ICMC – USP

SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1

$5^{\underline{a}}$ lista de exercícios

1. Sejam $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, sendo que

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-k/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} I_{\mathbb{R}^k}(\boldsymbol{x}),$$

com $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ $k \times k$ simétrica definida positiva.

   (a) Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$.

   (b) Apresente os EMV de $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$. Apresente o EMV do p-ésimo quantil da distribuição, $0 < p < 1$.

3. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathsf{multinomial}_k(n, \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$, $\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$ e $0 < \theta_j < 1$, $j = 1, \ldots, k$, com n conhecido. Apresente o EMV de $\boldsymbol{\theta}$.

4. Uma amostra aleatória de n observações foi obtida de uma distribuição $\mathsf{exponencial}(\theta)$, $\theta > 0$. As observações com valores maiores do que x_0 não foram registradas, x_0 conhecido. Na amostra existem k valores maiores do que x_0, $0 \leq k \leq n$.

   (a) Apresente uma estatística suficiente para θ.

   (b) Apresente o EMV de θ.

5. Prentendemos estimar a esperança de uma variável aleatória com distribuição $\mathsf{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$. Em uma amostra aleatória de tamanho n, registramos o número de observações maiores do que 0.

   (a) Apresente um estimador de θ pelo método dos momentos.

   (b) Apresente o EMV de θ.