



1. ANÁLISE EXPLORATÓRIA E ESTATÍSTICA DESCRITIVA

2011

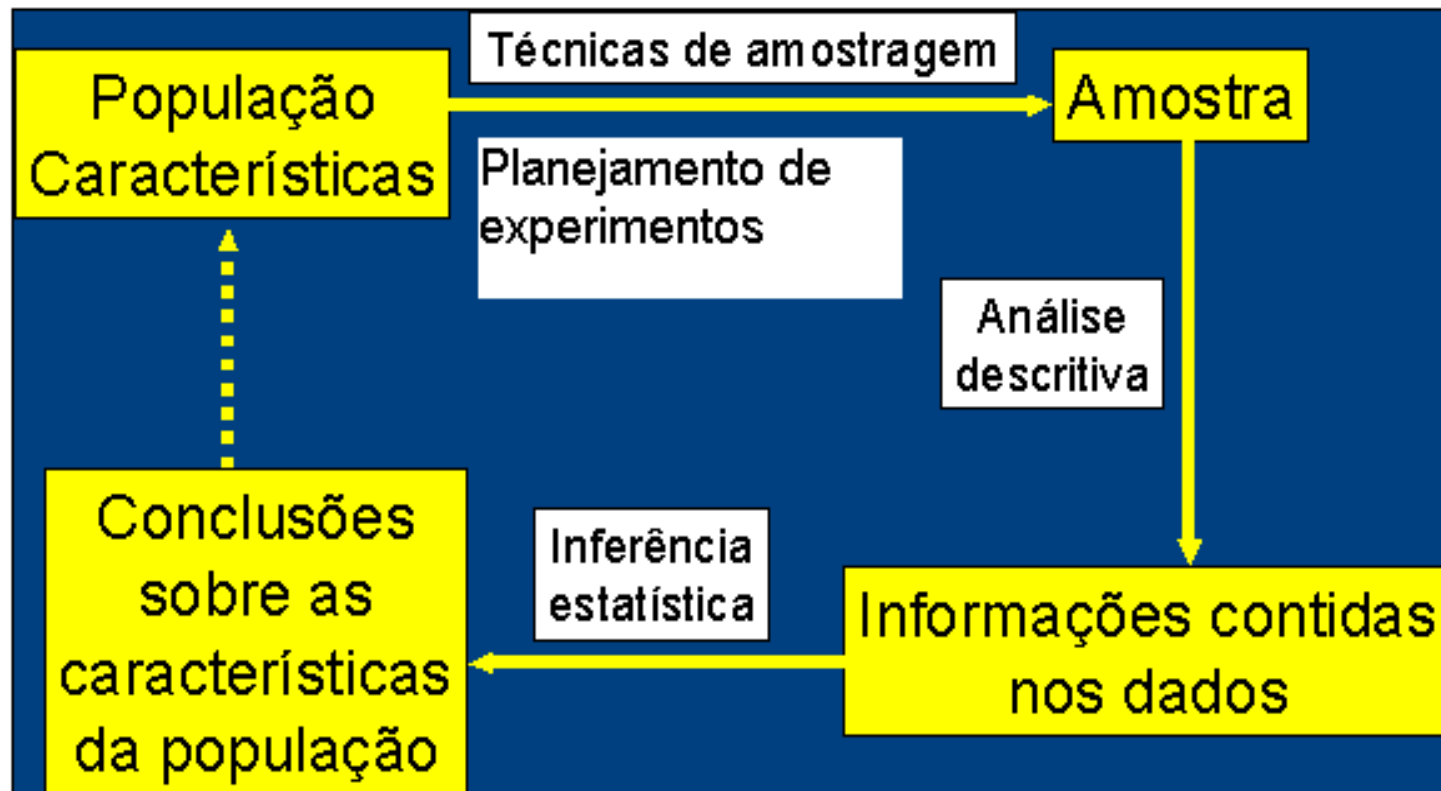
Estatística Descritiva e Análise Exploratória

Etapas iniciais. Utilizadas para descrever e resumir os dados. A disponibilidade de uma grande quantidade de dados e de métodos computacionais muito eficientes revigorou estas áreas da Estatística.

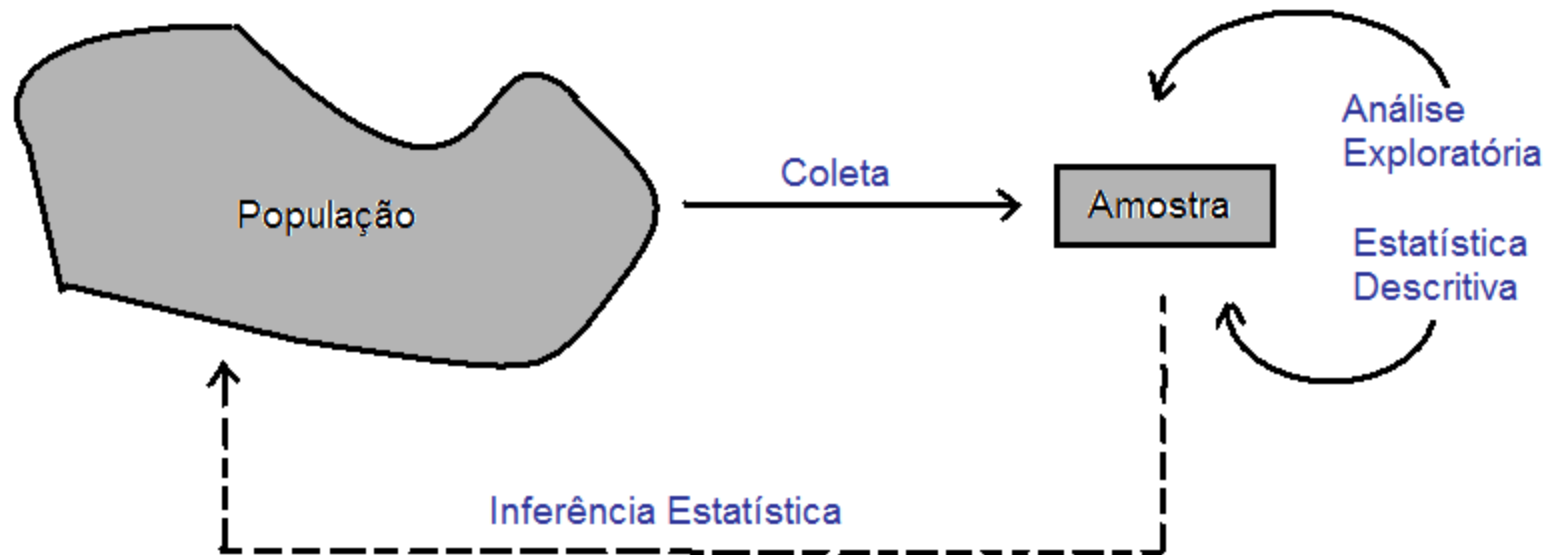
Probabilidade

Permite estudar os fenômenos aleatórios, ou seja, aqueles em que está presente a incerteza sobre os seus resultados.

Estatística



Estatística



O que é Estatística ?

Para muitos, Estatística não passa de conjuntos de tabelas de dados numéricos. Os estatísticos são pessoas que coletam esses dados.

A Estatística originou-se com a coleta de dados e a construção de tabelas para os governos.

A situação evoluiu e esta coleta de dados representa somente um dos aspectos da Estatística.

Definição de Estatística

A Estatística é uma ciência baseada na **Teoria da Probabilidade**, cujo objetivo principal é nos auxiliar a tomar decisões ou tirar conclusões em situações de incerteza, a partir de dados.

População: conjunto de todas as unidades que são de interesse em um certo estudo.

Amostra: qualquer subconjunto da população selecionado de acordo com certas regras.

Censo: estudo que inclui todos os elementos da população.

Coleta

Experimento planejado

Efeito de um ou mais fatores sobre outro(s).

Interferência do pesquisador.

Controle sobre fatores externos.

Levantamento observacional

Dados são coletados “como estão”.

Não há interferência do pesquisador.

Levantamento amostral (*survey*)

População bem definida.

Protocolo de coleta.

Amostragem

Uma área importante em muitas aplicações estatísticas é a da **Tecnologia de Amostragem**.

Exemplos:

- Pesquisa de mercado,
- Pesquisa de opinião,
- Avaliação do processo de produção.

Exemplo em R (www.r-project.org)

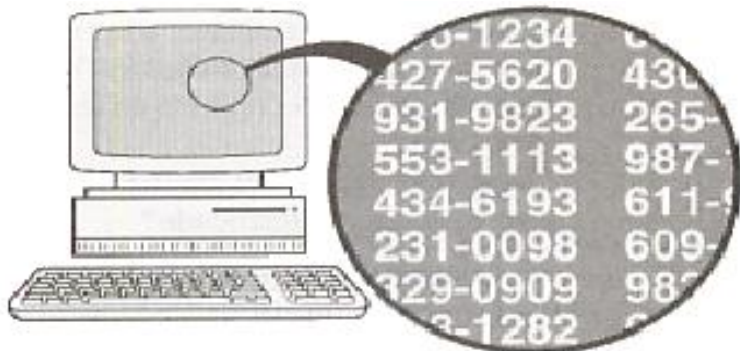
```
> alunos = read.csv("ListadePresença.csv", header = TRUE, sep = ";")

> names(alunos)
[1] "Codigo"    "Ingresso"  "Curso"     "Nome"

> nal = dim(alunos)[1]

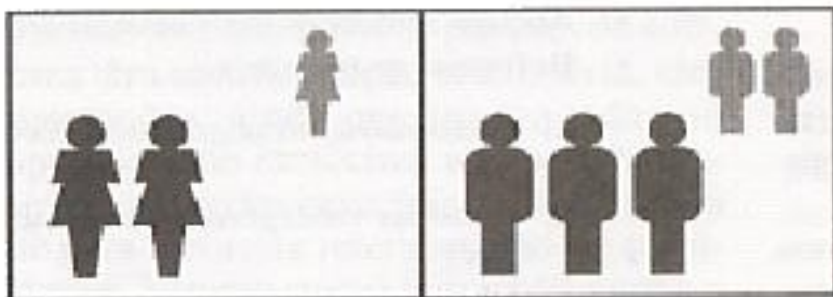
>(amostra = sample(1:nal, 5))
[1] 29  3 38 20 12

> alunos[amostra, -dim(alunos)[2]]
  Codigo Ingresso Curso
29 6426472 2008/1 55051
 3  5910474 2007/1 97001
38 6811298 2009/1 18083
20 6811392 2009/1 18083
12 6882318 2009/1 18083
```



Amostragem Aleatória

Cada elemento da população tem uma chance conhecida de ser selecionado.



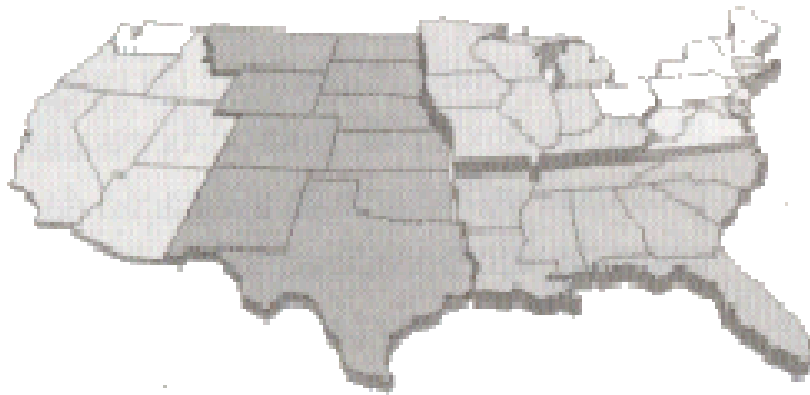
Amostragem Estratificada

Classificar a população em pelo menos dois estratos e selecionar uma amostra de cada um.



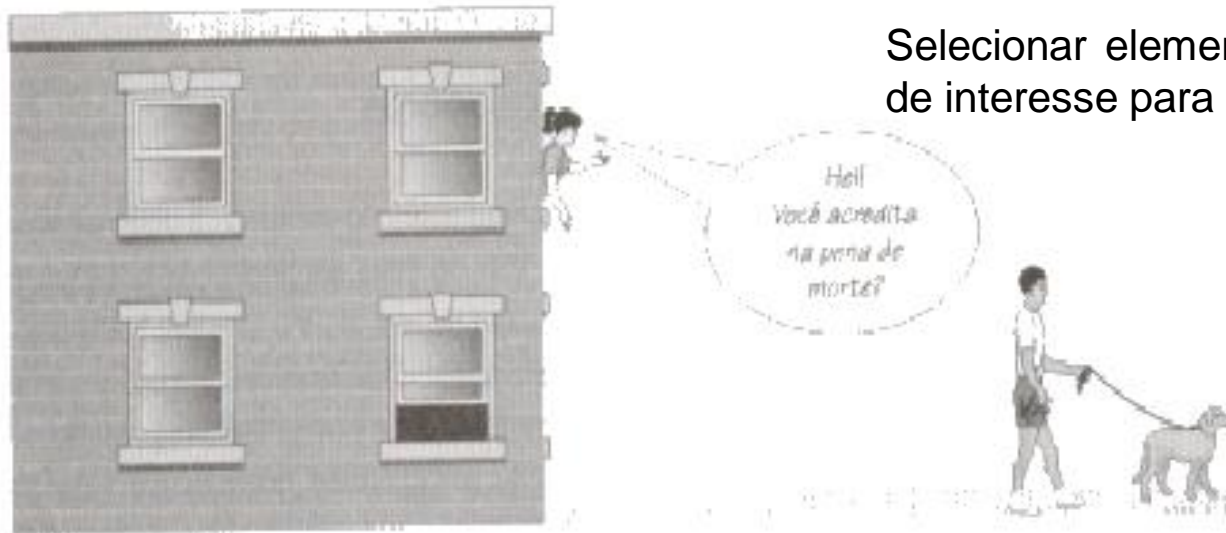
Amostragem Sistemática

Selecionar um elemento a cada k .



Amostragem por Conglomerados

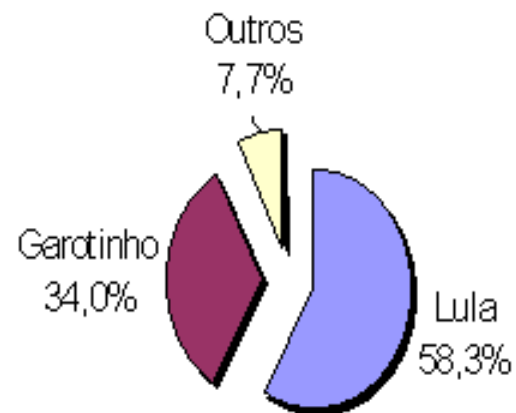
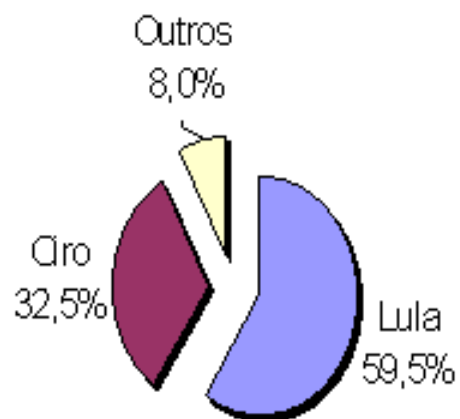
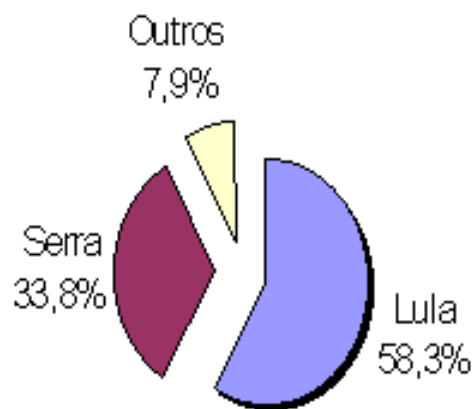
Dividir a população em conjuntos homogêneos, mas com elementos heterogêneos. Selecionar aleatoriamente alguns destes conjuntos e tomar amostras deles.



Amostragem por Conveniência

Selecionar elementos de fácil acesso ou de interesse para o estudo.

Confronto no segundo turno



Exemplo

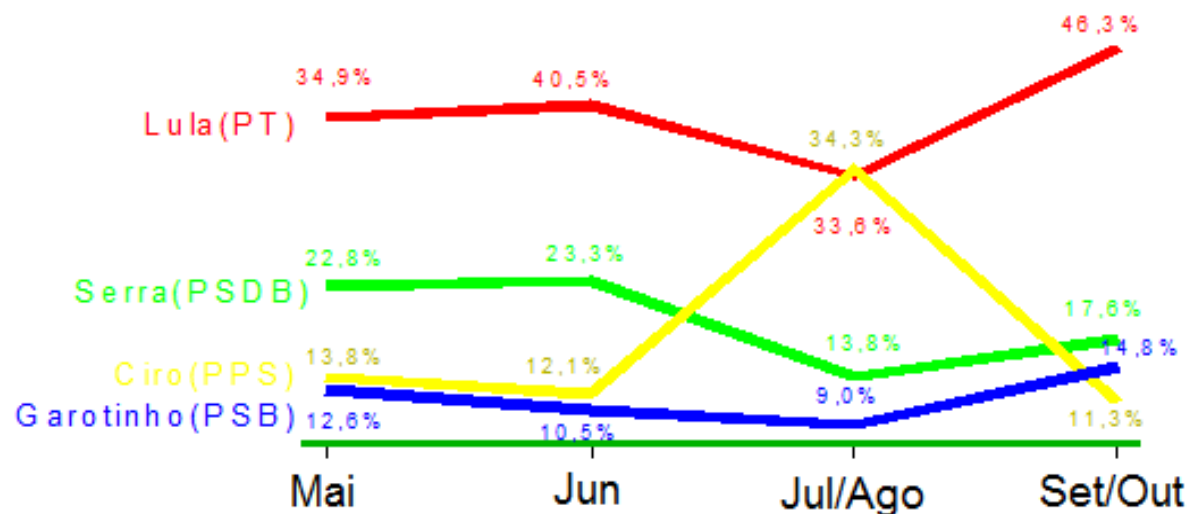
Numa pesquisa eleitoral um instituto de pesquisa procura, com base nos resultados de um levantamento aplicado a uma amostra da população, prever o resultado da eleição.

Eleição presidencial. Os institutos de pesquisa de opinião colhem periodicamente amostras de eleitores para obter as estimativas de intenção de voto da população. As estimativas são fornecidas com um valor e uma margem de erro.

A figura a seguir (**Instituto Toledo & Associados**) refere-se à intenção de voto no 1º turno das eleições para presidente em 2002.

Intenção de voto para presidente do Brasil-2002

Voto estimulado, em % do total de votos. A última pesquisa ouviu 2.202 eleitores. **Margem de erro** de 2,09%.



Fonte: Pesquisa Toledo & Associados.

O que fazer com os dados coletados?



1ª etapa: Estatística Descritiva e
Análise Exploratória

Medidas resumo, tabelas e gráficos.

Obs. Se x representa uma variável, uma amostra com valores x_1, x_2, \dots, x_n é chamada de **conjunto de dados**.

n é o tamanho da amostra.

Variável

Qualquer característica de interesse associada aos elementos de uma população.

Classificação de variáveis

Qualitativa	{	Nominal	Cor, tipo de máquina
		Ordinal	Classe social, grau de desgaste
Quantitativa	{	Discreta	Número de acidentes, número de defeitos em um item
		Contínua	Peso, viscosidade, pressão

Exemplo. Estudo de resistência.

Estado Civil	Instrução	No. Filhos	Salário	Idade	Região de Procedência
S	EF	1	4,00	26	interior
C	EF	2	4,56	32	capital
C	EF	1	5,25	36	capital
S	EM	0	5,73	20	outra
S	EF	0	6,26	40	outra
C	EF	3	6,66	28	interior
S	EF	2	6,86	41	interior
S	EF	1	7,39	43	capital
C	EM	2	7,59	34	capital
S	EM	0	7,94	23	outra

Adaptado de: Bussab, W.O; Morettin, P.A. (2002), Estatística Básica, 5ª. Edição, Saraiva: São Paulo.

Medidas resumo

Medidas de posição: moda, média, mediana, percentis, quartis.
(medidas de tendência central: três primeiras)

Medidas de dispersão: amplitude, intervalo interquartil, variância, desvio padrão, coeficiente de variação.

Medidas de posição

Moda (Mo): É o valor (ou atributo) que ocorre com maior frequência.

Ex. Dados: 4,5,4,6,5,8,4,4

mo = 4

Obs. 1. Nem sempre a moda existe.
2. Pode haver mais de uma moda.

Média: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Ex. Dados: 2,5,3,7,11

$$\bar{x} = (2+5+3+7+11)/5 = 5,6$$

Mediana (Md)

A mediana é o valor que ocupa a **posição central** de um conjunto de n valores **ordenados**.

Posição da mediana: $pm = (n+1)/2$

Ex. Dados: 2,26,3,7,8 ($n = 5$)

Dados ordenados: 2,3,**7**,8, 26 $\Rightarrow pm = (5+1)/2=3$
 $\Rightarrow Md = 7$

Ex. Dados: 2,15,2,1,8,5 ($n = 6$)

Dados ordenados: 1,2,**2,5**,8,15 $\Rightarrow pm = (6+1)/2=3,5$
 $\Rightarrow Md = (2+5) / 2 = 3,5$ (média dos elementos nas posições 3 e 4).

Quantis (*quantiles*)

O quantil de ordem p ($0 < p < 1$), em um conjunto de dados com n observações, é o valor que ocupa a posição $p \times (n+1)$ nos dados **ordenados**.

O quantil de ordem p deixa $p \times 100\%$ das observações abaixo dele na amostra ordenada.

Casos particulares:

Quantil 0,5 = mediana ou segundo quartil (md)

Quantil 0,25 = primeiro quartil (Q1)

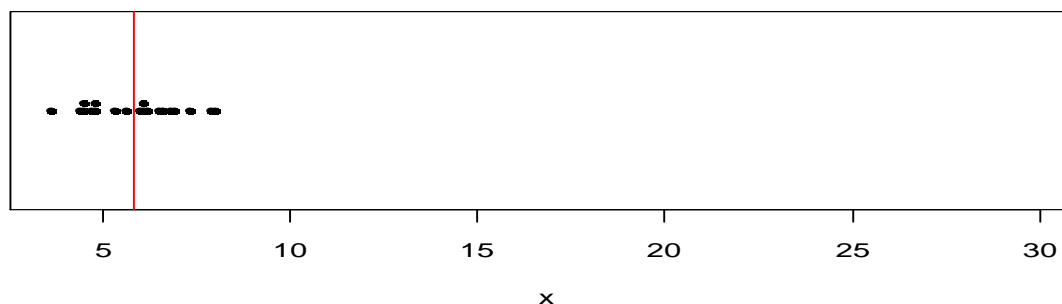
Quantil 0,75 = terceiro quartil (Q3)

Exemplos 1 e 2

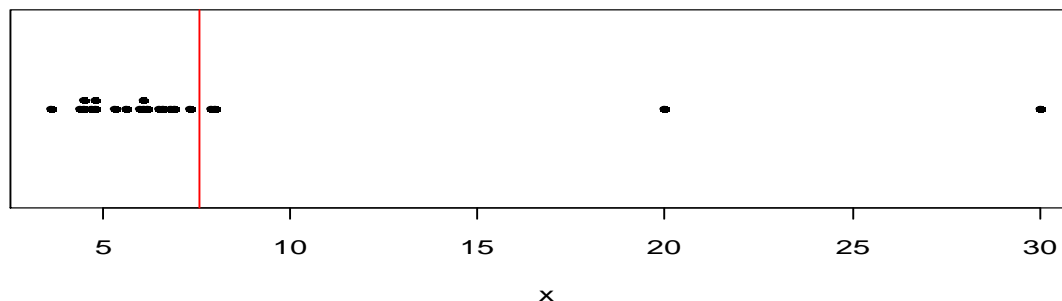
Moda, mediana e média (*mode, median and mean*)

- A moda não é muito utilizada com variáveis quantitativas.
- Se a variável for qualitativa nominal, a moda é a única medida de posição.
- A mediana é mais **resistente** do que a média. É menos afetada pela presença de valores extremos.

Média = 6,1



Média = 7,8



Obs. Os quantis também são chamados de **separatrizes**.

Medidas de dispersão

Finalidade: encontrar um valor que resuma a **variabilidade** de um conjunto de dados.

Amplitude (A): $A = \text{MAX} - \text{min}$

Intervalo ou amplitude interquartil (d_q) (*interquartile range*)

É a diferença entre o terceiro quartil e o primeiro quartil:
 $d_q = Q3 - Q1$.

Obs. d_q é uma medida mais **resistente** do que A.

Exemplo 3

Variância (s^2) (*variance*)

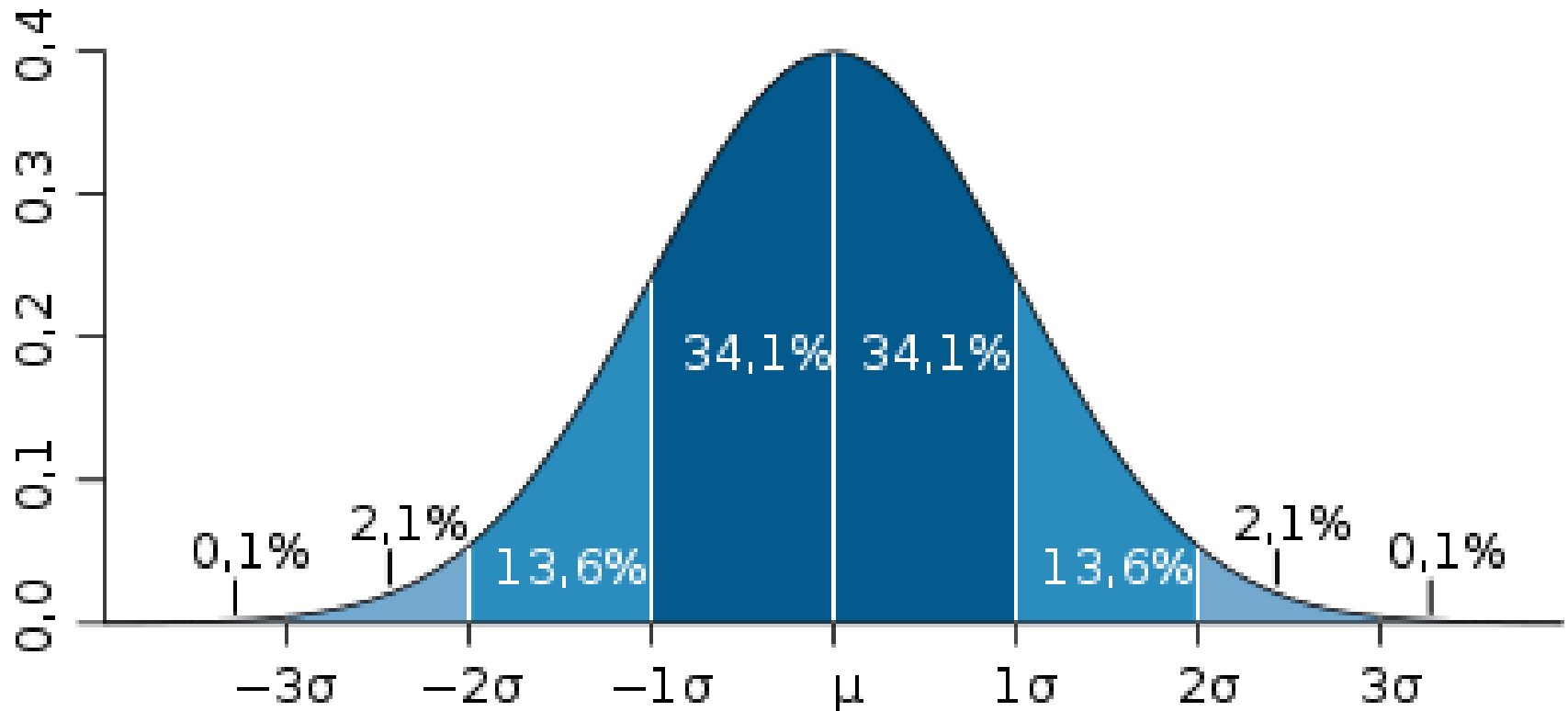
$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Desvio padrão (s) (*standard deviation*)

$$s = \sqrt{S^2}$$

Obs. O desvio padrão tem a mesma unidade da variável x .

Importância prática do desvio padrão



Obs. A distribuição em forma de sino é somente ilustração.

Exemplo 4

Propriedades

Seja x_1, \dots, x_n uma amostra com média \bar{x} e variância s_x^2 .

Transformação (posição e escala):

$$y_i = a + bx_i, i = 1, \dots, n$$

Então

$$\bar{y} = a + b\bar{x},$$

$$s_y^2 = b^2 s_x^2 \quad \text{e} \quad s_y = |b| s_x.$$

Coeficiente de variação (CV)

É uma medida de dispersão **relativa**.

Exprime a variabilidade em relação à média.

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} \times 100, \quad \text{se } \bar{x} \neq 0.$$

Interpretação:

- Quanto mais próximo de 0, menor a variabilidade dos dados.
- Quanto mais próximo de 1, maior a variabilidade dos dados.

Exemplo. Altura e peso de alunos

	Média	Desvio padrão	Coeficiente de variação
Altura	1,143m	0,063m	5,5%
Peso	50Kg	6kg	12%

Conclusão. O peso dos alunos apresenta variabilidade relativa aproximadamente duas vezes maior do que a altura.

Um exemplo em R

Rendimento (em %) de 90 bateladas de um substrato de cerâmica no qual um revestimento metálico foi aplicado.

```
> dados = scan("dados2-11-Mont.txt")
```

```
Read 90 items
```

```
> summary(dados)
```

```
      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 78.30   86.10   89.25   89.38   93.10   98.00
```

```
> sd(dados)
```

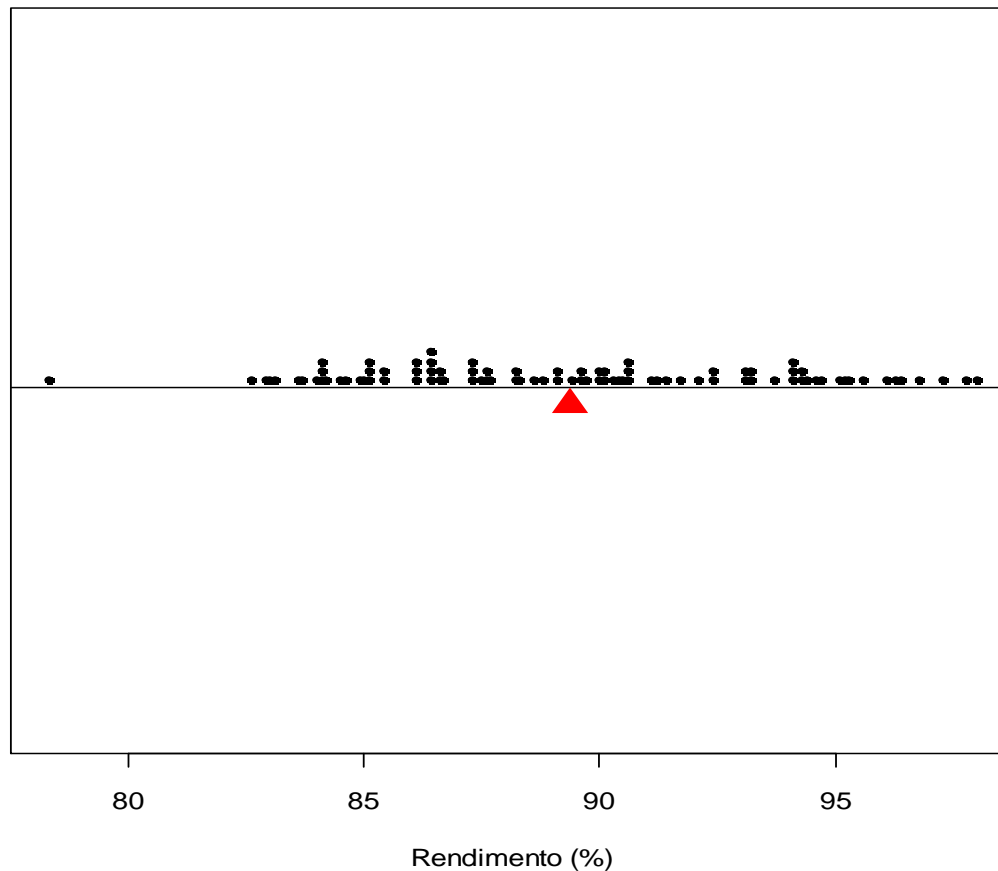
```
[1] 4.315905
```

```
> quantile(dados, c(0.1, 0.4, 0.7, 0.9))
```

```
      10%   40%   70%   90%
84.10 87.60 91.82 95.21
```


Exemplo em R (Gráfico de pontos)

```
> stripchart(dados, xlab="Rendimento (%)", pch= 20, method = "stack")  
> abline(h = 0.98)  
> points(mean(dados), 0.93, pch = 17, col = "red", cex = 2)
```



Organização e representação dos dados

Uma das formas de organizar e resumir a informação contida em dados observados é por meio de tabelas de frequências e gráficos.




A frequência de um valor da variável é o número de vezes que este valor ocorre no conjunto de dados.

Tabela de frequências: Tabela com os diferentes valores de uma variável (ou intervalos de valores) e suas respectivas frequências.

1. Organização e representação de variáveis qualitativas

- Tabela de frequências dos diferentes valores da variável.
- Representação gráfica: gráfico de barras, de Pareto e gráfico de setores (“de pizza”).

Exemplo. Variável “Grau de instrução” (variável qualitativa ordinal)

	Grau de instrução	Contagem	f_i	f_{r_i}
	1º Grau		12	0,3333
	2º Grau		18	0,5000
	Superior		6	0,1667
	Total		$n = 36$	1,0000

f_i : frequência **absoluta** do valor i (número de indivíduos com grau de instrução i), $i \in \{1^\circ \text{ Grau}, 2^\circ \text{ Grau}, \text{Superior}\}$.

$f_{r_i} = \frac{f_i}{n}$: frequência **relativa** do valor i .

Elementos de um gráfico

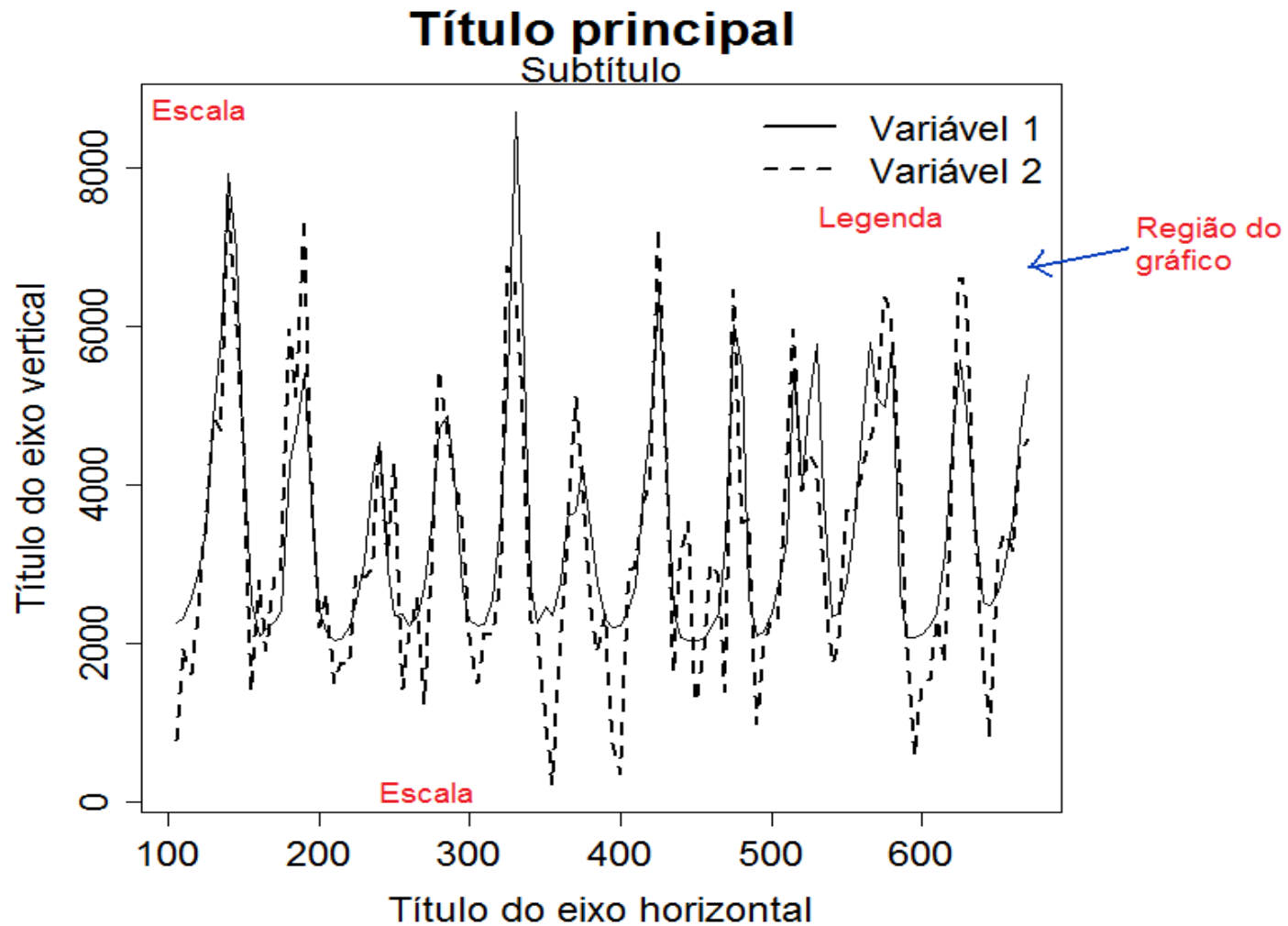


Figura 1. Descrição do gráfico.

Representação gráfica de variáveis qualitativas

Gráfico de colunas (ou barras): retângulos verticais (ou horizontais) espaçados com alturas (ou bases) iguais às frequências dos valores da variável.

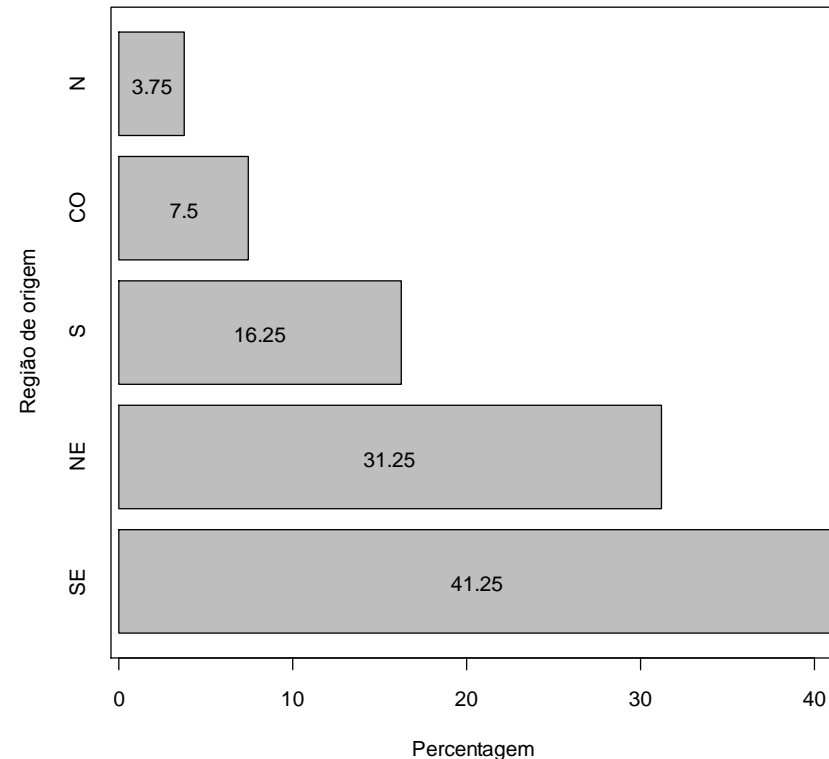
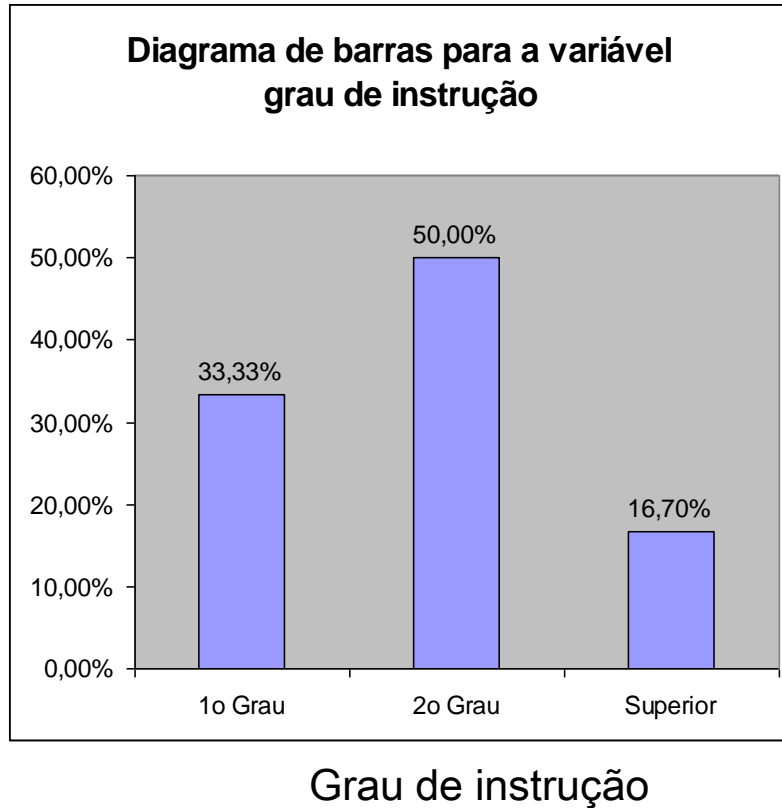
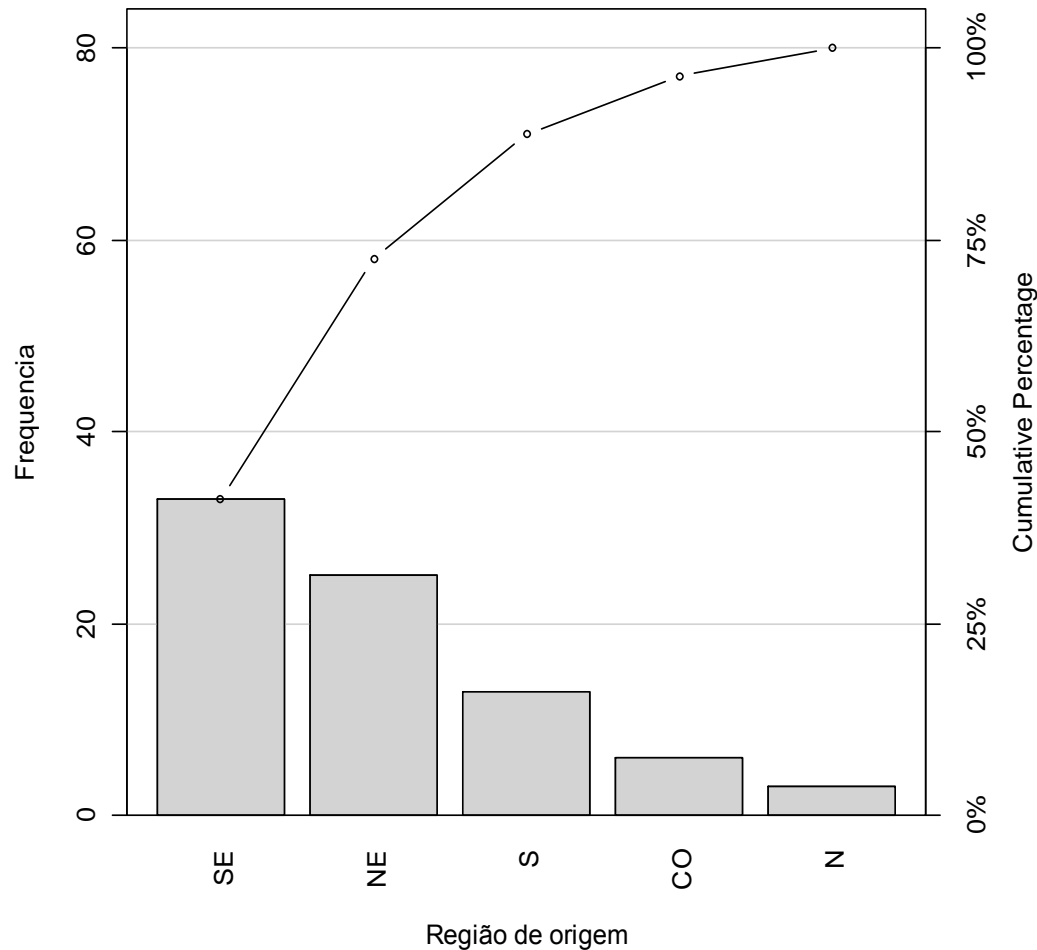


Gráfico de Pareto

Gráfico de barras com os valores da variável em ordem decrescente de frequências e com as **frequências relativas acumuladas** no segundo eixo vertical.



Gráficos de setores (“de pizza”)

Gráfico **circular** utilizado para destacar a composição das partes de um todo.

O ângulo central de cada setor é proporcional à frequência representada (usualmente em %).

Diagrama circular para a variável grau de instrução

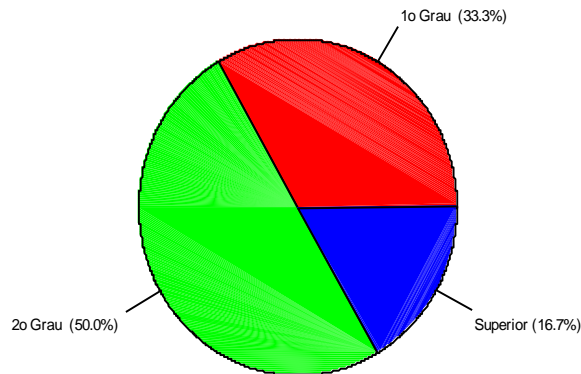
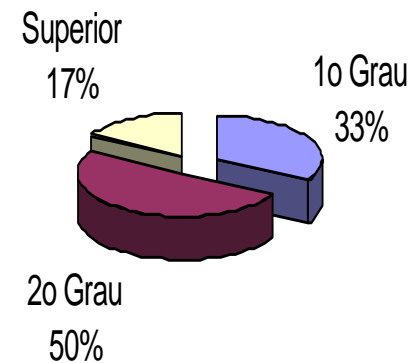


Diagrama circular para a variável grau de instrução



2. Organização e representação de variáveis quantitativas

2.1 Discretas. Organizam-se mediante tabelas de frequências e a representação gráfica é mediante gráfico de pontos, de barras ou de linha.

Frequência **relativa** do valor x_i : $f_{ri} = f_i / n$.

Frequência **acumulada** do valor x_i :

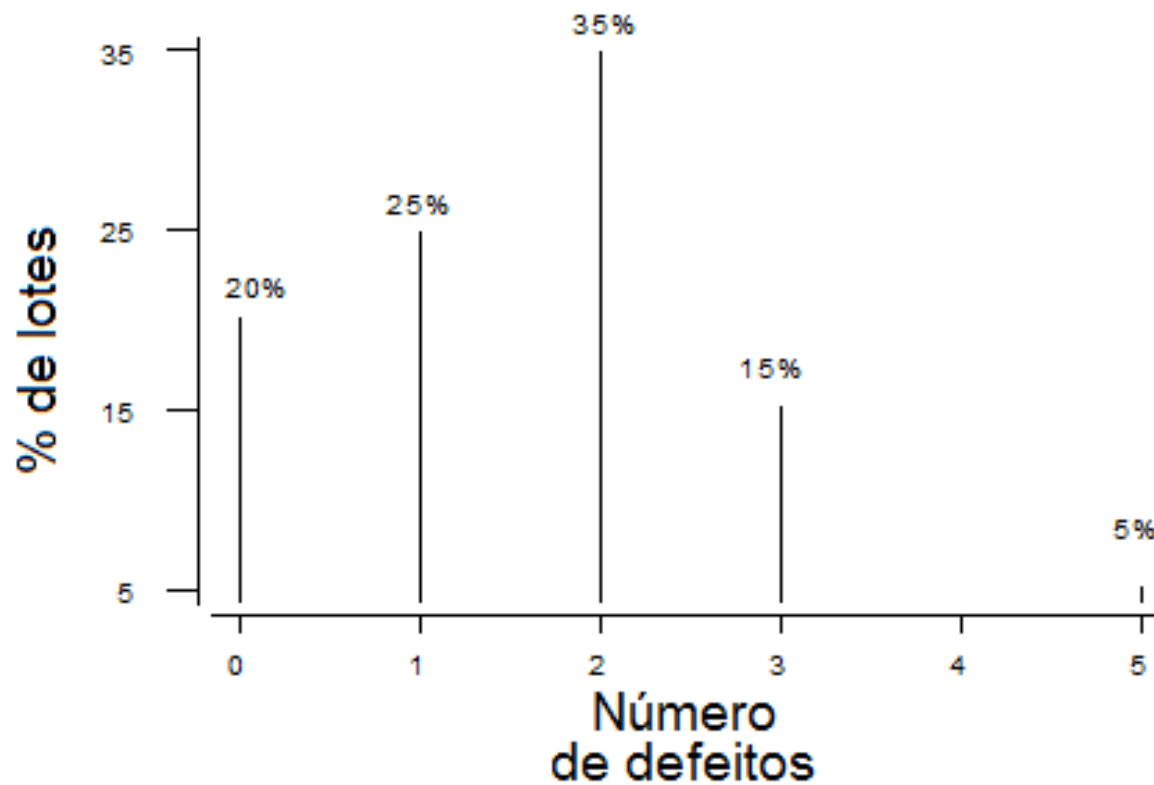
$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j$$

Exemplo. Número de defeitos em lotes de produtos.

Distribuição de frequências do número de defeitos por lote.

i	Número de defeitos (X_i)	Número de lotes (f_i)	% de lotes (f_{ri})
1	0	4	20%
2	1	5	25%
3	2	7	35%
4	3	3	15%
5	5	1	5%
Total		20	100%

Representação gráfica



Medidas de posição: v. quantitativas discretas agrupadas

Média:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n}$$

Mediana:

Se n é par:

Md = média dos valores cujas frequências **acumuladas** são iguais a $n/2$ e $n/2+1$

Se n é ímpar:

Md = valor cuja frequência **acumulada** é igual a $(n+1)/2$

Moda = ?

Exemplo

Distribuição de frequências do número de defeitos por lote.

i	Número de defeitos (X_i)	Número de lotes (f_i)	% de lotes (f_{ri})
1	0	4	20%
2	1	5	25%
3	2	7	35%
4	3	3	15%
5	5	1	5%
Total		20	100%

Medidas de dispersão: v. quantitativas discretas agrupadas

Variância:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \cdots + (x_k - \bar{x})^2 f_k}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i f_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Desvio padrão:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Coefficiente de variação:

$$CV = \frac{s}{|x|} \times 100\%$$

Exemplo

Distribuição de frequências do número de defeitos por lote.

i	Número de defeitos (X_i)	Número de lotes (f_i)	% de lotes (f_{ri})
1	0	4	20%
2	1	5	25%
3	2	7	35%
4	3	3	15%
5	5	1	5%
Total		20	100%

2.2 Construção de tabelas de frequências para variáveis contínuas

- Escolha o número de intervalos de classe (k)
- Identifique o menor valor (\min) e o valor máximo (MAX) dos dados.
- Calcule a amplitude (A): $A = \text{MAX} - \min$.
- Calcule a amplitude de classe (h): $h = A / k$.
- Obtenha os limites inferior (LI) e superior (LS) de cada classe.

1.^o intervalo :

Limite inferior : $LI_1 = \min$

Limite superior : $LS_1 = LI_1 + h$

2.^o intervalo :

Limite inferior : $LI_2 = LS_1$

Limite superior : $LS_2 = LI_2 + h$

...

i -ésimo intervalo :

Limite inferior : $LI_i = LS_{i-1}$

Limite superior : $LS_i = LI_i + h$

Prossiga até que seja obtido um intervalo que contenha o valor máximo (MAX).

Observações

- Muitas vezes, por **conveniência**, arredondamos os valores de h e/ou LI_1 .
- Podemos adotar $k \approx \sqrt{n}$
- Os intervalos são **fechados à esquerda** e **abertos à direita**. Notação: $\left[\right)$
- **Ponto médio** (ou marca de classe) de cada classe:

$$x_i^* = \frac{LS_i + LI_i}{2}.$$

Frequências de uma classe

Frequência **absoluta** de uma classe (f_i): número de observações pertencentes à classe i .

Frequência **relativa** de uma classe: $f_{ri} = f_i / n$.

Frequência **acumulada absoluta** de uma classe:

$$F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j.$$

Frequência **acumulada relativa** de uma classe:

$$F_{r_i} = f_{r_1} + f_{r_2} + \cdots + f_{r_i} = \sum_{j=1}^i f_{r_j} \quad \text{ou} \quad F_{r_i} = \frac{F_i}{n}.$$

Exemplo

Variável: **viscosidade** (em u.v.) de um líquido a uma certa temperatura.

```
13.9 14.9 15.9 15.8 14.8 15.1 15.8 15.0 15.1 14.6 14.7 16.6 13.6 15.9 13.1
15.2 14.7 16.0 15.6 17.4 15.3 14.2 15.9 15.1 15.9 16.1 16.2 13.8 14.6 16.0
15.8 15.5 16.5 17.1 15.3 15.5 17.8 15.4 15.4 14.6
```

Amostra **ordenada**:

```
13.1 13.6 13.8 13.9 14.2 14.6 14.6 14.6 14.7 14.7 14.8 14.9 15.0 15.1 15.1
15.1 15.2 15.3 15.3 15.4 15.4 15.5 15.5 15.6 15.8 15.8 15.8 15.9 15.9 15.9
15.9 16.0 16.0 16.1 16.2 16.5 16.6 17.1 17.4 17.8
```

$n = 40$

Min.	Median	Mean	Max.
13.10	15.40	15.39	17.80

Observações

- Quando organizamos os dados em intervalos de classe, há **perda de informação**.
- Em um gráfico de pontos **não há perda** de informação, mas se n for “grande”, pode haver **perda de clareza**.
- Densidade de frequência (ou **densidade**): $f_{d_i} = \frac{f_{r_i}}{h}$.

Representação gráfica

Histograma

Gráfico de barras adjacentes com bases iguais às amplitudes das classes e alturas iguais às densidades.

Obs. Se as classes tiverem amplitude constante, as alturas das barras usualmente são iguais às frequências.

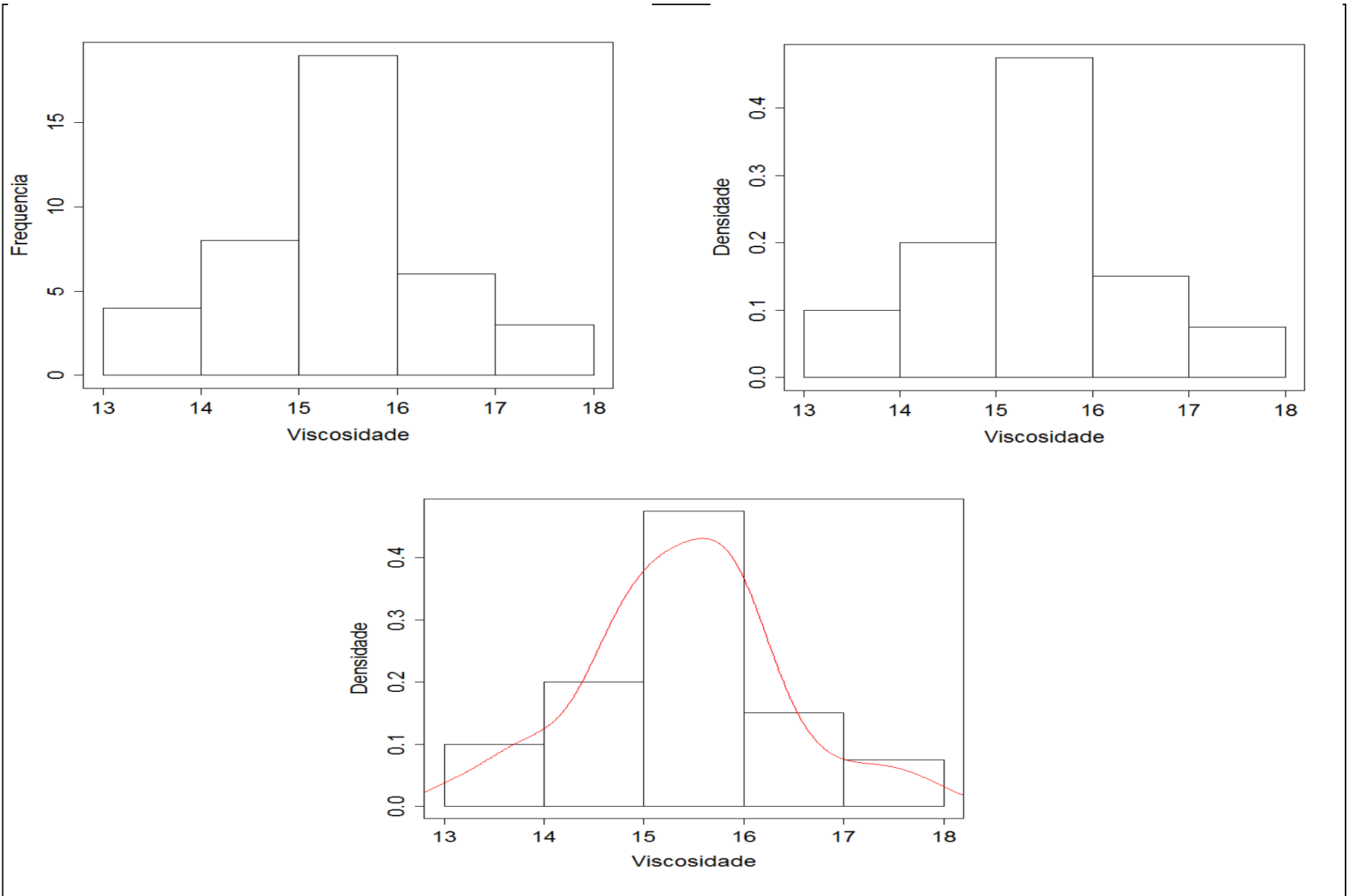
Propriedade. Se utilizarmos densidades, soma das áreas dos retângulos = 1, pois

$$\sum_{i=1}^k h f_{d_i} = \sum_{i=1}^k h \frac{f_{r_i}}{h} = \sum_{i=1}^k f_{r_i} = 1.$$

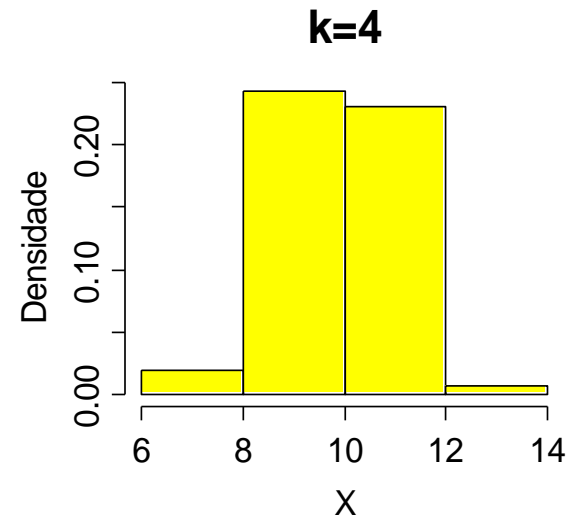
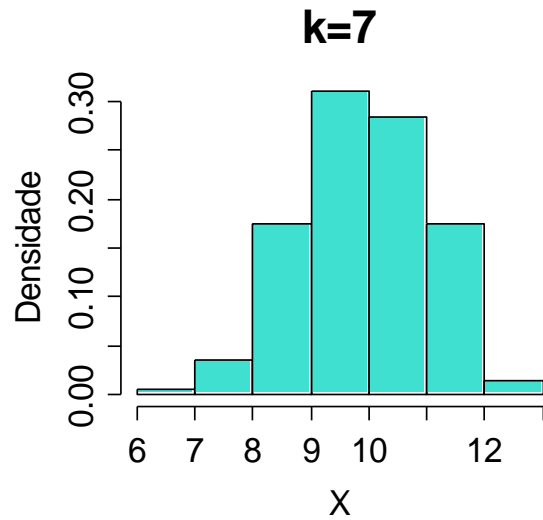
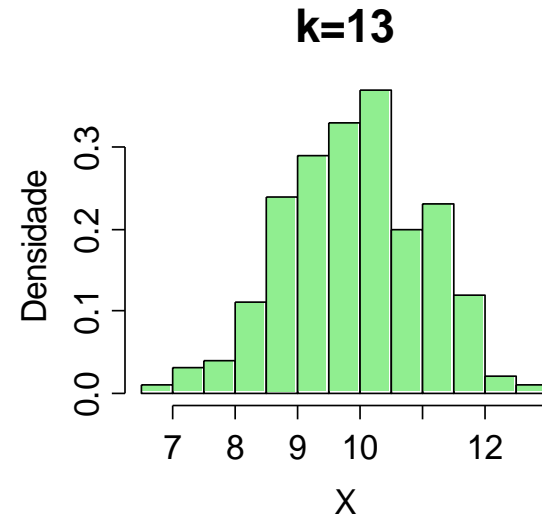
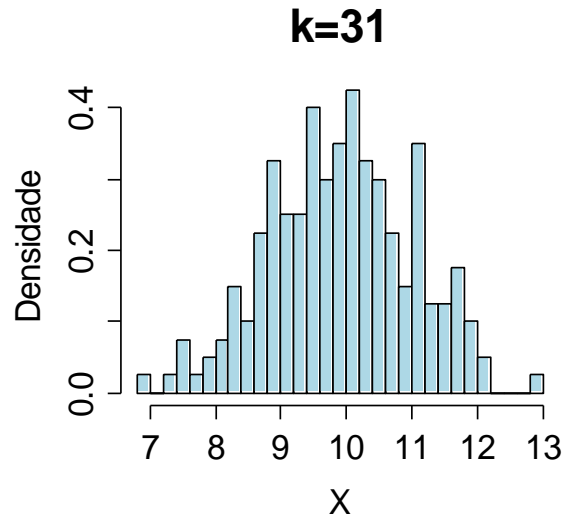
Obs. 1. A amplitude das classes pode variar.

2. Na construção de um histograma, quanto maior for n , melhor.

Exemplo. Variável viscosidade.



Escolha do número de classes (geralmente, $5 \leq k \leq 15$).



Média e variância para variáveis contínuas agrupadas em classes

Média:

$$\bar{x} \approx \frac{x_1^* f_1 + x_2^* f_2 + \cdots + x_k^* f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^* f_i}{n}$$

Variância:

$$s^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i^* - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^{*2} f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i^* f_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Média dos dados não agrupados (dados brutos) :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{36}}{40} = \frac{13,9 + 14,9 + \cdots + 14,6}{40} = 15,39.$$

Este resultado difere do valor obtido anteriormente. **Por quê?**

Exemplo. Variável viscosidade

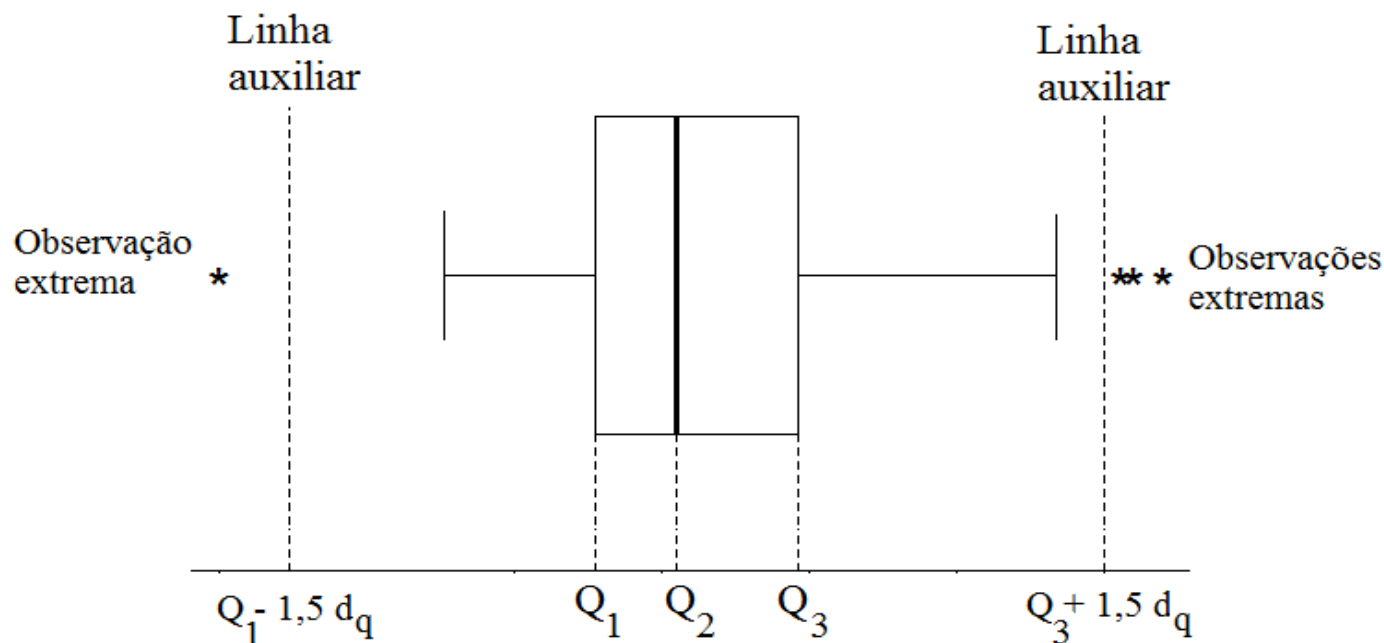
Média dos dados não agrupados (dados brutos)


$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{36}}{40} = \frac{13,9 + 14,9 + \dots + 14,6}{40} = 15,39.$$


Este resultado difere do valor obtido anteriormente. Por quê?

Diagrama em caixa (*box plot*)

Representação dos dados por meio de um **retângulo** construído com os **quartis**. Fornece informação sobre a variabilidade ($d_q = Q_3 - Q_1$) e valores extremos.



Vertical à esquerda  : menor valor na amostra que **não é extremo**.

Vertical à direita  : maior valor na amostra que **não é extremo**.

Exemplo. Variável viscosidade.

1º quartil (Q1) = 14,775. Em R: `quantile(dados, 0.25)`

Mediana (Md ou Q2) = 15,4. Em R: `quantile(dados, 0.5)`

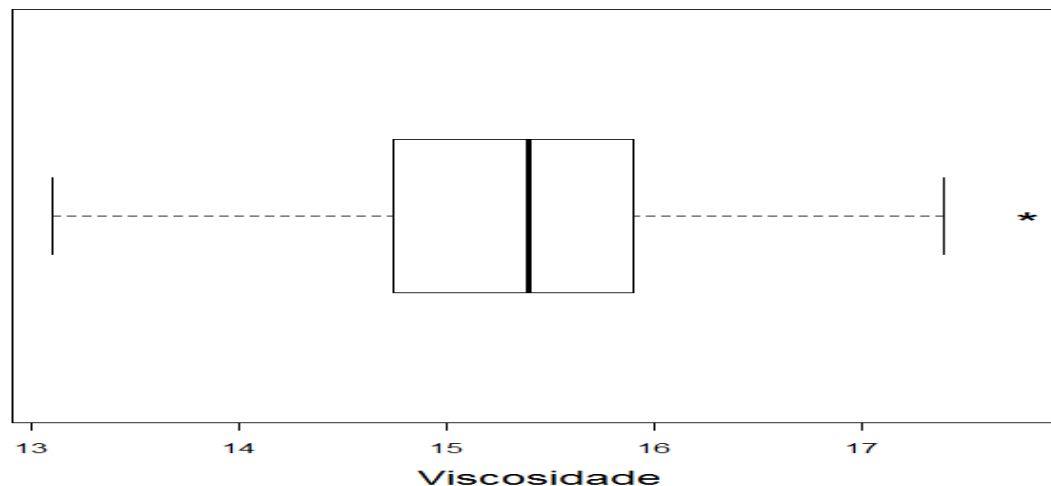
3º quartil (Q3) = 15,9. Em R: `quantile(dados, 0.75)`

$d_q = \text{intervalo interquartil} = Q3 - Q1 = 1,125.$

Lnhas **auxiliares** passam por $Q1 - 1,5d_q = 13,0875$ e

$Q3 + 1,5d_q = 17,5875.$

```
> boxplot(viscosidade, xlab = "Viscosidade", horizontal = TRUE)
```



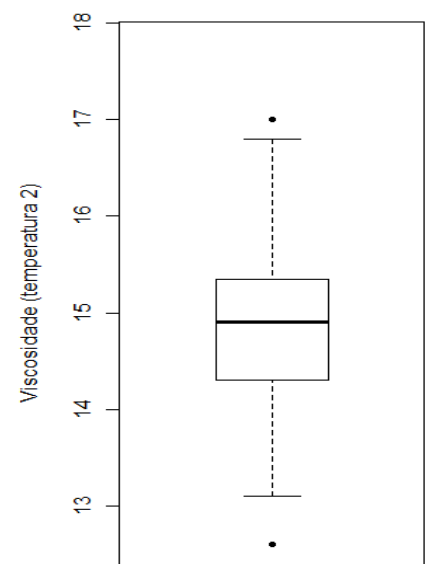
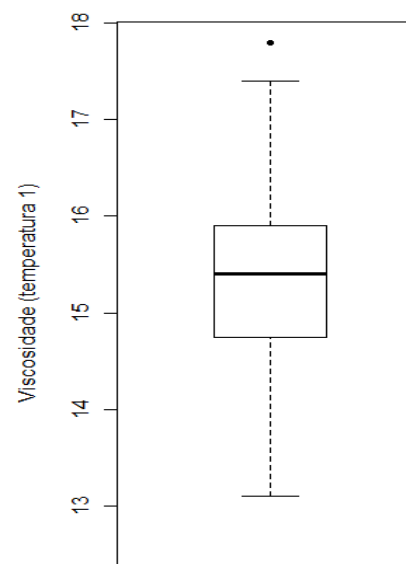
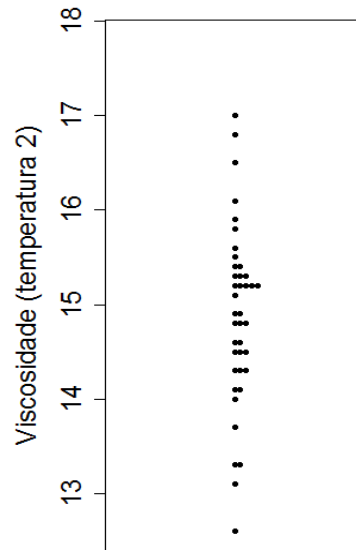
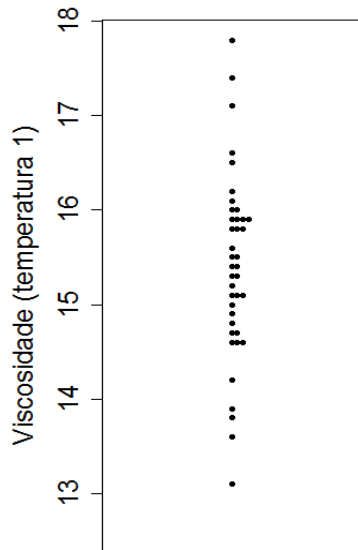
Exemplo. Variável viscosidade medida em duas temperaturas.

Temperatura 1 (lâmina 50).

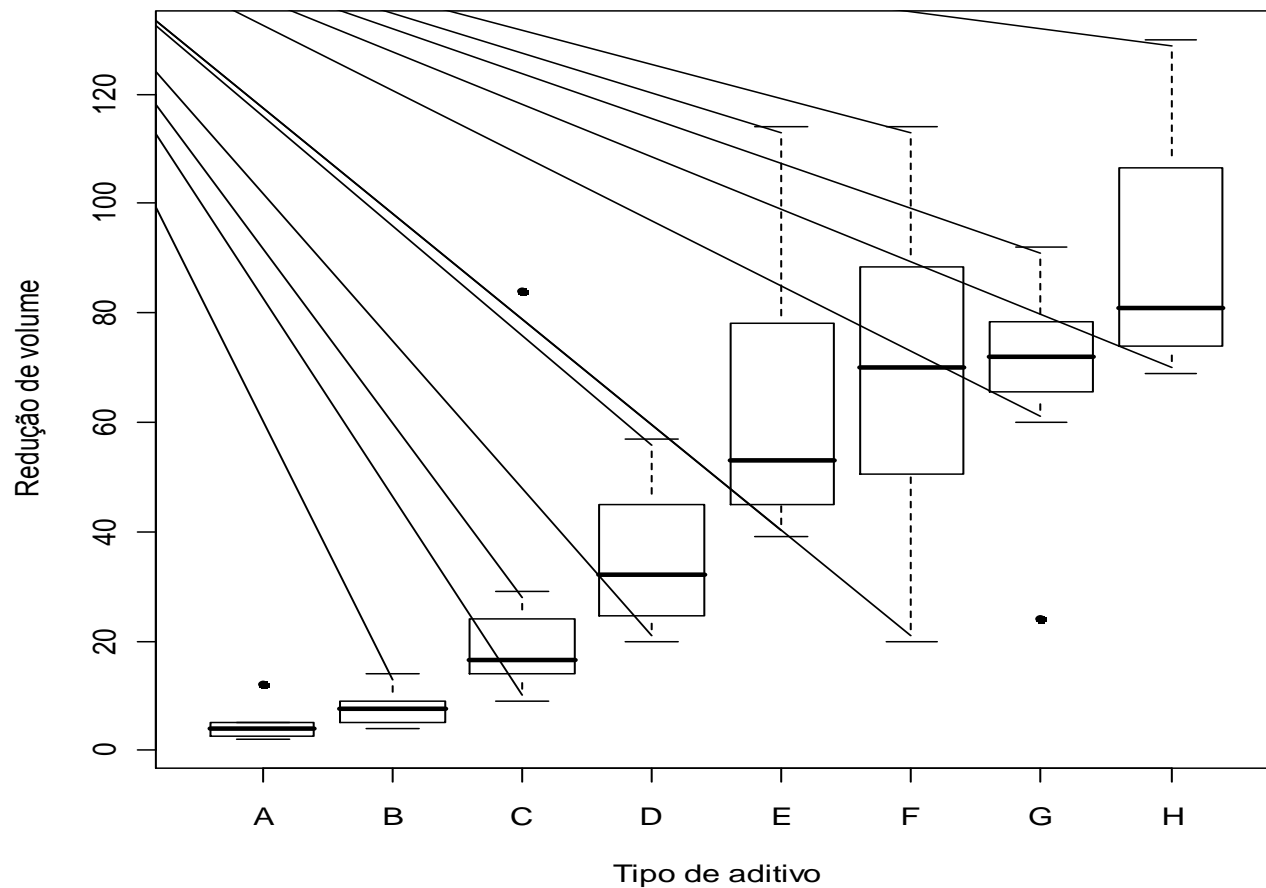
13.9 14.9 15.9 15.8 14.8 15.1 15.8 15.0 15.1 14.6 14.7 16.6 13.6 15.9 13.1
15.2 14.7 16.0 15.6 17.4 15.3 14.2 15.9 15.1 15.9 16.1 16.2 13.8 14.6 16.0
15.8 15.5 16.5 17.1 15.3 15.5 17.8 15.4 15.4 14.6

Temperatura 2 (n = 40).

13.3 14.5 15.3 15.3 14.3 14.8 15.2 14.5 14.6 14.1 14.3 16.1 13.1 15.5 12.6
14.6 14.3 15.4 15.2 16.8 14.9 13.7 15.2 14.5 15.3 15.6 15.8 13.3 14.1 15.4
15.2 15.2 15.9 16.5 14.8 15.1 17.0 14.9 14.8 14.0



Exemplo de *box plot*



Análise exploratória. Redução *versus* tipo. Variabilidade. Simetria. Valores extremos.

Gráfico de linha



O Estado de S. Paulo, 28/2/2010.

Associação entre variáveis quantitativas

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$: amostra **bivariada**.

Representação gráfica: gráfico de dispersão (*scatter plot*)

Medida de associação: **coeficiente de correlação linear** de Pearson.

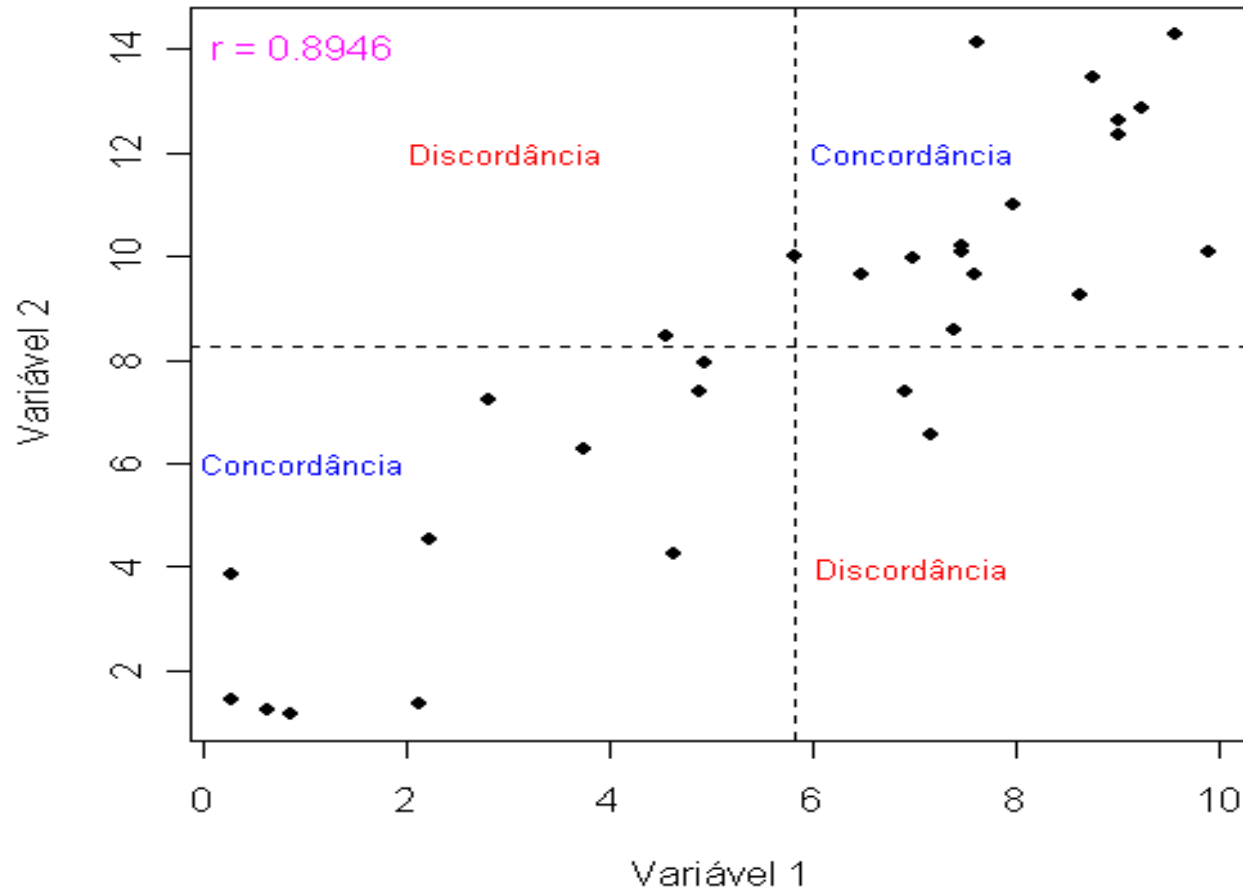
$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

Numerador: **covariância** entre x e y.

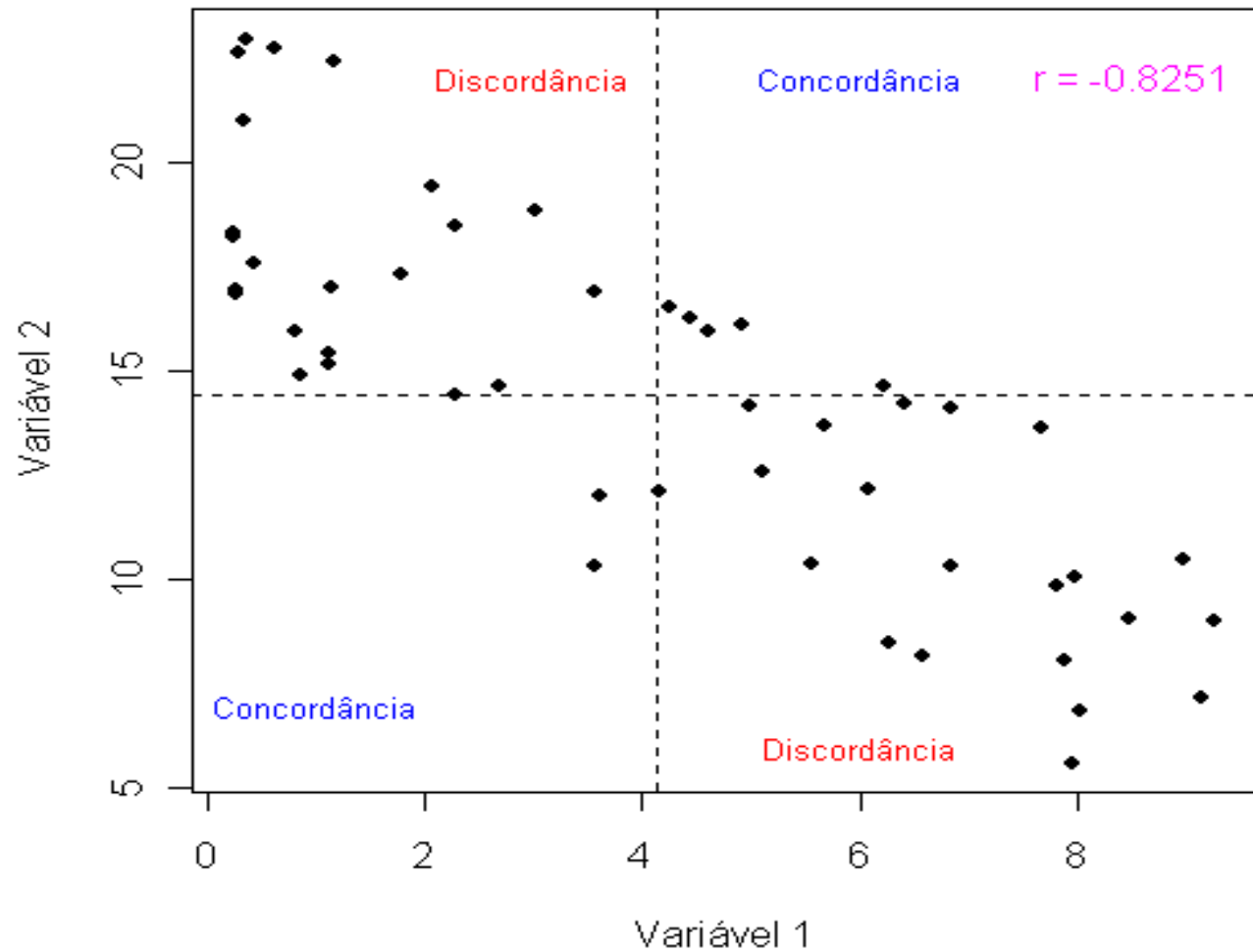
Propriedades: (1) $-1 \leq r \leq 1$ e

(2) $|r| = 1$ se, e somente se, a relação entre x e y for linear ($y = a + bx$, $b \neq 0$ e o sinal de r é o sinal de b).

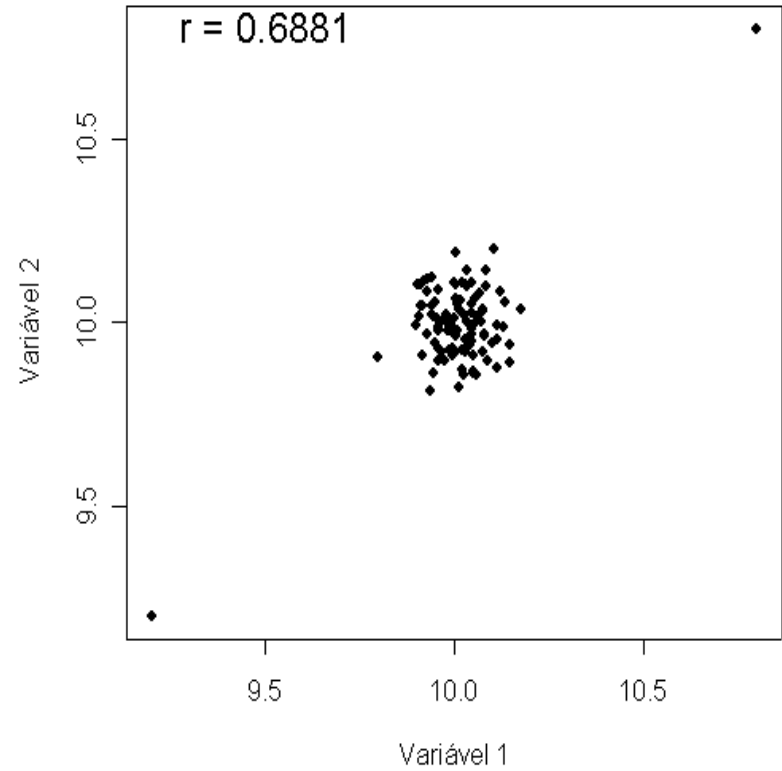
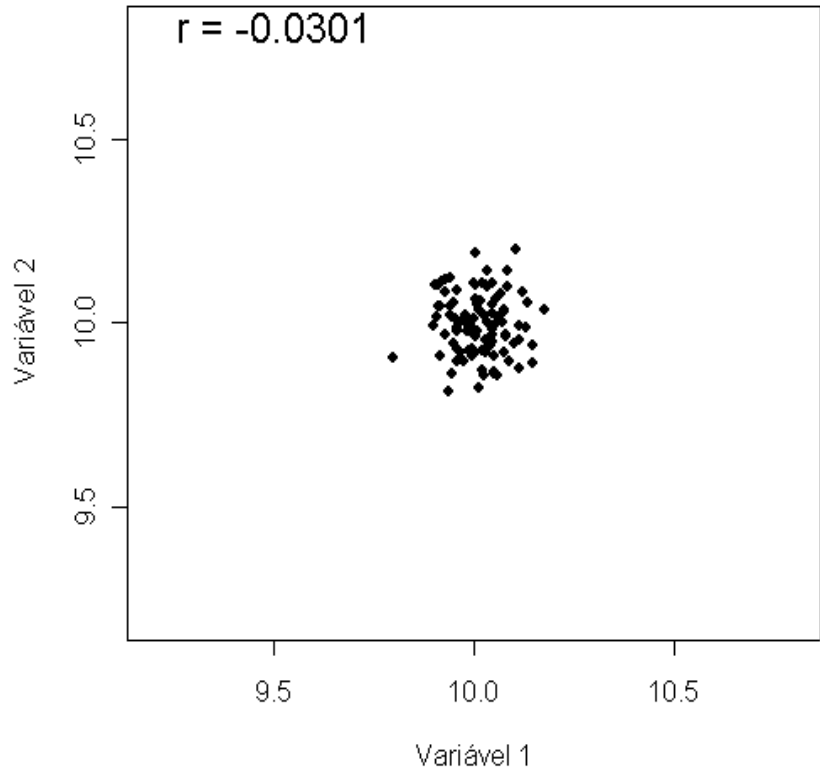
Associação entre variáveis quantitativas



Associação entre variáveis quantitativas

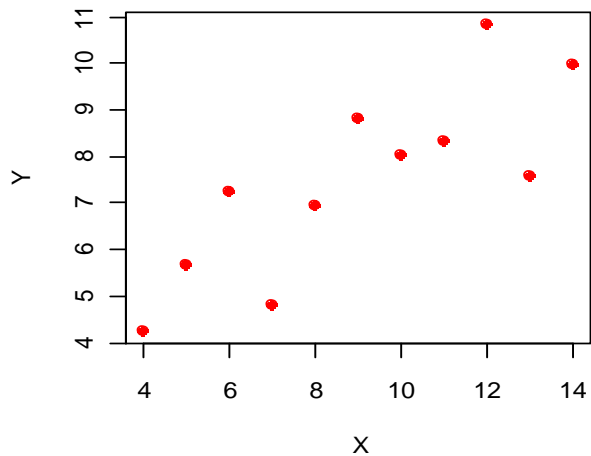


Associação entre variáveis quantitativas

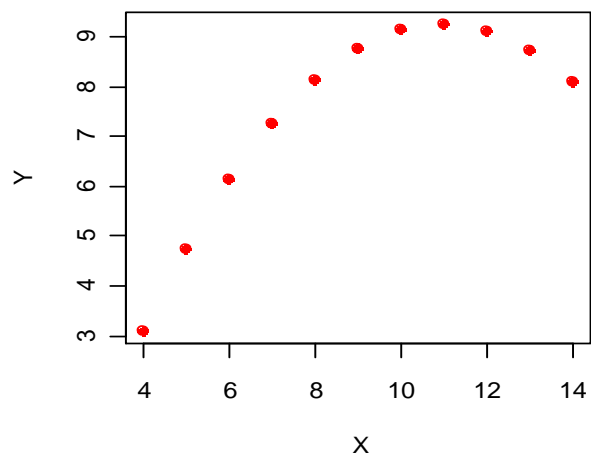


Associação entre variáveis quantitativas

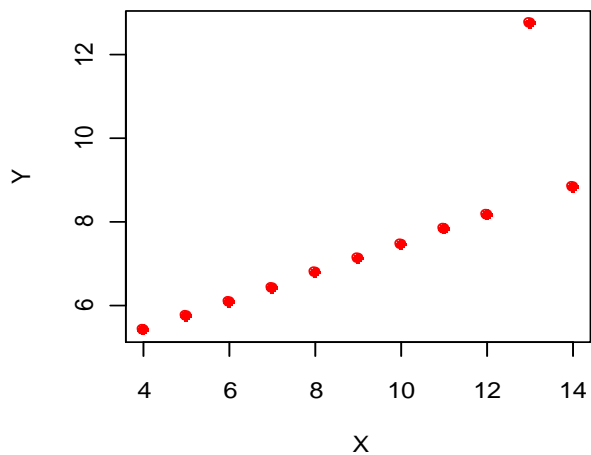
Exemplo 1



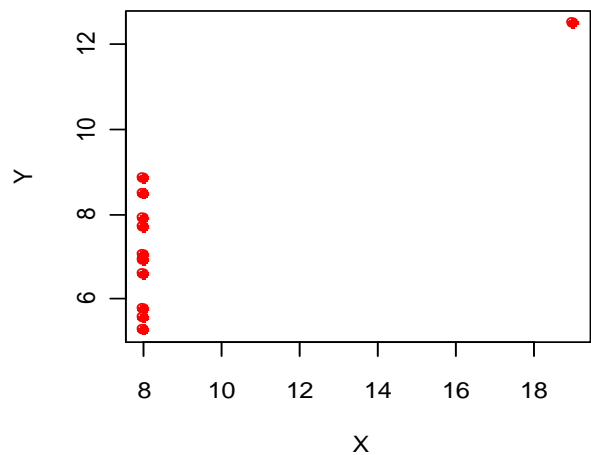
Exemplo 2



Exemplo 3



Exemplo 4



Correlações:

Exemplo 1:
0,8164

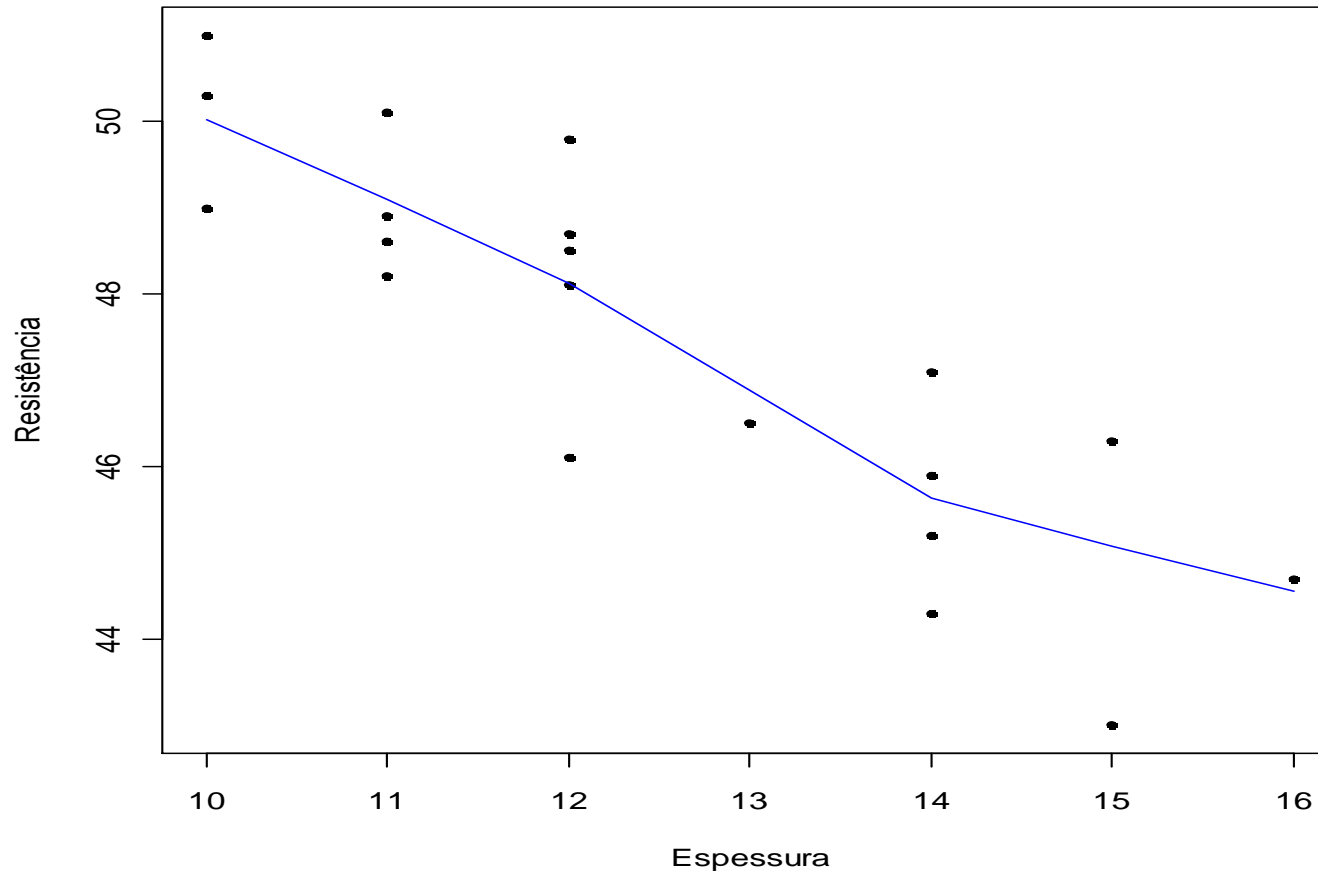
Exemplo 2:
0,8162

Exemplo 3:
0,8163

Exemplo 4:
0,8165

Exemplo em R.

```
> plot(espessura, resistencia, xlab = "Espessura", ylab =  
"Resistência", pch = 20)  
> lines(lowess(espessura, resistencia), col = "blue")
```



Exemplo em R.

```
> cores = rainbow(length(levels(cola)))  
> plot(espessura, resistencia, xlab = "Espessura", ylab =  
"Resistência", pch = 20, col = cores[cola])  
> legend("topright", levels(cola), pch = 20, col = cores)
```

