ICMC – USP

SME 0802 – Inferência I – 2013/1

Outros exercícios

1. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} P_\theta$, em que $P_\theta(X_i = -1) = P_\theta(X_i = 1) = (1-\theta)/2$ e $P_\theta(X_i = 0) = \theta$, $i = 1, \ldots, n$, e $\Theta = (0, 1)$. Apresente uma estatística suficiente para θ.

2. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x;\theta) = \theta x^{-2} I_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
   (a) Represente graficamente esta função densidade.
   (b) Apresente uma estatística suficiente para θ.
   (c) Apresente o EMV de θ.

3. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x;\theta) = \theta(1 + x)^{-(1+\theta)} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
   (a) Represente graficamente esta função densidade.
   (b) Apresente uma estatística suficiente para θ.
   (c) Apresente o EMV de θ.

4. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com uma das seguintes funções densidade:
   (a) $f(x;\theta) = \theta\, x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.
   (b) Weibull:
   $f(x;\theta) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a) I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$, $a > 0$.
   (c) Pareto:
   $f(x;\theta) = \theta a^\theta x^{\theta+1} I_{(a,\infty)}(x)$, $\theta > 0$, $a > 0$.

   Prove que as três distribuições são da família exponencial (a conhecido) e apresente as estatísticas suficientes.

5. Qual(is) das seguintes distribuições pertence(m) à família exponencial?
   (a) $f(x;\theta) = \{\exp[-2\log\theta + \log(2x)]\}\, I_{(0,\theta)}(x)$, $\quad \theta > 0$.
   (b) $f(x;\theta) = 1/9 I_{\{1+\theta, 2+\theta, \ldots, 9+\theta\}}(x)$.
   (c) $f(x;\theta) = 2(x+\theta)/(1+2\theta)\, I_{(0,1)}(x)$, $\quad \theta > 0$.
   (d) $f(x;\theta)$ é a função massa de probabilidade condicional de uma variável X com distribuição $\mathsf{binomial}(n,\theta)$ dado $X > 0$, $0 < \theta < 1$.

6. Prove que a distribuição $\mathsf{gama}(\alpha, \beta)$ pertence à família exponencial e apresente as estatísticas conjuntamente suficientes para (α, β).

7. Prove que a distribuição $\mathsf{beta}(\alpha, \theta)$ pertence à família exponencial e apresente as estatísticas conjuntamente suficientes para (α, θ).