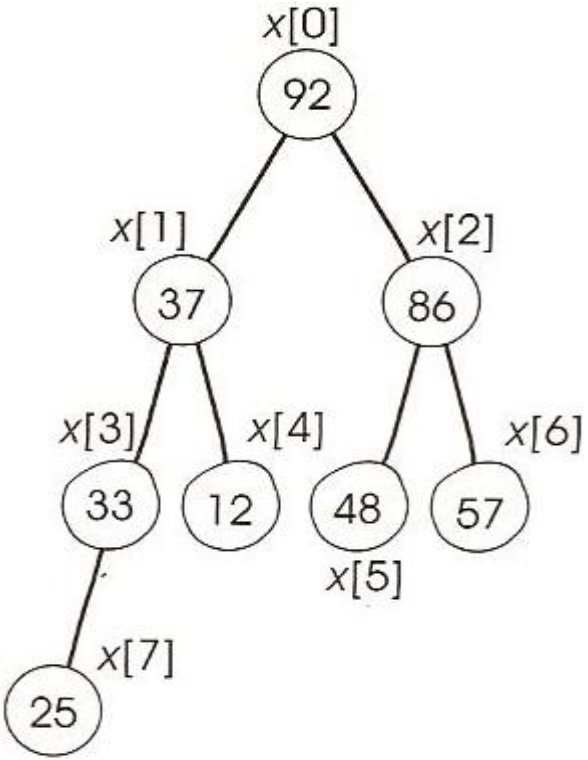


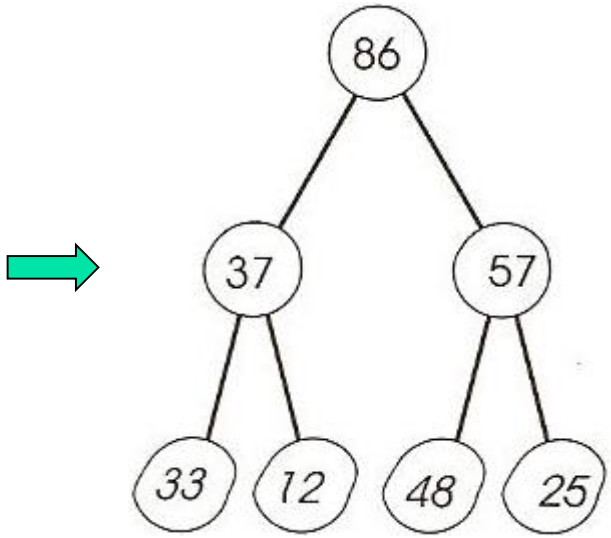


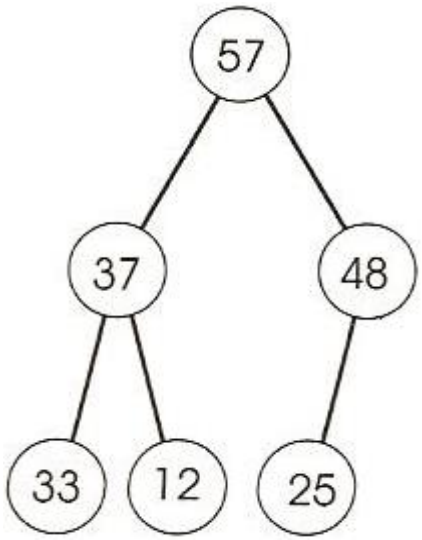


1) Monta-se o heap com base no vetor desordenado

3) Troca-se a raiz com o último elemento (x[6]) e rearranja-se o heap

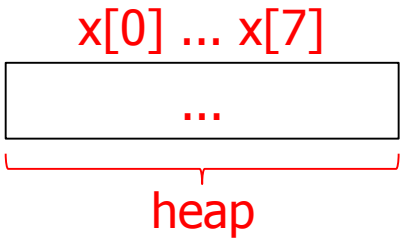


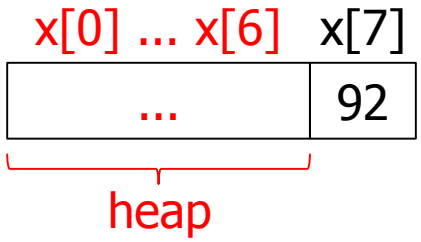


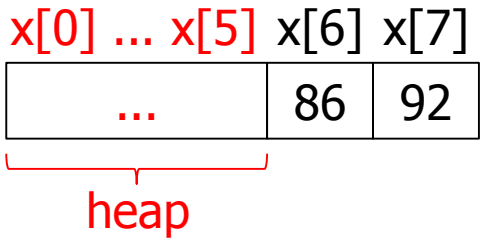


2) Troca-se a raiz (maior elemento) com o último elemento (x[7]) e rearranja-se o heap

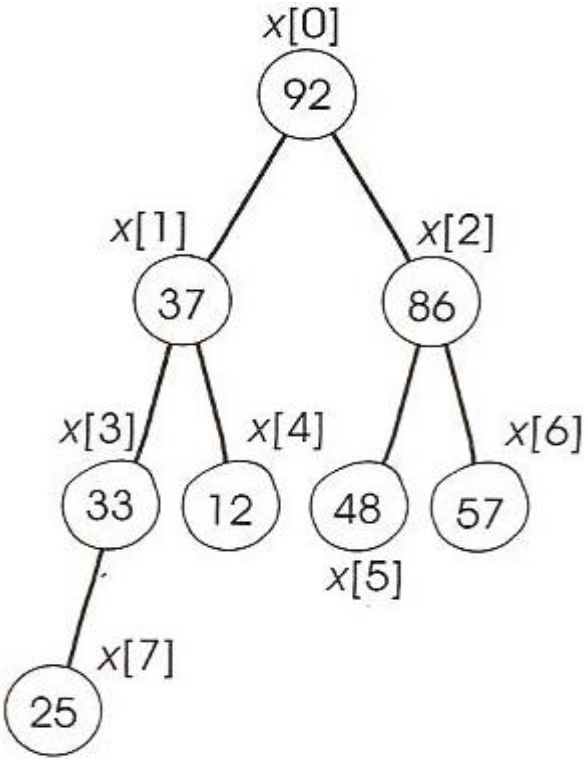
Heap-sort: exemplo

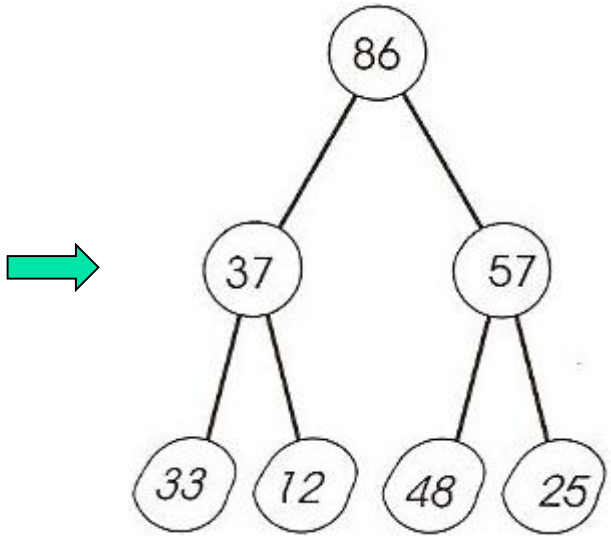






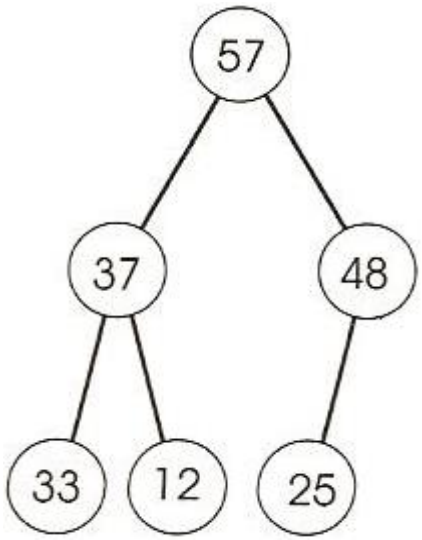
1) **Monta-se o heap** com base no vetor desordenado

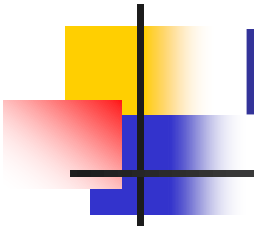




2) Troca-se a raiz (maior elemento) com o último elemento (x[7]) e **rearranja-se o heap**

3) Troca-se a raiz com o último elemento (x[6]) e rearranja-se o heap

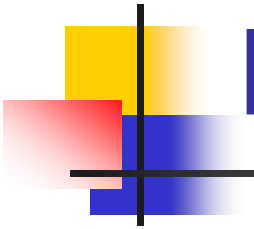




Heap-sort

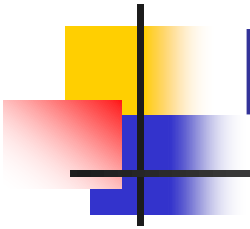
- O processo continua até todos os elementos terem sido incluídos no vetor de forma ordenada

- É necessário:
  - Saber construir um heap a partir de um vetor qualquer
    - Procedimento *construir_heap*
  - Saber como rearranjar o heap, i.e., manter a propriedade de heap máximo
    - Procedimento *rearranjar_heap*



Heap-sort

- Procedimento *rearranjar_heap*: manutenção da propriedade de heap máximo
  - Recebe como entrada um vetor A e um índice i
  - Assume que as árvores binárias com raízes nos filhos esquerdo e direito de i são heap máximos, mas que A[i] pode ser menor que seus filhos, violando a propriedade de heap máximo
  - A função do procedimento *rearranjar_heap* é deixar A[i] "escorregar" para a posição correta, de tal forma que a subárvore com raiz em i torne-se um heap máximo

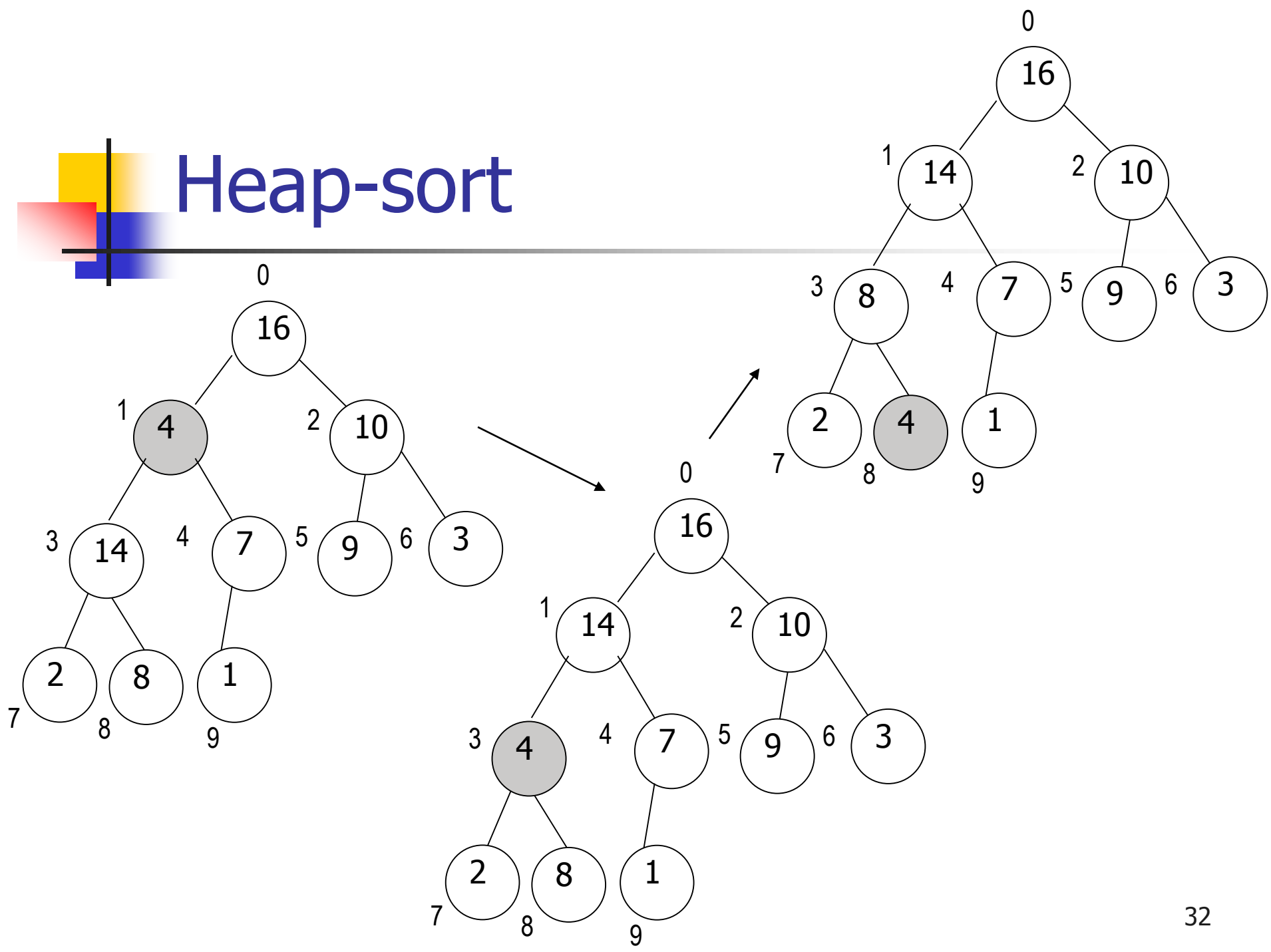


Heap-sort

- Exemplo
  - Chamando a função *rearranjar_heap* para um heap hipotético

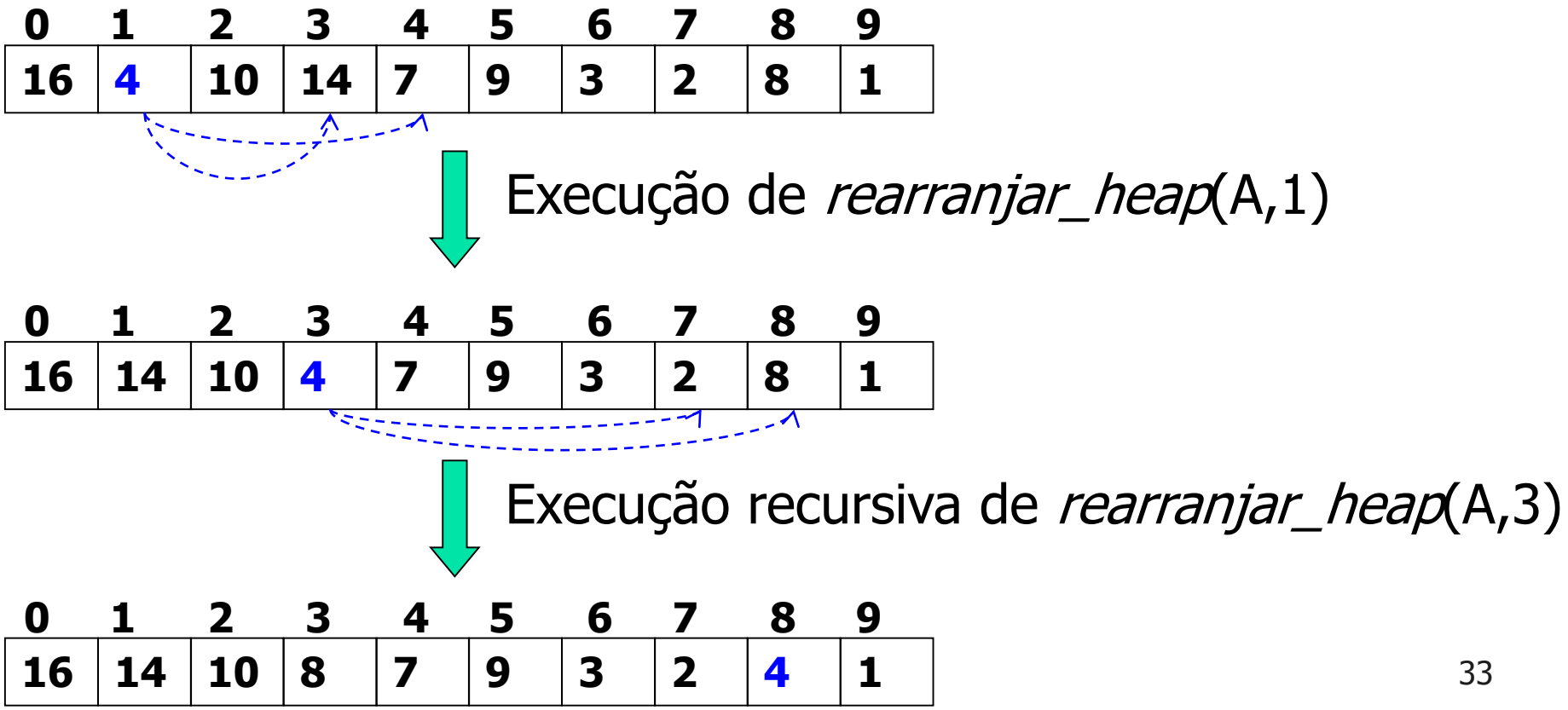
rearranjar_heap(A,1)

Heap-sort

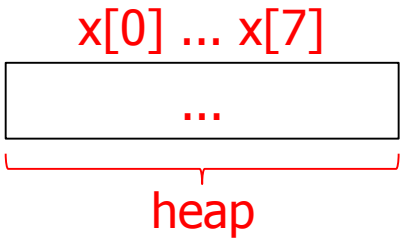

0
16
1
4
2
10
3
14
4
7
5
9
6
3
7
2
8
1
8
9
0
16
1
14
2
10
3
4
4
7
5
9
6
3
7
2
8
1
8
9
0
16
1
14
2
10
3
8
4
7
5
9
6
3
7
2
4
1
8
9

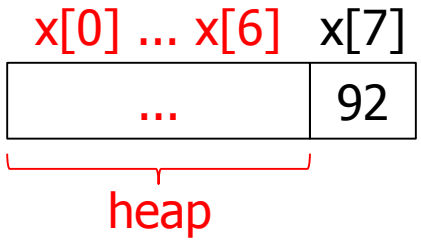
Heap-sort

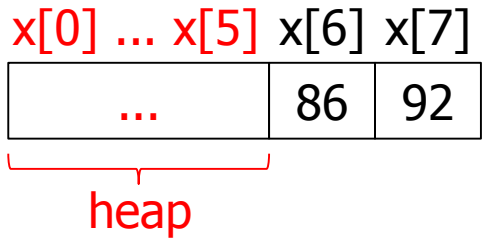
- Na realidade, trabalhando-se com o vetor A



Como acontece?

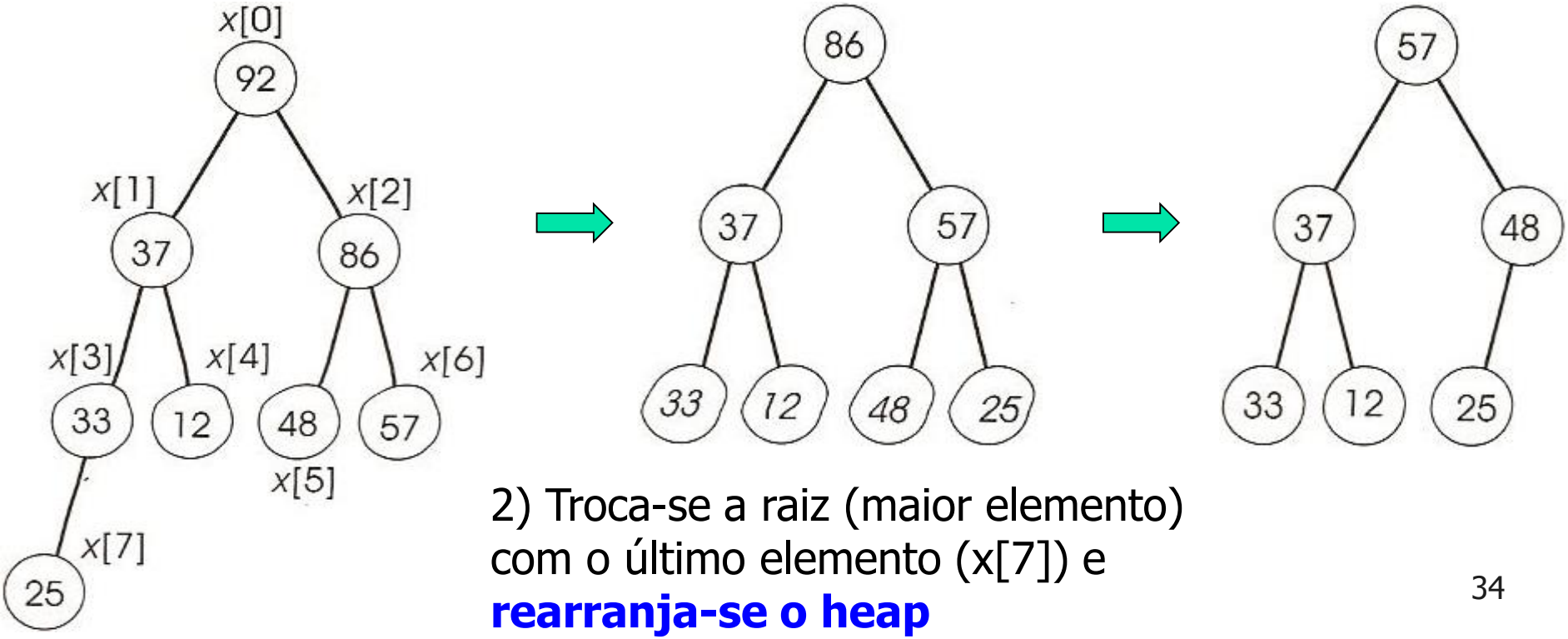




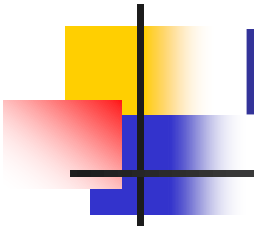


1) Monta-se o heap com base no vetor desordenado

3) Troca-se a raiz com o último elemento (x[6]) e rearranja-se o heap



2) Troca-se a raiz (maior elemento) com o último elemento (x[7]) e **rearranja-se o heap**



Heap-sort

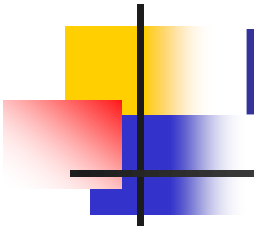
- Implementação e análise da sub-rotina *rearranjar_heap*

void rearranjar_heap(int v[], int i, int tamanho_do_heap)

→ v = vetor

→ i = nó a partir do qual é necessário rearranjar

```
void rearranjar_heap(int v[], int i, int tamanho_do_heap)
{
  int esq, dir, maior, aux;
  esq=2*i+1;
  dir=2*i+2;
  if ((esq<tamanho_do_heap) && (v[esq]>v[i]))
    maior=esq;
  else maior=i;
  if ((dir<tamanho_do_heap) && (v[dir]>v[maior]))
    maior=dir;
  if (maior!=i)
  {
    aux=v[i];
    v[i]=v[maior];
    v[maior]=aux;
    rearranjar_heap(v,maior,tamanho_do_heap);
  }
}
```



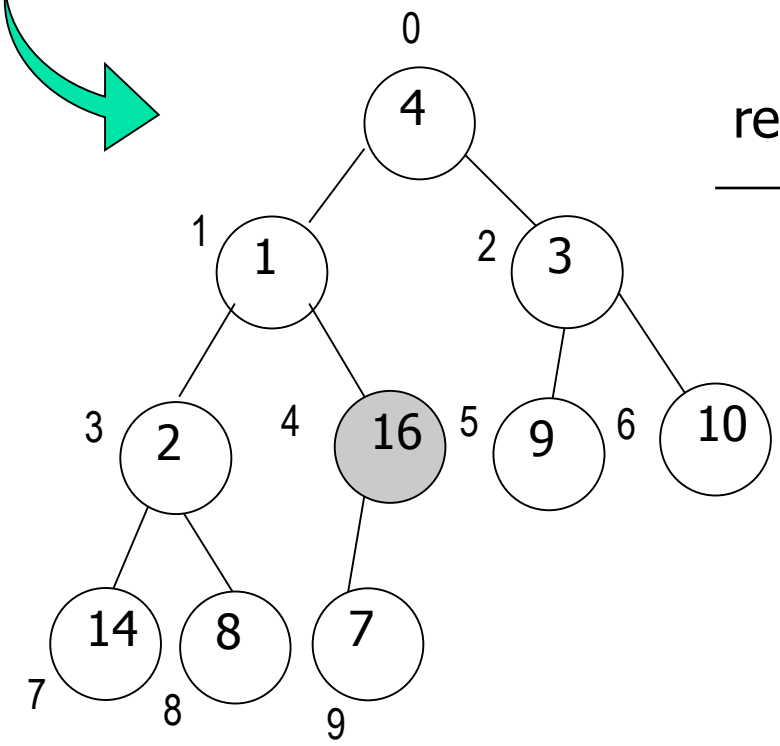
Heap-sort

- Lembrete: as folhas do heap começam na posição n/2
- Procedimento *construir_heap*
  - Percorre de forma ascendente os primeiros n/2 - 1 nós (que não são folhas) e executa o procedimento *rearranjar_heap*
  - A cada chamada do *rearranjar_heap* para um nó, as duas árvores com raiz neste nó tornam-se heaps máximos
  - Ao chamar o *rearranjar_heap* para a raiz, o heap máximo completo é obtido

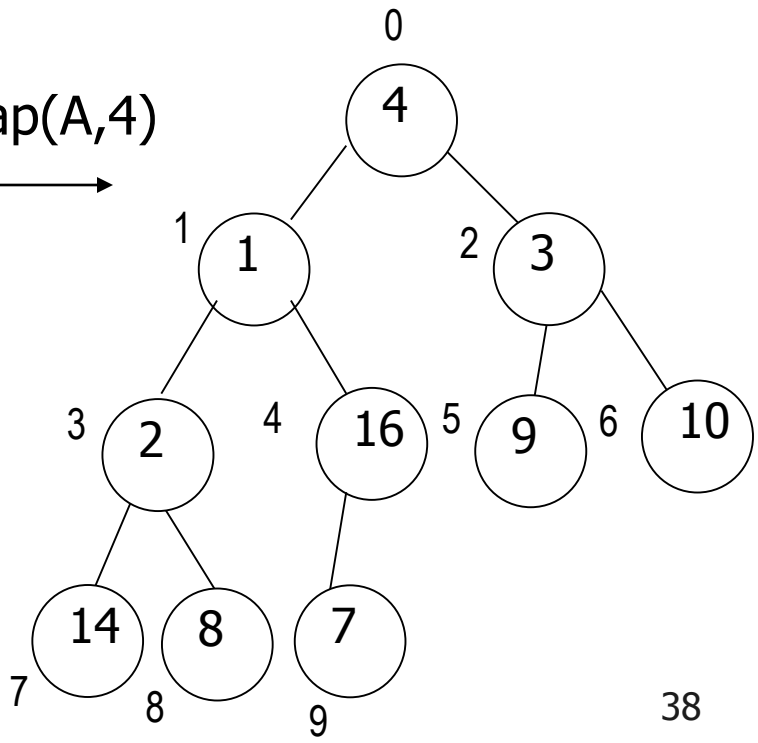
Heap-sort

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	**1**	**3**	**2**	**16**	**9**	**10**	**14**	**8**	**7**

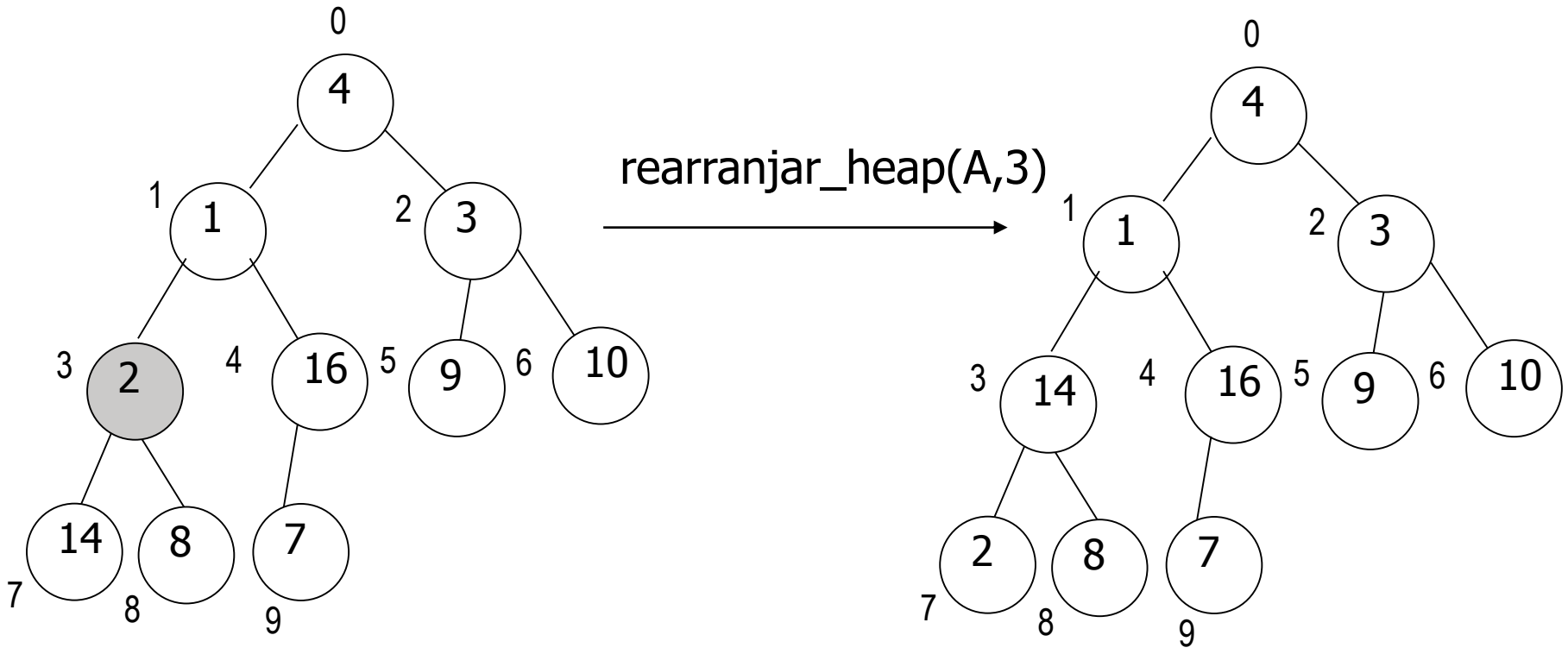
n/2 - 1=4



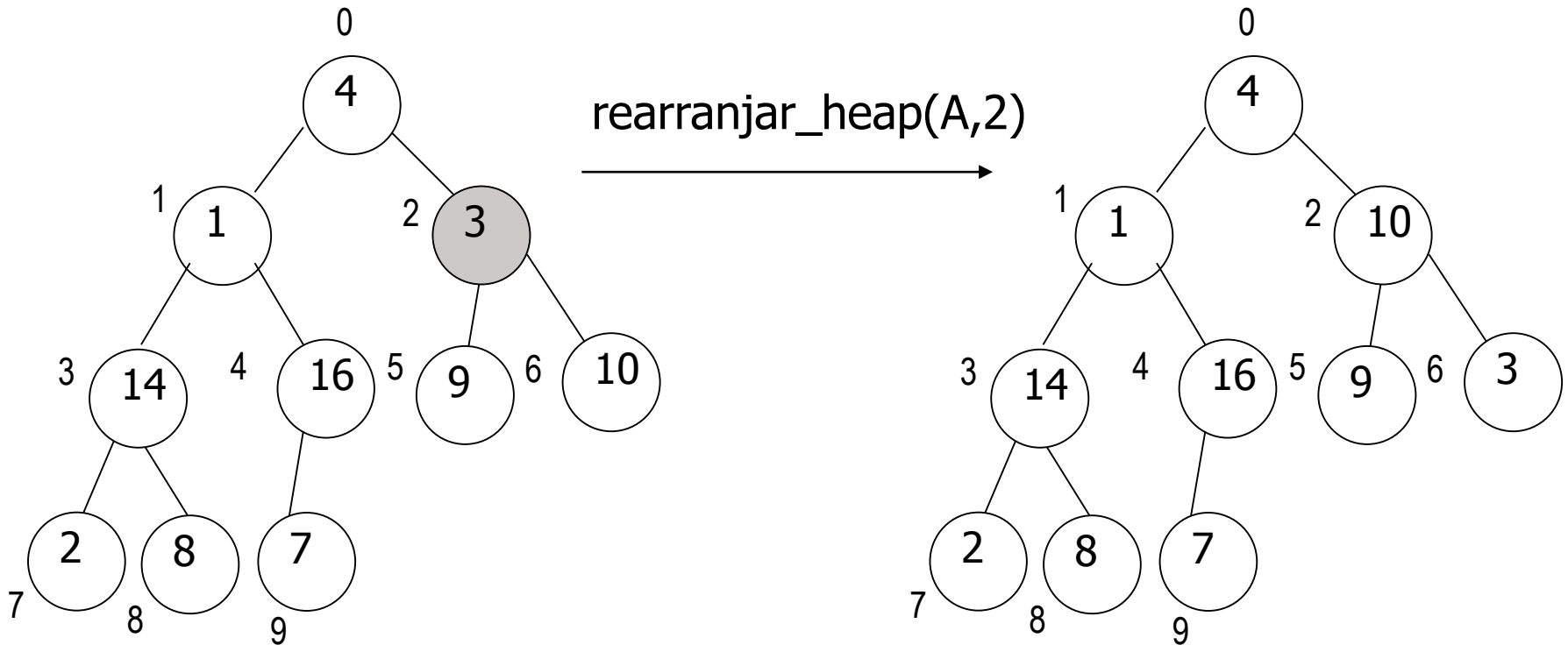
rearranjar_heap(A,4)



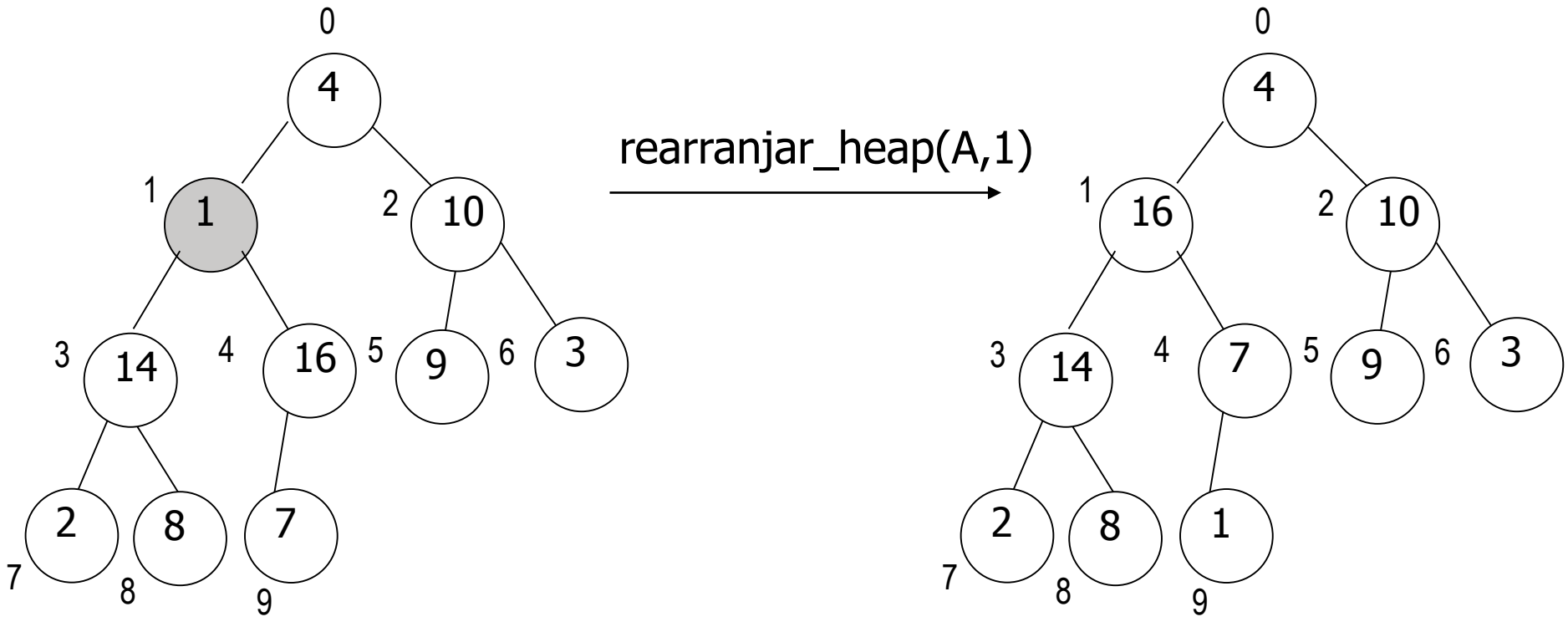
Heap-sort


0
4
1
1
2
3
3
2
4
16
5
9
6
10
14
8
7
7
8
9
rearranjar_heap(A,3)
0
4
1
1
2
3
3
14
4
16
5
9
6
10
2
8
7
7
8
9

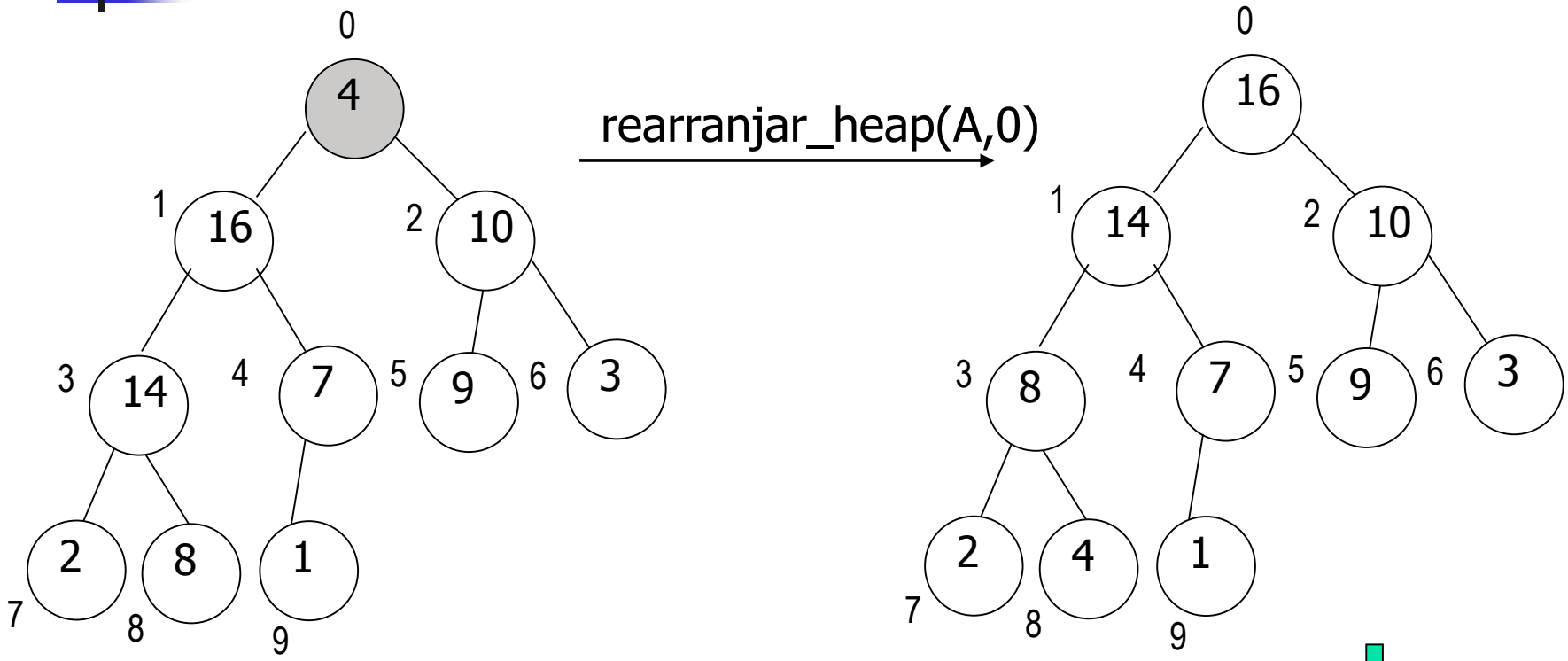
Heap-sort


0
4
1
1
2
3
3
14
4
16
5
9
6
10
7
2
8
8
7
9
rearranjar_heap(A,2)
0
4
1
1
2
10
3
14
4
16
5
9
6
3
7
2
8
8
7
9

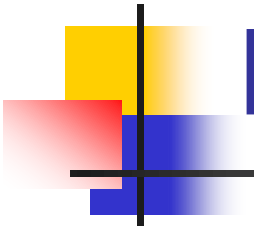
Heap-sort


0
4
1
1
2
10
3
14
4
16
5
9
6
3
7
2
8
7
8
9
rearranjar_heap(A,1)
0
4
1
16
2
10
3
14
4
7
5
9
6
3
7
2
8
1
8
9

Heap-sort



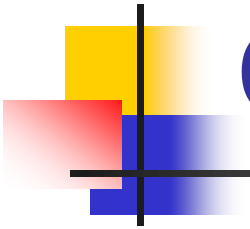
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1



Heap-sort

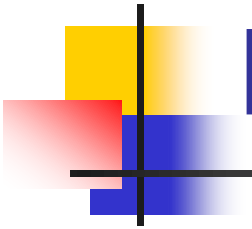
- Implementação e análise da sub-rotina *construir_heap*

```
void construir_heap(int v[], int n)
```



Construir heap

```
void construir_heap(int v[], int n)
{
  int i;
  for (i=n/2-1; i>=0; i--)
    rearranjar_heap(v,i,n);
}
```



Heap-sort

- Retomando...
  - Procedimento **heap-sort**
    1. Construir um heap máximo (via **construir_heap**)
    2. Trocar a raiz – o maior elemento – com o elemento da última posição do vetor
    3. Diminuir o tamanho do heap em 1
    4. Rearranjar o heap máximo, se necessário (via **rearranjar_heap**)
    5. Repetir o processo n-1 vezes

Heap-sort

- Dado o vetor:

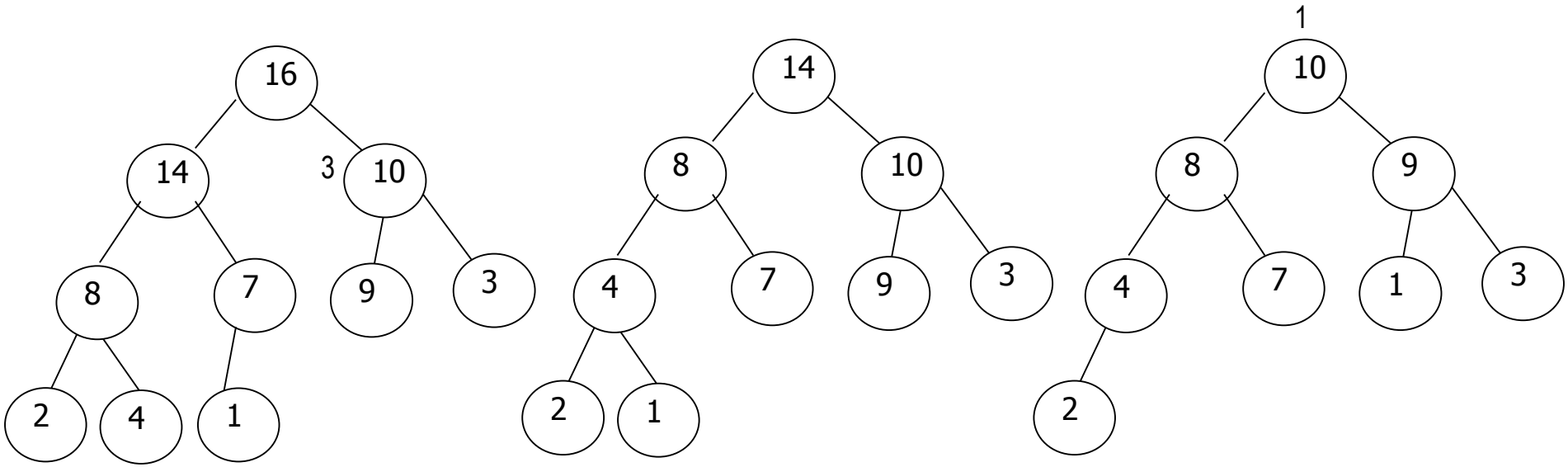
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	1	3	2	16	9	10	14	8	7

- Chamar construir_heap e obter:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

- Executar os passos de 2 a 4 n – 1 vezes

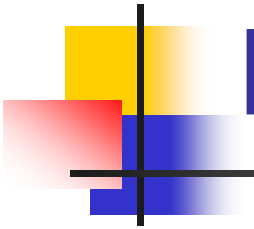
Heap-sort



...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	7	8	9	10	14	16

Vetor ordenado!



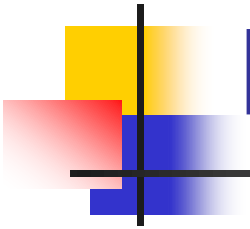
Heap-sort

- Implementação e análise da sub-rotina heap-sort

```
void heapsort(int v[], int n)
```

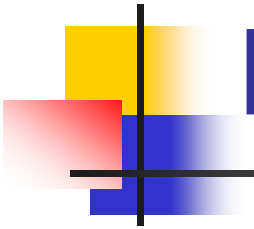
Heap-sort

```
void heapsort(int v[], int n)
{
  int i, aux, tamanho_do_heap;
  construir_heap(v,n);
  tamanho_do_heap=n;
  for (i=n-1; i>0; i--)
  {
    aux=v[0];
    v[0]=v[i];
    v[i]=aux;
    tamanho_do_heap--;
    rearranjar_heap(v,0,tamanho_do_heap);
  }
}
```



Heap-sort

- O método é O(n log(n)), sendo eficiente mesmo quando o vetor já está ordenado
  - n-1 chamadas a rearranjar_heap, de O(log(n))
  - log(1)+log(2)+...log(n-1) < n log n



Heap-sort

- Executar o processo de ordenação completo para o vetor abaixo

(44 , 55 , 12 , 42 , 94)