1ª Lista de Exercícios - SME0812 Modelos Lineares - 1º/2014

1 Determine o posto das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ abaixo.

$$\textbf{(a) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(b) } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2 Mostre que se uma matriz $\boldsymbol{A}$ admite inversa, então sua inversa é única.

3 Determine a matriz $\boldsymbol{A}$ associada à forma quadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2.$$

4 Sejam duas variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$ em que $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variâncias e covariâncias de $(Y_1, Y_2)'$ e verifique que é positiva semidefinida.

5 Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz $p \times n$ qualquer. Prove que $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ é simétrica.

6 Considere $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, X_2)' \sim N_3(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ com $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a distribuição marginal de X_1.

(b) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2.

(c) Determine a distribuição condicional de X_0 dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$.

(d) Determine ρ_{12}, ρ_{01} e ρ_{02}, em que $\rho_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)/\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}$.

(e) Determine a distribuição de $Z = 4X_0 - 6X_1 + X_2$.

(f) Determine a covariância entre Z_1 e Z_2, em que $Z_1 = X_0 - X_1 + 2X_2$ e $Z_2 = 2X_1$.

7 Seja $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, X_2)'$ um vetor aleatório com função geradora de momentos $m_x(t) = \exp\left(t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 2t_3^2 - \frac{1}{2}t_1t_2 - t_1t_3\right)$. Determine c tal que $P(2X_1 - 3X_2 + X_3 > c) = 0,95$.

8 Se $(X, Y)'$ tem distribuição normal bivariada, com $X \sim N(8, 4)$, $Y \sim N(3, 2)$ e $E(Y|X = x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x$, determine o coeficiente de correlação entre X e Y e $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.

9 Sejam $\boldsymbol{Y} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, em que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes $r \times n$ de posto r com $r < n$. Se $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{0}$ e $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0}$ (Qual a dimensão dos vetores nulos?), mostre que $\boldsymbol{X}$ é independente de $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$.

10 Sejam $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ e $\boldsymbol{X}_4$ vetores aleatórios independentes com distribuição $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Determine a distribuição dos vetores aleatórios $\boldsymbol{V}_1 = \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_1 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_2 + \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_4$ e $\boldsymbol{V}_2 = \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_2 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_4$. Determine a distribuição conjunta de $\boldsymbol{V}_1$ e $\boldsymbol{V}_2$.

11 Considere $\boldsymbol{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Apresente algumas curvas de nível da função densidade de $\boldsymbol{x}$ tomando (a) $\boldsymbol{\mu} = (0,0)'$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_2$, (b) (a) $\boldsymbol{\mu} = (1,2)'$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(2,3)$,

$$\text{(c) } \boldsymbol{\mu} = (-1,1)' \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \text{(d) } \boldsymbol{\mu} = (2,5)' \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & -1,5 \\ -1,5 & 1,8 \end{bmatrix}.$$

12 Os dados da página seguinte dizem respeito à variável resposta (Y) e três variáveis explicativas.
(a) Utilizando uma linguagem matricial, calcule a estimativa de mínimos quadrados do vetor de coeficientes do modelo de regressão.
(b) Compare os resultados do item (a) com as respostas obtidas de pacotes estatísticos (R, SAS, SPSS, etc).

Obs.	Y	X1	X2	X3
1	5,1	3,5	1,4	0,2
2	4,9	3,0	1,4	0,2
3	4,7	3,2	1,3	0,2
4	4,6	3,1	1,5	0,2
5	5,0	3,6	1,4	0,2
6	5,4	3,9	1,7	0,4
7	4,6	3,4	1,4	0,3
8	5,0	3,4	1,5	0,2
9	4,4	2,9	1,4	0,2
10	4,9	3,1	1,5	0,1
11	5,4	3,7	1,5	0,2
12	4,8	3,4	1,6	0,2
13	4,8	3,0	1,4	0,1
14	4,3	3,0	1,1	0,1
15	5,8	4,0	1,2	0,2
16	5,7	4,4	1,5	0,4
17	5,4	3,9	1,3	0,4
18	5,1	3,5	1,4	0,3
19	5,7	3,8	1,7	0,3
20	5,1	3,8	1,5	0,3
21	5,4	3,4	1,7	0,2
22	5,1	3,7	1,5	0,4
23	4,6	3,6	1,0	0,2
24	5,1	3,3	1,7	0,5
25	4,8	3,4	1,9	0,2
26	5,0	3,0	1,6	0,2
27	5,0	3,4	1,6	0,4
28	5,2	3,5	1,5	0,2
29	5,2	3,4	1,4	0,2
30	4,7	3,2	1,6	0,2
31	4,8	3,1	1,6	0,2
32	5,4	3,4	1,5	0,4
33	5,2	4,1	1,5	0,1
34	5,5	4,2	1,4	0,2
35	4,9	3,1	1,5	0,2
36	5,0	3,2	1,2	0,2
37	5,5	3,5	1,3	0,2
38	4,9	3,6	1,4	0,1
39	4,4	3,0	1,3	0,2
40	5,1	3,4	1,5	0,2
41	5,0	3,5	1,3	0,3
42	4,5	2,3	1,3	0,3
43	4,4	3,2	1,3	0,2
44	5,0	3,5	1,6	0,6
45	5,1	3,8	1,9	0,4
46	4,8	3,0	1,4	0,3
47	5,1	3,8	1,6	0,2
48	4,6	3,2	1,4	0,2
49	5,3	3,7	1,5	0,2
50	5,0	3,3	1,4	0,2