PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

2011

Principais modelos probabilísticos discretos

1. Modelo Bernoulli

Experimentos que admitem apenas dois resultados

Alguns exemplos:

1. Uma peça é classificada como *defeituosa* ou *não defeituosa*;
2. O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é *positivo* ou *negativo*.
3. Um entrevistado *concorda* ou *não* com uma afirmação feita;
4. No lançamento de um dado *ocorre* ou *não* face 6;
5. Um item produzido é classificado como *conforme* ou *não conforme*.

Situações com alternativas dicotômicas podem ser representadas genericamente por resposta do tipo sucesso ou fracasso**.**

Esses experimentos recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma v.a. com *distribuição de Bernoulli*.

Distribuição de Bernoulli

X é uma v.a. que assume apenas dois valores: 1 se ocorrer sucesso (S) e 0 se ocorrer fracasso (F). Sendo p a probabilidade de sucesso, 0 < p <1.

X(S) = 1 e X(F) = 0. A distribuição de probabilidade é dada por

x	0	1
P(X=x)	1 – p	p

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1. \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: X ~ Bernoulli (p) indica que a v.a. X tem distribuição de Bernoulli. O parâmetro da distribuição é p.

Se X ~ Bernoulli(p), então

E(X) = p

e Var(X) = p (1 – p).

Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli dão origem ao modelo binomial.

2. Modelo binomial

Exemplo. Uma moeda é lançada 3 vezes e a probabilidade de cara é p em cada lançamento. Determinar a distribuição de probabilidade da variável número de caras nos 3 lançamentos (X).

Denotemos S: sucesso, ocorre cara (c) e F: fracasso, ocorre coroa (k).

O espaço amostral para este experimento é

Ω = {FFF, FFS, FSF, SFF, FSS, SFS, SSF,SSS}.

Fazemos X_i ~ Bernoulli(p), i = 1,2,3. Logo, $X = X_1 + X_2 + X_3$ representa o número de caras nos 3 lançamentos.

Ω	Probabilidade	X_1	X_2	X_3	$X=X_1+X_2+X_3$
FFF	$(1-p)^3$	0	0	0	0
FFS	$(1-p)^2p$	0	0	1	1
FSF	$(1-p)^2p$	0	1	0	1
SFF	$(1-p)^2p$	1	0	0	1
FSS	$(1-p)p^2$	0	1	1	2
SFS	$(1-p)p^2$	1	0	1	2
SSF	$(1-p)p^2$	1	1	0	2
SSS	P^3	1	1	1	3

Calculamos

$$P(X=0)=P(\{FFF\})=(1-p)^3,$$
$$P(X=1)=P(\{FFS, FSF, SFF\})=3p(1-p)^2,$$
$$P(X=2)=P(\{FSS, SFS, SSF\})=3p^2(1-p) \text{ e}$$
$$P(X=3)=P(\{SSS\})=p^3.$$

A *distribuição de probabilidade* da v.a. X é dada por

x	0	1	2	3
$f(x)=P(X=x)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

f(x) pode ser escrita como

$$f(x)=\begin{cases}\binom{3}{x}p^x(1-p)^{3-x}, & \text{se } x=0,1,2,3,\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

$$\text{em que } \binom{3}{x}=\frac{3!}{x!(3-x)!}.$$

Distribuição binomial

Repetição de n ensaios de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória que conta o número de sucessos nos n ensaios de Bernoulli é denominada variável aleatória binomial com parâmetros n e p.

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, & \text{se } x=0,1,\cdots,n,\\ 0, & \text{c.c.,}\end{cases}$$

$$\text{em que } \binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ representa o coeficiente binomial.}$$

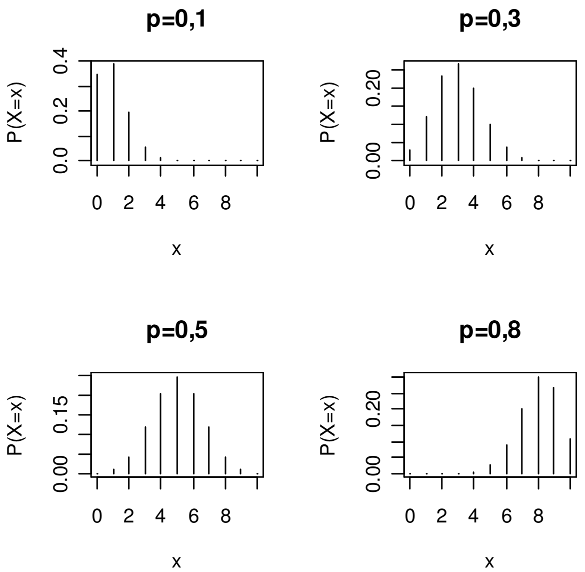
Notação: X ~ B(n,p) para indicar que a v.a. X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p.

Se X ~ B(n, p), então

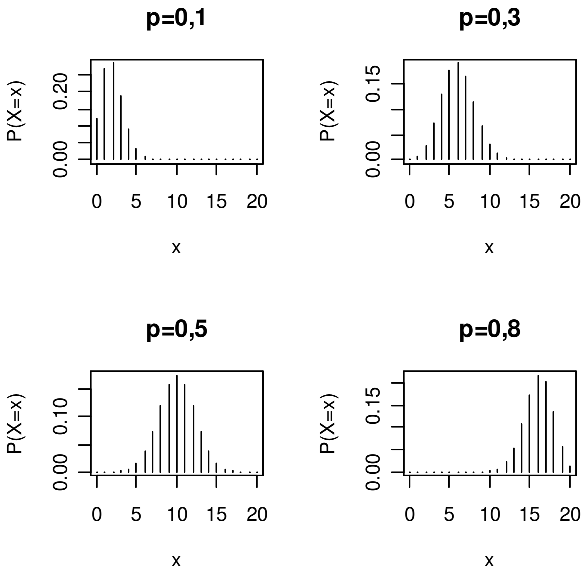
E(X) = np e

Var(X) = np(1 – p).

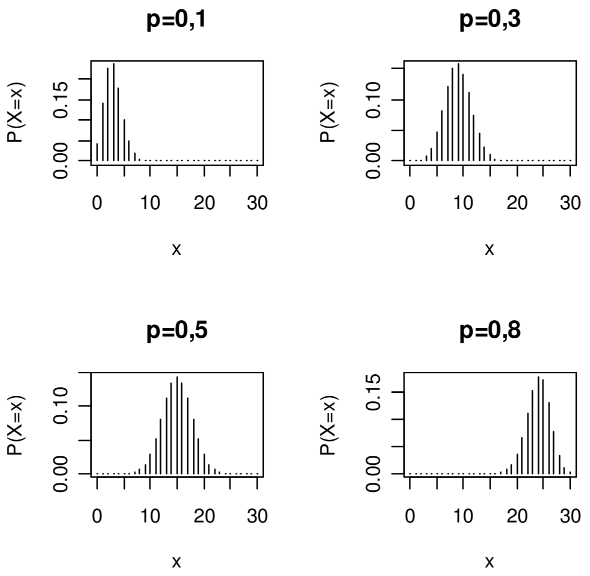
Distribuição B(n =10, p)



Distribuição B(n = 20, p)



Distribuição B(n = 30, p)



Exemplo

O professor da disciplina de Estatística elaborou uma prova de múltipla escolha, composta de 10 questões cada uma com 5 alternativas. Aprovação na disciplina requer pelo menos 6 questões corretas. Se um aluno responde a todas as questões baseado em palpite ("chute"), qual a probabilidade de ser aprovado?

Solução. X é a v.a. número de questões respondidas corretamente nas 10 questões. Eventos: S: "questão respondida corretamente" e F: "questão respondida incorretamente".

P(S) = 1 / 5 e P(F) = 4 / 5. Logo, X ~ B(10, p).

$$f(x)=\begin{cases}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}, & \text{se } x=0,1,\cdots,10\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

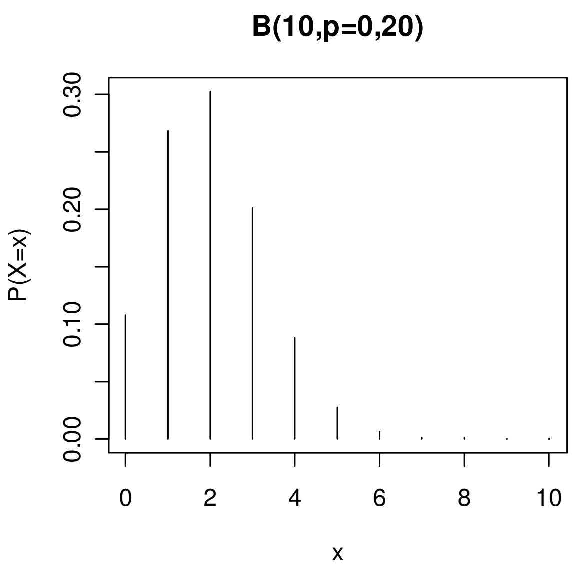
A probabilidade de aprovação é

$$\mathrm{P}(X \geq 6) = 1 - \mathrm{P}(X < 6) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 5) = 1 - F(5)$$
$$= 1 - 0{,}9936306 = 0{,}00637.$$

Exemplo

x	f(x)	F(x)
0	0,107374	0,10737
1	0,268435	0,37581
2	0,301990	0,67780
3	0,201327	0,87913
4	0,088080	0,96721
5	0,026424	0,99363
6	0,005505	0,99914
7	0,000786	0,99992
8	0,000074	1,00000
9	0,000004	1,00000
10	0,000000	1,00000

Exemplo



Exemplo

Um fabricante adquire certo tipo de componente de um fornecedor. Segundo este fornecedor, a proporção de componentes defeituosos é 2%.

(a) O fabricante seleciona 15 componentes de um lote para inspeção. Qual a probabilidade de que seja encontrado pelo menos um componente defeituoso neste lote?

(b) O fabricante adquire 10 lotes por mês e de cada lote são selecionados 15 componentes para inspeção, como no item (a). Qual a probabilidade de que sejam encontrados três lotes com pelo menos um componente defeituoso?

Solução. (a) Definimos o evento sucesso (S) como "o componente selecionado é defeituoso". Pelo enunciado, P(S) = p = 0,02. A v.a. X é definida como sendo o número de componentes defeituosos (sucessos) em n = 15 componentes. Supondo independência, X ~ B(n = 15, p = 0,02).

Devemos calcular P(X ≥ 1), que é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{15}{0} \times 0{,}02^{0} \times (1 - 0{,}02)^{15-0}$$

$$= 1 - 0{,}98^{15} = 0{,}261.$$

Em Excel:

= 1 - DISTRBINOM(0; 15; 0,02; FALSO)

Exemplo

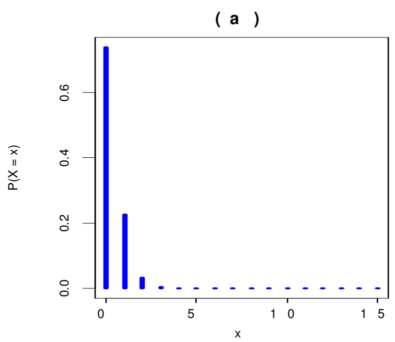
Solução. (b) Definimos o evento sucesso (S) como "o lote contém pelo menos um componente defeituoso". De acordo com o item (a), P(S) = p = 0,261. A v.a. Y é definida como sendo o número de lotes com pelo um componente defeituoso (sucessos) em n = 10 lotes. Supondo independência, Y ~ B(n = 10, p = 0,261).

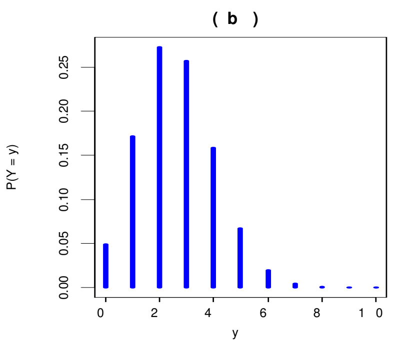
Devemos calcular P(Y = 3), que é dada por

$$P(Y = 3) = \binom{10}{3} \times 0{,}261^{3} \times (1 - 0{,}261)^{10-3} = 0{,}257.$$

Em Excel:

= DISTRBINOM(3; 10; 0,261; FALSO)





3. Modelo hipergeométrico

Um conjunto de N elementos é dividido em duas classes. Uma classe com M (M < N) elementos (sucessos) e a outra com N – M elementos (fracassos).

Por exemplo, no caso de N itens produzidos, podem ser considerados M itens defeituosos e N – M itens não defeituosos.

Uma amostra de tamanho n (n < N) é sorteada sem reposição. A v.a. X é definida como o número de elementos com a característica de interesse (sucesso) na amostra de tamanho n.

(1) n elementos são selecionados de um conjunto de N elementos. (2) x sucessos são escolhidos de uma classe com M sucessos. (3) Finalmente, n – x fracassos são escolhidos de uma classe com N – M fracassos.

A função de probabilidade da v.a. X é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{se } x = \max\{0, n-(N-M)\}, \cdots, \min\{n, M\}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: X ~ H(N, M, n) indica que a v.a. X tem distribuição hipergeométrica com parâmetros N, M e n.

Se X ~ H(N, M, n), então $E(X) = n\left(\dfrac{M}{N}\right)$ e $Var(X) = n\left(\dfrac{M}{N}\right)\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right).$

Exemplo (Hines *et al.*, 2006, p. 105)

Em um departamento de inspeção de recebimento, lotes de eixo de bomba são recebidos periodicamente. Os lotes contêm 100 unidades e o seguinte plano de amostragem de aceitação é usado. Seleciona-se uma amostra de 10 unidades sem reposição. O lote é aceito se a amostra tiver, no máximo, um eixo defeituoso. Suponha que um lote seja recebido e que 5% dos itens sejam defeituosos. Qual a probabilidade de que o lote seja aceito ?

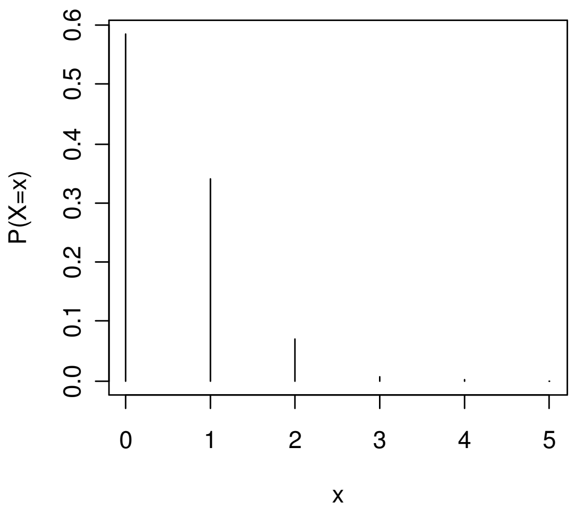
X: número de defeituosos na amostra $\Rightarrow$ X ~ H(N = 100, M = 5, n = 10).

$$\mathrm{P}(\text{aceitar o lote}) = \mathrm{P}(X \le 1) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1)$$

$$= \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} = 0{,}923\,.$$

Em Excel: =DIST.HIPERGEOM(0;10;5;100) + DIST.HIPERGEOM(1;10;5;100).

Exemplo (Hines *et al.*, 2006, p. 105)



4. Modelo de Poisson

Muitos experimentos consistem em observar a ocorrência de eventos em determinada unidade (de tempo, volume, comprimento, área, ...)

Exemplos

1. Número de consultas a uma base de dados em um minuto.
2. Número de acidentes de trabalho por semana em uma fábrica.
3. Número de pequenas manchas por m^2 no esmaltado de uma geladeira.
4. Número de chamadas que chegam a uma central telefônica de uma empresa a cada 10 min.
5. Número de carros que chegam ao campus entre 7:00 e 8:00h.
6. Número de microorganismos por cm^3 de água contaminada.
7. Número de defeitos em cada teclado produzido por uma fábrica.

Suposições básicas

O fenômeno estudado ocorre em intervalos (de tempo, de espaço, etc.).

O intervalo pode ser dividido em subintervalos com comprimentos suficientemente pequenos tais que

- a probabilidade de ocorrência de mais um evento em um subintervalo é pequena,
- a probabilidade de ocorrência de um evento em um subintervalo seja a mesma para todos os subintervalos e proporcional ao comprimento do subintervalo e
- a contagem em cada subintervalo seja independente de outros subintervalos.

Pode ser provado que a distribuição do número de ocorrências é Poisson.

Distribuição de Poisson

Uma v. a. discreta X tem distribuição de Poisson com parâmetro μ se sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}, & \text{se } x = 0,1,2,\cdots, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

em que x é número de eventos em t unidades de medida,

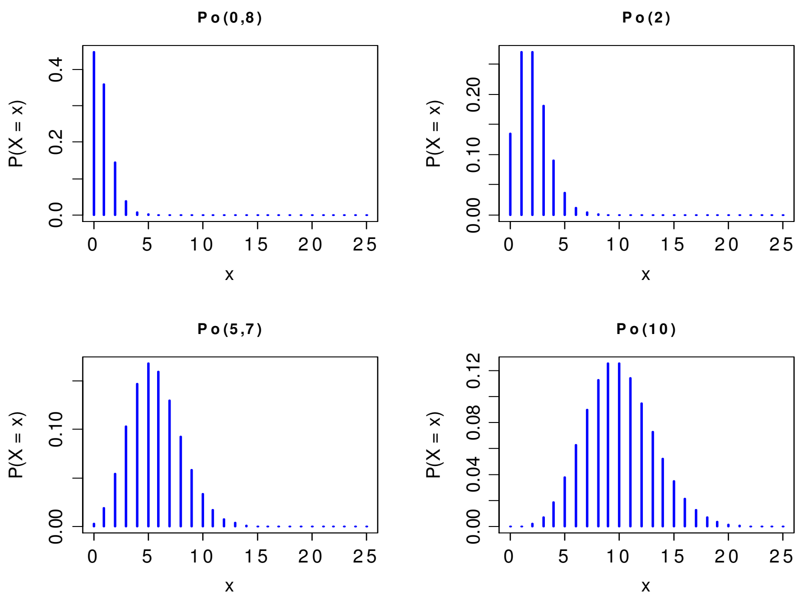
λ é o número médio de eventos (taxa) em uma unidade de medida (t = 1) e

$\mu = \lambda$ t é o número médio de eventos em t unidades de medida.

Notação: X ~ Po(μ) indica que a v.a. X tem distribuição de Poisson com parâmetro μ.

Propriedades: E(X) = μ e Var(X) = μ.

Distribuição Po(μ)



Exemplo

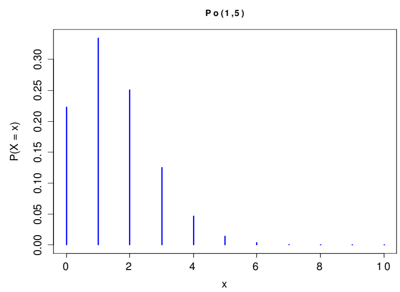
As chegadas a um posto de atendimento ocorrem de forma independente seguindo a distribuição de Poisson. Suponha que a média de chegadas é 3 a cada 4 minutos. Qual é a probabilidade de que este posto receba no máximo 2 solicitações em um intervalo de 2 minutos?

Solução. Se X é número de chegadas a este posto a cada 2 minutos,

então X ~ Po(μ). Aqui, t = 2 min e $\lambda = ¾ = 0{,}75$. Logo, $\mu = 0{,}75 \times 2 = 1{,}5$. Ou seja,

X ~ Po(1,5) e

$$f(x) = \frac{e^{-1,5}\, 1{,}5^{x}}{x!}, \text{ se } x = 0,1,2,3....$$



Calculamos

$$P(X \le 2) = F(2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= e^{-1,5}\left(1 + 1{,}5 + \frac{1{,}5^{2}}{2}\right) = 0{,}809$$

Em Excel: =POISSON(2;1,5; VERDADEIRO).

Exemplo

O número de pedidos de empréstimos que um banco recebe por dia é uma variável aleatória, sendo que em média são recebidos 7,5 empréstimos por dia. Determine as probabilidades de que, em um dia qualquer, o banco receba

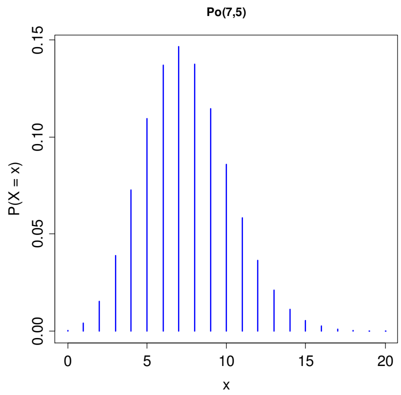
(a) Exatamente 2 pedidos de empréstimo;

(b) No máximo 2 pedidos de empréstimo;

(c) No mínimo 8 pedidos de empréstimo.

Solução. Supomos que X (número de pedidos de empréstimos que o banco recebe por dia) tem distribuição Poisson com média μ = 7,5. Logo,

$$f(x) = \frac{e^{-7,5} 7,5^x}{x!}, \text{ se } \ x = 0,1,2,\cdots.$$



Exemplo

Calculamos

$$(a)\ \mathrm{P}(X = 2) = \frac{e^{-7,5}(7,5)^2}{2} = 0,0156,$$

$$(b)\ \mathrm{P}(X \leq 2) = F(2) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2)$$

$$= 0,000553 + 0,004148 + 0,015555 = 0,0203 \text{ e}$$

$$(c)\ \mathrm{P}(X \geq 8) = 1 - \mathrm{P}(X < 8) = 1 - F(7) = 1 - \sum_{x=0}^{7} \mathrm{P}(X = x)$$

$$= 1 - (0,000553 + \cdots + 0,146484)$$

$$= 1 - 0,5246385 = 0,4754.$$

Exemplo

Contaminação é um problema de fabricação de discos ópticos. O número de partículas de contaminação que ocorrem em um disco óptico tem uma distribuição de Poisson e o número médio de partículas por cm^2 de superfície é 0,1. A área da superfície do disco em estudo é 100 cm^2. Encontre a probabilidade de que 12 partículas sejam encontradas em um disco.

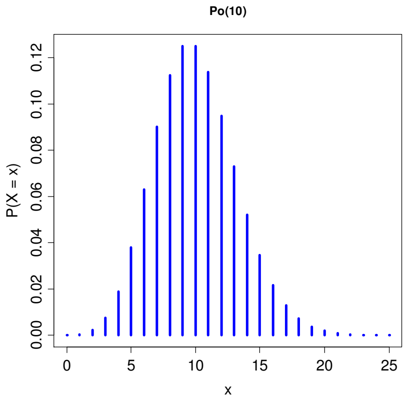
Solução. Se X é o número de partículas na superfície do disco, então X ~ Po(μ). Temos t = 100 cm^2 e λ = 0,1 por cm^2. Logo, $\mu = t \times \lambda = 100 \times 0,1 = 10$. Ou seja, X ~ Po(10) e

$$f(x) = \frac{e^{-10} 10^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\cdots$$

Calculamos

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10} 10^{12}}{12!} = 0,095.$$

Em Excel: =POISSON(12;10;FALSO).



Resultado. Se $X_1,\ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson com parâmetros $\mu_1,\ldots, \mu_n$ respectivamente, então a variável aleatória $Y = X_1 + \ldots + X_n$ tem distribuição Poisson com parâmetro $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$.

Exemplo. Em uma fábrica, dados históricos mostram que em três semanas típicas os números médios de acidentes são 2,5 na primeira semana, 2 na segunda semana e 1,5 na terceira semana. Suponha que o número de acidentes por semana segue uma distribuição de Poisson. Qual a probabilidade de que ocorram 4 acidentes em três semanas típicas?

Solução. X_i representa o número de acidentes na i-ésima semana, i = 1,2,3, com X_i ~ Po(μ_i). Supomos que X_1, X_2 e X_3 são independentes. Portanto, $Y = X_1 + X_2 + X_3$ tem distribuição Poisson com parâmetro μ = 2,5 + 2 + 1,5 = 6. Calculamos

$$P(Y = 4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = 0,1339.$$

5. Modelo geométrico

Ensaios de Bernoulli são realizados de forma independente e cada um com probabilidade de sucesso igual a p.

Estamos interessados no número de ensaios que antecedem a ocorrência do 1º sucesso.

A v.a. X que conta este número tem distribuição geométrica com parâmetro p, notando que X ∈ {0, 1 , 2, ...}.

Se "S" e "F" representam os eventos sucesso e fracasso e X = x, temos a sequência

$$\underbrace{\mathrm{F} \quad \mathrm{F} \quad \ldots \quad \mathrm{F}}_{x \text{ fracassos}}\mathrm{S}.$$

Sendo assim,

$$\mathrm{P}(X=x)=\underbrace{(1-p)\times \ (1-p)\times \ \ldots\times \ (1-p)}_{x\,\text{fracassos}}\times p.$$

Distribuição geométrica

Se ensaios de Bernoulli independentes e com probabilidade de sucesso igual a p são realizados, o número de ensaios que antecedem o primeiro sucesso tem uma distribuição geométrica com parâmetro p e sua função de probabilidade é dada por

$$f(x)=\mathrm{P}(X=x)=(1-p)^x\,p, \quad \text{se} \ \ x=0,1,2,\ldots \ \text{e} \ \ 0<p<1.$$

Notação: X ~ Geo(p).

Se X ~ Geo(p), então

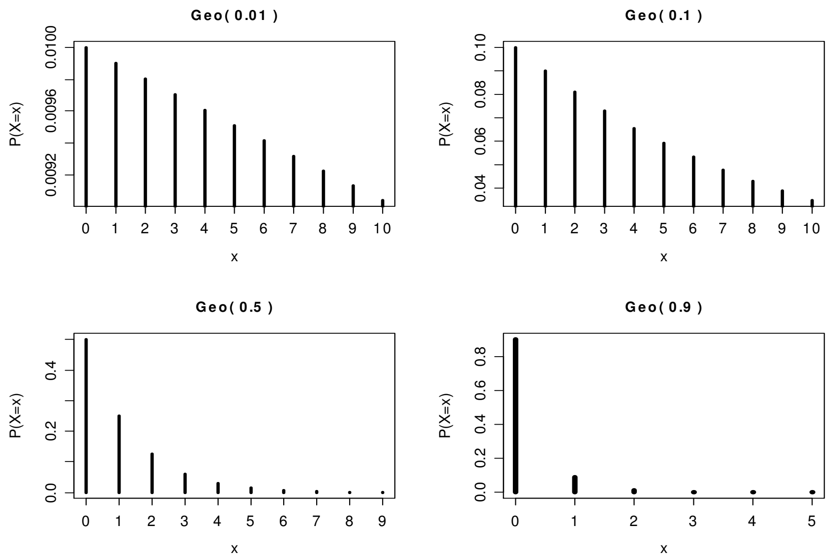
E(X) = (1 – p) / p e

Var(X) = (1 – p) / p^2.

Propriedade: Se X ~ Geo(p), então P(X > k + m | X > m) = P(X > k).

É a única distribuição discreta com esta propriedade ("falta de memória").

Distribuição Geo(p)



Outra definição de distribuição geométrica

Se ensaios de Bernoulli independentes e com probabilidade de sucesso igual a p são realizados, o número de ensaios Y até que ocorra o primeiro sucesso tem uma distribuição geométrica com parâmetro p e sua função de probabilidade é dada por

$$f(y) = \mathrm{P}(Y = y) = (1-p)^{y-1}\,p, \quad \text{se} \;\; \mathrm{y} = 1,2,\ldots \;\; \text{e} \;\; 0 < p < 1.$$

Relação entre as duas definições:

Y = X + 1,

E(Y) = E(X) + 1 = (1 – p) / p + 1 = 1 / p e

Var(Y) = Var(X) = (1 – p) / p^2.

Obs. Qual a relação entre a distribuição geométrica e os álbuns de figurinhas?

Exemplo (Hines *et al.*, 2006, p. 101)

Certo experimento deve ser realizado até que seja obtido um resultado bem sucedido. As realizações são independentes e o custo de cada experimento é \$25.000, sendo que se o resultado for um insucesso, há um custo adicional de \$5.000 para o preparo da próxima realização.

(a) Obtenha o custo esperado do experimento.

(b) Se o orçamento não pode ultrapassar \$500.000, qual a probabilidade de que este valor seja ultrapassado.

Solução. Definimos Y como sendo o número de realizações até que ocorra o primeiro resultado bem sucedido, notando que $Y \in \{1, 2, ...\}$ e tem distribuição geométrica com parâmetro p e $f(y) = (1 - p)^{y-1}p$ (veja lâmina 29). Pelo enunciado, o custo é uma v.a., função de Y, dada por

$C(Y) = 25000\,Y + 5000\,(Y - 1) = 30000\,Y - 5000.$

Usando propriedades do valor esperado obtemos

$E[C(Y)] = 30000\,E(Y) - 5000 = 30000 / p - 5000.$

Se p = 0,25, o custo esperado vale \$115.000.

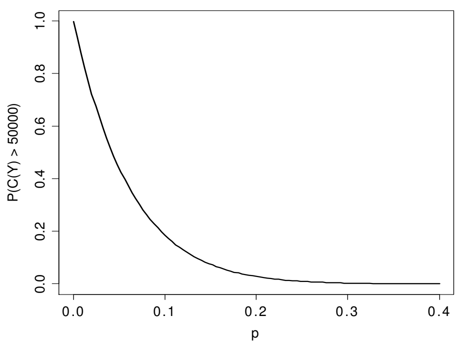
Exemplo (Hines *et al.*, 2006, p. 101)

Na letra (b) devemos calcular P(C(Y) > 500000). Usando a expressão de C(Y),

$$\begin{aligned} P(C(Y) > 500000) &= P(30000\,Y - 5000) > 500000) \\ &= P(Y > 505000 / 30000) = P(Y > 16{,}8) \\ &= 1 - P(Y \le 16{,}8) = 1 - P(Y \le 16) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{16} (1-p)^{k-1} p, \quad 0 < p < 1. \end{aligned}$$

Se p = 0,25,

P(C(Y) > 500000) = 0,010.



6. Modelo binomial negativa

Ensaios de Bernoulli são realizados de forma independente e cada um com probabilidade de sucesso igual a p.

Interesse no número de ensaios que até que ocorram r sucessos, $r \geq 1$.

A v.a. X que conta este número tem distribuição binomial negativa com parâmetros r e p, notando que $X \in \{ r, r + 1 , r + 2, ...\}$.

Se "S" e "F" representam os eventos sucesso e fracasso e X = x, temos sequências do tipo

$$\underbrace{\text{FSF} \quad \text{SF} \quad \ldots \quad \text{F}}_{r-1 \text{ sucessos em } x-1 \text{ ensaios}}\text{S},$$

cada uma com probabilidade = $p^r (1 - p)^{x - r}$.

$$\text{Número de sequencias} = \binom{x-1}{r-1} = \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!}.$$

Distribuição binomial negativa

Se ensaios de Bernoulli independentes e com probabilidade de sucesso igual a p são realizados, o número de ensaios até que ocorram r sucessos tem uma distribuição binomial negativa com parâmetros r e p. Sua função de probabilidade é dada por

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad \text{se } x = r, r+1, r+2, \ldots \text{ e } 0 < p < 1.$$

Notação: X ~ BN(r, p).

Se X ~ BN(r, p), então

E(X) = r / p e

Var(X) = r (1 – p) / p^2.

Obs. (a) r = 1: distribuição geométrica na lâmina 29.

(b) Em Excel: função DIST.BIN.NEG.

Distribuição BN(r, p)