CALCULO NUMÉRICO I

1° Lista: Equações não lineares

1. a. Deduza, usando argumentos gráficos, o método de Newton para resolver uma equação do tipo: $f(x)=0$.

b. O método de Newton sempre converge? O que significa convergência quadrática? O método de Newton sempre tem este tipo de convergência? Quais as hipóteses necessárias? Prove.

2. Considere a equação: $x\, ln(x)-1=0$. (utilize na resolução numérica 5 algarismos significativos; tolerência no critério de parada de 10^{-3} e deixe explícito o critério de parada).

a. Localize um intervalo que contenha a solução (utilize sua forma equivalente: $1/x=ln(x)$). Mostre que $\bar{\mathbf{x}} \in [1,\ 2]$

b. Resolva usando os método da bissecção, a partir do intervalo [1 2].

c. Resolva a equação usando o método de Newton, com $x_0 = 1.2$.

d. O processo iterativo: $x_{k+1}=1/ln(x_k)$ é convergente? Justifique teoricamente sua afirmação.

e. O processo iterativo dado por: $x_{k+1}=\mathbf{e}^{1/\mathbf{x}_k}$ é convergente? Justifique teoricamente sua afirmação.

3. Considere a equação: $x = cos\ x$. (defina o critério de parada e use tolerância 10^{-4}).

a. Verifique graficamente que existe uma raiz da equação. Identifique a raiz no gráfico e uma aproximação inicial para os itens seguintes.

b. Verifique numericamente, calculando as iterações que o processo iterativo $x_{k+1} = \cos x_k$ é convergente. (obs. sua máquina deve estar em radianos)

c. Verifique teoricamente que o processo iterativo $x_{k+1} = \cos x_k$ é convergente para x_0 próximo da raiz.

d. Escolha um ponto inicial e aplique o método de Newton.

4. Considere a equação: $x^2 = cos\ x$. (defina o critério de parada e use tolerância 10^{-4}).

a. Verifique graficamente que existe uma raiz da equação no intervalo *[0 1.57]*

b. É possível aplicar o método da bissecção a partir do intervalo *[0 1.57]* ? (escreva explicitamente as condições de aplicabilidade do método).

c. Determine a solução pelo método da bissecção.

d. O método de Newton pode ser aplicado para resolver a equação com $x_0 = 0$? Por que?

e. Escolha um ponto inicial e aplique o método de Newton.

5. Considere a função: $f(x) = x^3 -x-1$.

a. Esboce o gráfico de f(x) e uma raiz real de f(x).

b. Aplique o método de Newton utilizando um ponto escolhido no item anterior.

c. Quais dos processos iterativos abaixo fazem sentido para determinar uma raiz de f(x)?

i. $x_{i+1} = \sqrt[3]{(x_i+1)}$

ii. $x_{i+1} = x_i^3 + 1$

iii. $x_{i+1} = x_i^2 - 1$

d. O processo iterativo em *ii)* é convergente? Argumente baseado em teoria.

6. Considere o processo iterativo: $x_{k+1} = 0.5(x_k + 3/x_k)$.

a. A partir de $x_0=1.3$, determine a sequência: $x_1, x_2,...$ até obter a convergência.

b. Mostre que, se o processo for convergente, então convergirá para $\sqrt{3}$.

c. Defina convergência quadrática para uma sequência e comente se a sequência $|x_1-\sqrt{3}|$, $|x_2-\sqrt{3}|$, ... converge quadraticamente.

d. Mostre, teoricamente, que o processo é convergente para algum x_o.

e. Escreva um algoritmo para gerar a sequência, incluindo o teste de parada.

f. Mostre que o processo iterativo é o método de Newton aplicado à equação: x^2-3=0. À luz deste fato, interprete graficamente o processo iterativo dado inicialmente.

7. Mostre que o processo iterativo: $x_{k+1} = x_k(2-ax_k)$ sempre converge para o valor de 1/a, se x_0 for adequadamente escolhido.
Que limites deve x_0 satisfazer para assegurar a convergência?
Mostre que o processo iterativo é o método de Newton aplicado à equação: $\frac{1}{x} - a = 0$

8. Uma desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter f'(x), bem como calcular seu valor numérico, a cada iteração.
Dê uma modificação a fim de eliminar esse problema (método das secantes).
Resolva a equação do exercício 4 pelo método das secantes.

9. Determine a raiz da equação x = tg x no intervalo **[** $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$] pelos métodos de Newton e das secantes, com erro inferior a 10^{-3}.

10. Aplique o método de Newton para resolver o sistema não linear seguinte:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 2 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

Use o ponto inicial: $(1.22 \;\; 0.71)^T$.

11. Determine um ponto de interseção entre duas circunferências de raio 2, sendo a primeira centrada em (1, 0) e a segunda centrada no ponto: (0, 1).
Faça um gráfico e escolha um ponto aproximado $\boldsymbol{x^0}$.
Aplique o método de Newton. Calcule $\boldsymbol{x^1}$, $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{x^3}$.
A sequência está convergindo? Comente a sua resposta.

12. Considere o sistema de equações não-linear:

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 4$$

a. Represente num plano cartesiano os conjuntos de pontos que satisfazem cada uma das equações acima.

b. Determine uma solução pelo método de Newton, tomando como ponto de partida: (x_0, y_0)= (2 , 1).

13. Considere o sistema não linear abaixo

$$\begin{cases} 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \\ x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0 \end{cases}$$

a. Escreva o sistema na forma geral: *F*(x)=0, *F*: $R^n \rightarrow R^n$ (defina *n* e a função *F*).

b. Faça o desenvolvimento por Taylor até a 1ª. ordem da *F* obtida no item a. e explique como construir o método de Newton.

c. Com o ponto inicial: $x^0 = (1.6 \;\; 2.1)^T$, resolva o sistema pelo método de Newton (máximo 3 iterações).

d. O método de Newton pode falhar? Ou sempre converge? Comente.

14. Considere o sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = -3 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 = 4 \\ x_1 x_2 x_3 = 2 \end{cases}$$

a. Escreva o sistema acima na forma **F(x)=0**. Explicite **F** e **F´** (sua derivada). Verifique que $\mathbf{x} = (1\ 2\ 1)^T$ é uma raiz de F.

b. Aplique o método de Newton, tomando o ponto inicial $\mathbf{x^0}=(1\ 1\ 1)^T$ e calcule $\mathbf{x^1}$ e $\mathbf{x^2}$. Verifique se $\mathbf{x^2}$ satisfaz o critério de parada. Na sua opinião, a seqüência deve convergir? Por que?

c. O ponto $\mathbf{x^0}=(0\ 0\ 0)^T$ pode ser utilizado? Por que?

15. Considere o seguinte pseudo-código <u>incompleto</u> do método de Newton:

Definições prévias:

- f(x): retorna o valor da função avaliada em x
- df(x): retorna o valor da derivada da função avaliada em x
- x0: aproximação inicial fornecido pelo usuário
- MAX: limitante para o número de iterações fornecido pelo usuário
- TOL: número pequeno para tolerância para o número zero
- pare = falso {interrompe o processo iterativo quando pare = verdadeiro}
- k=0 {contador de iterações}

Enquanto pare=falso **faça**:
início-enquanto
x1 ← x0 – f(x0)/df(x0)
x0 ← x1
k ← k+1
fim-enquanto.

i. Inclua adequadamente no pseudo-código, critérios de parada de modo que:
   a. o número de iterações não ultrapasse o parâmetro MAX.
   b. o valor da função próximo de zero.

ii. Caso df(x0)=0 o algoritmo falha. Explique porque no algoritmo e em um gráfico.

iii. Refine um pouco mais o pseudo-código, incluindo o teste df(x0)=0 (use TOL).

16. Considere a equação: f(x)=0, f:R→R, f∈C^3 e $\bar{\mathbf{x}}$ uma raiz, isto é, $\mathbf{f(\bar{x}) = 0}$.

a. Suponha que $\mathbf{f'(\bar{x}) \neq 0}$. Interprete num gráfico o método de Newton e mostre que converge, para x_0 suficientemente próximo de $\bar{\mathbf{x}}$ (sugestão: Mostre que a função de iteração de Newton satisfaz $\boldsymbol{\varphi'(\bar{x}) = 0}$).

b. Suponha que $\mathbf{f'(\bar{x}) = 0}$ e $\mathbf{f''(\bar{x}) > 0}$. Interprete num gráfico o método de Newton e mostre que converge, para x_0 suficientemente próximo de $\bar{\mathbf{x}}$. (sugestão: Mostre que a função de iteração de Newton satisfaz $|\boldsymbol{\varphi'(\bar{x})}| = 1/2$. Use a regra de L´hospital para resolver a indeterminação 0/0).

c. Suponha que $\mathbf{f'(\bar{x}) = 0}$ e $f''(\bar{x}) < 0$. Interprete num gráfico o método de Newton e mostre que converge, para x_0 suficientemente próximo de $\bar{\mathbf{x}}$. (sugestão: Mostre que a função de iteração de Newton satisfaz $|\boldsymbol{\varphi'(\bar{x})}| = 1/2$. Use a regra de L´hospital para resolver a indeterminação 0/0).

17. Considere que um método iterativo tenha sido aplicado para a resolução de **F(x)=0, F:R^n→R^n** (sistema de equações não lineares), gerando uma sequência de vetores do **R^n**: $\boldsymbol{x^0, x^1, x^2}$**,...**da qual espera-se que convirja para $\bar{\mathbf{x}}$, tal que **F(**$\bar{\mathbf{x}}$**)=0.**

a. Defina seqüência convergente.

b. Computacionalmente, como se identifica uma seqüência convergente?

c. Explique porque os seguintes critérios de parada são válidos ou não, considerando-se ε>0, um valor pequeno, escolhido a priore (em caso negativo, dê contra-exemplo):

i. máximo { | $x_i^{k+1} - x_i^k$ | , i=1,...,n } < ε

ii. mínimo { | $x_i^{k+1} - x_i^k$ | , i=1,...,n } < ε

iii. | $x_i^{k+1} - x_i^k$ | < ε , para algum i

iv. | $x_i^{k+1} - x_i^k$ | < ε , para todo i

d. Dê um critério de parada alternativo, além de comparar dois pontos consecutivos da sequência.