SMA0333 - Cálculo III **Resolução da Prova 2**
Prof. **2 de julho de 2015**

NOME E NÚMERO USP: ____________________

1,5 1. Determine todos $x \in \mathbb{R}$ para que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x-1)^{2n}$$

seja convergente.

Resolução: *Pelo critério da raiz temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n(x-1)^{2n}}{n^2} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(x-1)^2}{n^{2/n}} = 3(x-1)^2,$$

pois $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2/n} = 1$, *já que*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2\ln x/x} \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{2/x} = e^0 = 1.$$

Assim, a série converge absolutamente se $3(x-1)^2 < 1$ *e diverge se* $3(x-1)^2 > 1$, *ou seja, converge absolutamente se* $|x-1| < 1/\sqrt{3}$ *e diverge se* $|x-1| > 1/\sqrt{3}$. *Assim, o raio de convergência é* $1/\sqrt{3}$.

Vejamos agora quando $|x-1| = 1/\sqrt{3}$, *isto é, quando* $(x-1)^2 = 1/3$. *Temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que é convergente. Logo, a série de potências converge quando $|x-1| = 1/\sqrt{3}$, *isto é, quando* $x = 1 - 1/\sqrt{3}$ *ou* $x = 1 + 1/\sqrt{3}$. *Portanto, o intervalo de convergência é* $[1 - 1/\sqrt{3}, 1 + 1/\sqrt{3}]$.

2. Considere a função $f(x) = x^4 e^{x^2}$.

0,5 (a) Encontre a série de Maclaurin de f.

Resolução: *Usando que*

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

vale para todo $u \in \mathbb{R}$, *obtemos*

$$f(x) = x^4 e^{x^2} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

1,0 (b) Utilizando o item anterior, calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x^4-x^6}{x^8}.$$

Resolução: *Note que, pelo item anterior,*

$$f(x)=x^4+x^6+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+4}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x^4-x^6}{x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+4}}{x^8}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n-4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)=\frac{1}{2},$$

pois toda série de potências é contínua.

0,5 (c) Quais os valores de $f^{(10)}(0)$ e $f^{(13)}(0)$?

Resolução: *Lembre que se* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ *então* $f^{(n)}(x_0)=a_n n!$.

Note que o coeficiente de $x^{10}=x^{2\cdot 3+4}$ *é* $\frac{1}{3!}$ *e o de* x^{13} *é zero pois não existe número natural* n *tal que* $2n+4=13$.
Assim, $f^{(10)}(0)=10!/3!$ *e* $f^{(13)}(0)=0$.

0,5 (d) Encontre uma série numérica cujo valor seja igual a

$$\int_0^1 x^4e^{x^2}dx.$$

Resolução: *Como a série de potências de* f *converge em* $\mathbb{R}$, *temos*

$$\int_0^1 x^4e^{x^2}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+4}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{2n+4}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)n!}.$$

3. Considere $f(x)=\pi-x$, $0\le x\le\pi$.

2,0 (a) Obtenha uma série de cossenos para f.

Resolução: *Basta estendermos* f *a uma função* $\tilde{f}$ *que seja* 2π *periódica e par. O gráfico de* $\tilde{f}$ *é uma função dente-de-serra (zigue-zague). Note que* $\tilde{f}$ *é contínua e* C^1 *por partes.*

Temos,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = 2x - \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

e para $n \geq 1$, *integrando por partes,*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right] = -\frac{2\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} = -2\frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Assim, a série de cossenos procurada é

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x,$$

Em particular, para $x \in [0, \pi]$, *temos*

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

$\boxed{1{,}0}$ (b) Usando o item anterior e a convergência das séries de Fourier, mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Resolução: *Colocando* $x = 0$ *na última fórmula do item anterior obtemos*

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4. Considere uma barra de 30 cm de comprimento que é feita de um material condutor de calor para o qual $\alpha^2 = 1$. Suponha que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente de modo a não permitir através dela transferência de calor com o meio ambiente. Suponha que as extremidades da barra também estejam isoladas termicamente. Suponha que a temperatura inicial é zero exceto no intervalo $5 < x < 10$, onde a temperatura é $25°$. Em suma, se $u(x,t)$ é a temperatura no ponto x e no instante t então u deve satisfazer o seguinte

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{em} \in (0,30)\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(30,t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \text{ ou } 10 \leq x \leq 30 \\ u(x,0) = 25 & \text{se } 5 < x < 10 \end{cases}.$$

$\boxed{2{,}0}$ (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$. Justifique todas as afirmações.

Resolução: *Usando o método da separação de variáveis, procuramos primeiramente soluções não triviais,* $u(x,t) = X(x)T(t)$*, que satisfaçam a equação do calor e as condições de contorno* $u_x(0,t) = u_x(30,t) = 0$, $t \geq 0$*. As condições de contorno implicam em* $X'(0) = X'(30) = 0$.

Temos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Dividindo por $X(x)T(t)$,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \doteq \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assim, T *deve satisfazer*

$$T' - \lambda T = 0 \tag{1}$$

enquanto que X,

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(30) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Com relação a X *consideremos os três casos a seguir.*

Caso $\lambda > 0$: *aqui a solução geral é*

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

cuja derivada vale

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Be^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Impondo as condições de contorno $X'(0) = X'(30) = 0$ *obtemos o sistema*

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(A - B) = 0 \\ \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}} - Be^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ Ae^{\sqrt{\lambda}} - Be^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B - 0.$$

Logo, $X \equiv 0$ *e, portanto,* $u \equiv 0$.

Caso $\lambda = 0$: *a solução geral é* $X(x) = Ax + B$*. Como* $X'(x) = A$*, impondo as condições de contorno obtemos* $X(x) = B$*. Assim,* $X(x) \doteq X_0(x) = 1$ *é uma solução não trivial de* (2).

Caso $\lambda < 0$: *aqui a solução geral é*

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\,\mathrm{sen}\sqrt{-\lambda}x$$

cuja derivada é

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-A\,\mathrm{sen}\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x).$$

Impondo as condições de contorno obtemos o sistema

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}B = 0 \\ \sqrt{-\lambda}(-A \operatorname{sen} 30\sqrt{-\lambda} + B\cos 30\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A \operatorname{sen} 30\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

que possui solução não trivial se e somente se $30\sqrt{-\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *isto é, quando* $\lambda = \lambda_n \doteq -\frac{n^2\pi^2}{900}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Neste caso, podemos tomar* $X_n(x) \doteq \cos \frac{n\pi}{30}x$.

Para os valores de $\lambda = 0$ *e* $\lambda = \lambda_n \doteq -\frac{n^2\pi^2}{900}$, *resolvemos a equação* (1), *obtendo respectivamente*

$$T_0(t) = c_0 \quad e \quad T_n(t) = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t}.$$

Assim, u *corresponde à série*

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t} \cos \frac{n\pi}{30}x.$$

Para que a condição inicial seja satisfeita precisamos que

$$f(x) = u(x,0) = f(x) \doteq \begin{cases} 0 & se\ 0 \le x \le 5\ ou\ 10 \le x \le 30 \\ 25 & se\ 5 < x < 10 \end{cases},$$

ou seja,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t} \cos \frac{n\pi}{30}x = f(x), \quad x \in [0, 30].$$

Desta forma, os coeficientes c_n *ficam determinados, quando estendemos* f *a uma função* $\tilde{f}$ *que seja par e 60-periódica através das fórmulas*

$$c_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} \int_{-30}^{30} \tilde{f}(x)dx = \frac{1}{30} \int_0^{30} f(x)dx = \frac{1}{30} \int_5^{10} 25\,dx = \frac{25}{6}$$

e, para $n \ge 1$,

$$c_n = \frac{1}{30} \int_{-30}^{30} \tilde{f}(x) \cos \frac{n\pi}{30}x\,dx = \frac{2}{30} \int_0^{30} f(x) \cos \frac{n\pi}{30}x\,dx$$

$$= \frac{1}{15} \int_5^{10} 25 \cos \frac{n\pi}{30}x\,dx = \frac{5}{3} \cdot \frac{30}{n\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{30}10 - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{30}5 \right) = \frac{50}{n\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} \right).$$

Assim,

$$u(x,t) = \frac{25}{6} + \frac{50}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t} \cos \frac{n\pi}{30}x.$$

1,0 (b) Determine a temperatura estacionária da barra. Justifique.

Resolução: *A temperatura estacionária é dada por*

$$T_\infty = \lim_{t\to+\infty} u(x,t).$$

Como para $t>0$ *vale que*

$$\left|\frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t}\cos\frac{n\pi}{30}x\right|$$

$$\leq \frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right|e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t}\left|\cos\frac{n\pi}{30}x\right| \leq \frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t} \leq \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t}$$

$$= \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{\pi^2}{900}t}\right)^{n^2} \leq \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{\pi^2}{900}t}\right)^{n} = \frac{100}{\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi^2}{900}t}}{1-e^{-\frac{\pi^2}{900}t}} \to 0, \textit{ quando } t\to+\infty,$$

ou seja,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t}\cos\frac{n\pi}{30}x = 0.$$

Assim,

$$T_\infty = \lim_{t\to+\infty} u(x,t) =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{25}{6}+\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{900}t}\cos\frac{n\pi}{30}x\right] = \frac{25}{6}.$$

Vale notar que T_∞ *é a média da distribuição inicial de temperatura na barra*

$$\frac{1}{30}\int_0^{30} f(x)\,dx = \frac{1}{30}\int_5^{10} 25\,dx = \frac{25}{6}.$$