15a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear 27.11.2012

`Problemas envolvendo matrizes complexas`

1. Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ uma transformação linear tal que a sua matriz em relação a uma base B de $\mathbb{C}^4$ é

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostre que os autovalores de T são i, $-i$ e 1, sendo i e $-i$ de multiplicidade algébrica um e 1 de multiplicidade algébrica dois. Calcule os autovetores associados e verifique a o autovalor 1 tem multiplicidade algébrica um. Conclua que T não é diagonalizável, ou seja, mesmo no caso complexo uma transformação linear pode não ser diagonalizável.

2. Em cada caso, verifique que se a matriz A é Hermitiana. Em caso afirmativo, encontre uma matriz unitária U tal que U^*AU seja diagonal:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Mostre que a transformação $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6i & -10-2i \\ 2-10i & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

é unitariamente diagonalizável. *(Aqui $\mathbb{C}^2$ é visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e portanto sua base canônica é a a mesma do $\mathbb{R}^2$.)*

4. Uma matriz complexa A é dita anti-Hermitiana se $A^* = -A$. Mostre que:

   (a) Mostre que $A - A^*$ é a anti-Hermitiana para toda matriz complexa A.

   (b) Se A é anti-Hermitiana, mostre que os autovalores de de A são imaginários puros.

   (c) Mostre que toda matriz complexa A pode ser escrita como $A = H + S$, em que H é Hermitiana e S é anti-Hermitiana.

5. Mostre que $\langle Zx, y\rangle = \langle x, Z^*y\rangle$ para todos os vetores $x, y \in \mathbb{C}^n$ e toda matriz complexa Z $n \times n$.

6. Seja U uma matriz unitária.

   (a) Mostre que U^* também é unitária.

   (b) Mostre que U é invertível e que U^{-1} também é unitária.

   (c) Mostre que $\|Ux\| = \|x\|$ para todo vetor $x \in \mathbb{C}^n$.

   (d) Mostre que $|\lambda| = 1$ para todo autovalor λ de U.