

Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos – tipo abstrato de dados

Cristina Dutra de Aguiar Ciferri

Material de aula de

Thiago A. S. Pardo

M. Cristina de Oliveira

Josiane M. Bueno

Elaine P. M. de Souza

Grafos

Tipo Abstrato de Dados (TAD)

- **TAD grafo**
 - **Dados/informação (encapsulados)**
 - **Estruturas de dados adequadas**
 - **Operações**
- **A escolha da estrutura de dados adequada para a representação de grafos tem um enorme impacto no desempenho de um algoritmo**

Grafos

Estruturas de Dados

- **Há duas representações usuais**
 - **Matriz de Adjacências**
 - **Listas de Adjacências**
- **Independência de implementação**
 - **permite alterar a implementação do tipo abstrato de dados sem ter que alterar a implementação das aplicações que o utilizam**

Grafos

Estruturas de Dados

Matriz de Adjacências

Grafos

Matriz de Adjacências

- Dado um grafo $G = (V, A)$, a **matriz de adjacências** M é uma matriz de ordem $|V| \times |V|$, tal que:

$|V|$ = número de vértices

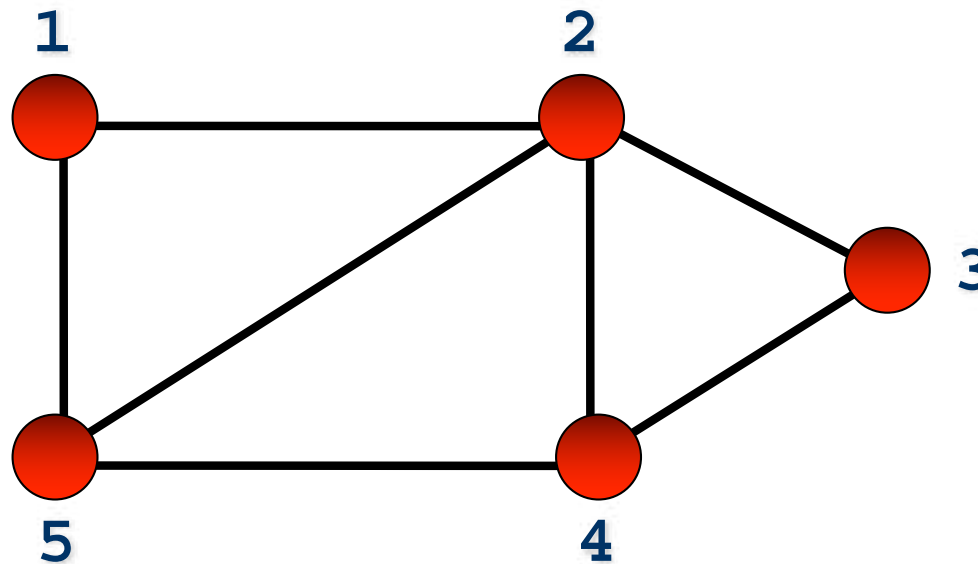
$M[u,v] = 1$, se existir aresta de u a v

$M[u,v] = 0$, se NÃO existir aresta de u a v

Grafos

Matriz de Adjacências

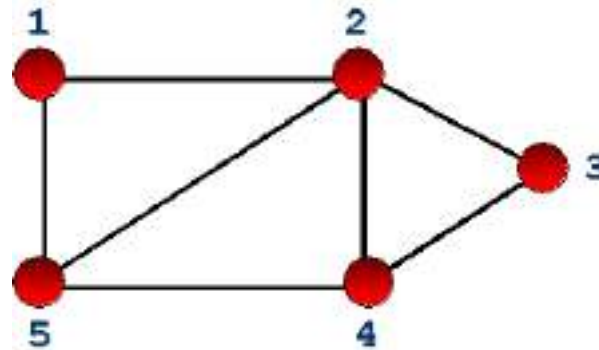
- Qual a matriz de adjacências do grafo a seguir?



Grafos

Matriz de Adjacências

- Resposta:



$M =$

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

← vértices

**Grafo
simétrico**

Grafos

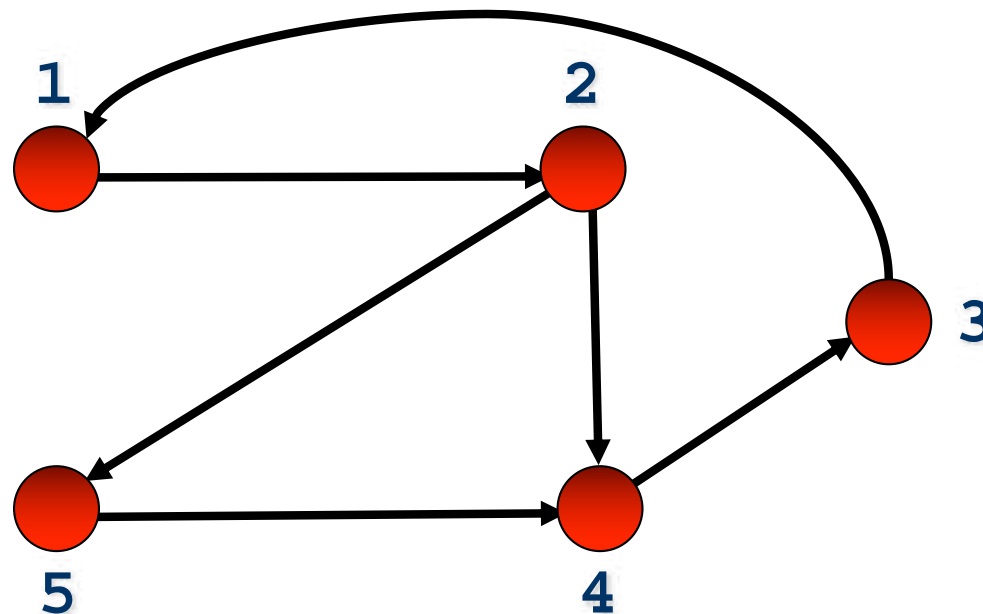
Matriz de Adjacências

- Se o grafo for **direcionado**
 - $M[u,v]$ indica uma aresta que sai do vértice u e chega no vértice v , ou seja $u \rightarrow v$

Grafos

Matriz de Adjacências

- Qual a matriz de adjacências do dígrafo a seguir?

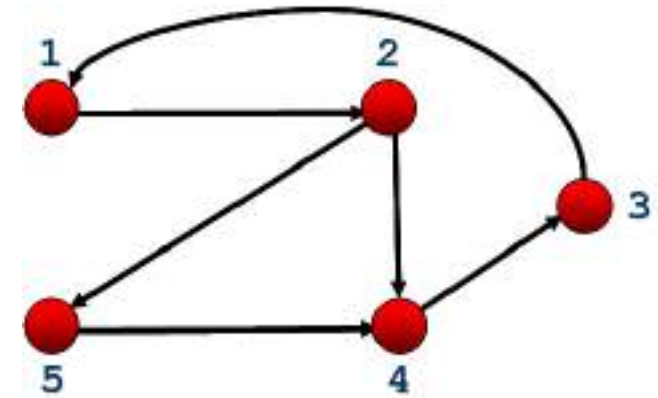


Grafos

Matriz de Adjacências

- Possível resposta:

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0



**Grafo
assimétrico**

Grafos

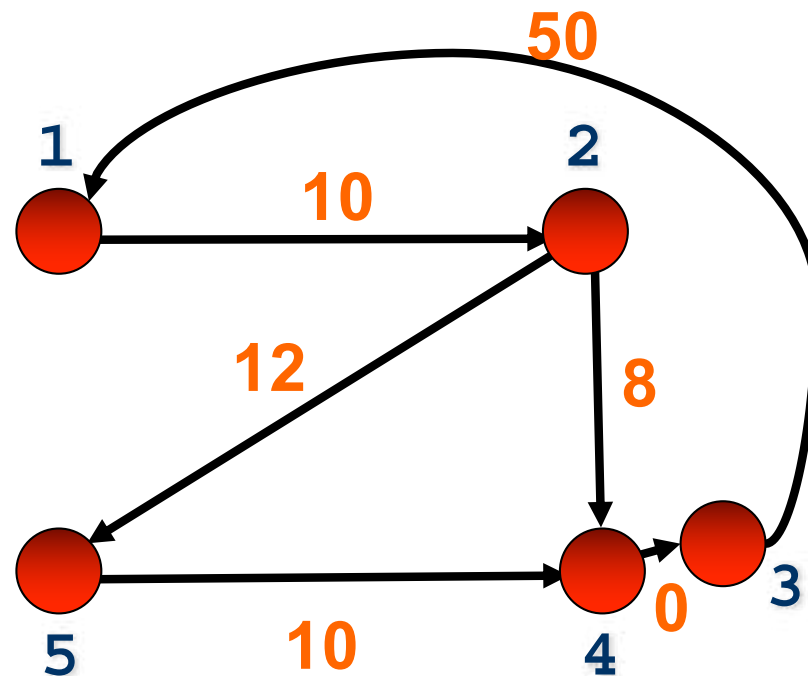
Matriz de Adjacências

- Se o grafo for **ponderado**
 - $M[u,v]$ deve conter o peso associado com a aresta
 - Se não existir uma aresta entre u e v , então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como peso (como o valor 0 ou -1, por exemplo)

Grafos

Matriz de Adjacências

- Qual a matriz de adjacências do grafo direcionado e ponderado a seguir? Suponha que o grafo represente a distância em km entre cidades

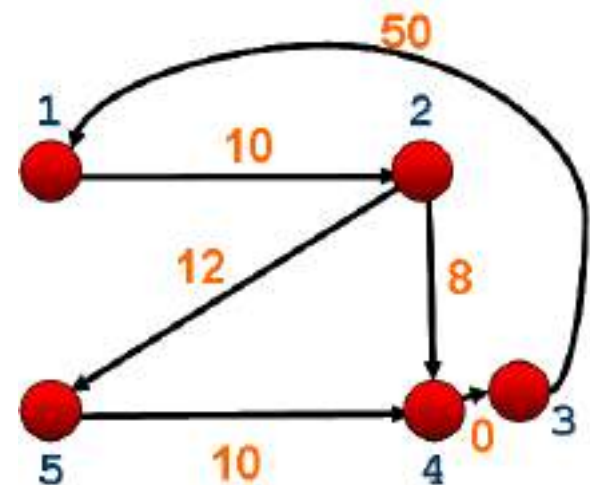


Grafos

Matriz de Adjacências

- Possível resposta:

	1	2	3	4	5
1	-1	10	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	8	12
3	50	-1	-1	-1	-1
4	-1	-1	0	-1	-1
5	-1	-1	-1	10	-1



**Grafo simétrico
ou assimétrico?**

Grafos

Matriz de Adjacências

- **Característica**
 - forma mais simples de representação de grafos
- **Propriedades**
 - espaço de armazenamento: $O(|V|^2)$
 - matriz é simétrica para grafos não direcionados, sendo que aproximadamente metade do espaço pode ser economizado representando a matriz triangular superior ou inferior
 - teste se aresta (u,v) está no grafo: $O(1)$
 - tempo necessário para acessar um elemento é independente de $|V|$ ou $|A|$

Grafos

Matriz de Adjacências

- **Vantagens**
 - representação útil para **grafos densos**, nos quais $|A|$ é próximo a $|V|^2$
 - **boa** quando se deseja **buscar arestas** rapidamente
- **Desvantagens**
 - **ruim** quando se necessita examinar a matriz toda: $O(|V|^2)$
- **Perguntas**
 - inserção e remoção de vértices: representação boa ou ruim?
 - inserção e remoção de arestas: representação boa ou ruim?

Grafos

Matriz de Adjacências

- **Exemplos de operações básicas sobre um grafo G**
 - **Criar grafo**: cria G composto de um conjunto de vértices
 - **Inserir aresta**: insere uma aresta e seu peso em G
 - **Remover aresta**: remove uma aresta de G e retorna seu peso
 - **Verificar a existência de aresta**: retorna verdadeiro se a aresta existe e falso caso contrário
 - **Imprimir grafo**: imprimir os vértices e arestas de G
 - **Gerenciar vértices adjacentes**
 - Verificar a existência de um vértice adjacente ao vértice v
 - Verificar se a lista de vértices adjacentes está vazia
 - Retornar o primeiro vértice da lista
 - Retornar o próximo vértice adjacente da lista

Grafos

Matriz de Adjacências

- **Exemplos de operações básicas**
 - **Gerenciar vértices adjacentes**
 - Verificar a existência de um vértice adjacente ao vértice v
 - Verificar se a lista de vértices adjacentes está vazia
 - Retornar o primeiro vértice da lista
 - Retornar o próximo vértice adjacente da lista
 - ...

Grafos

Estruturas de Dados

Listas de Adjacências

Grafos

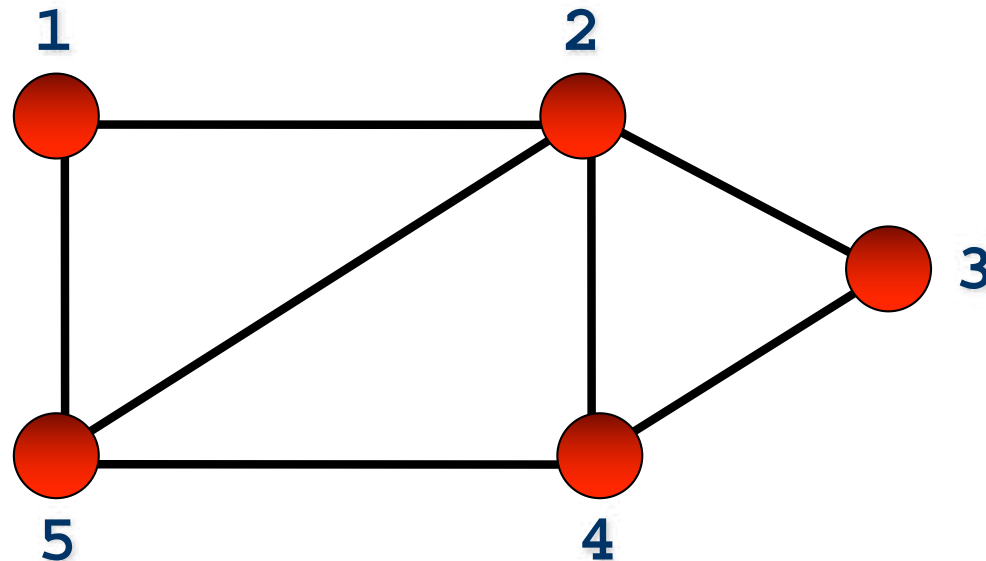
Listas de Adjacências

- Dado um grafo $G = (V, A)$, as **listas de adjacências** L são um conjunto de $|V|$ listas $L(v)$, uma para cada vértice v pertencente a V
- Cada lista $L(v)$ é denominada **lista de adjacências** do vértice v e contém os vértices w adjacentes a v em G
- Ou seja, as **listas de adjacências** consistem tradicionalmente em um vetor de $|V|$ elementos que são capazes de apontar, cada um, para uma lista linear
 - O i -ésimo elemento do vetor aponta para a lista linear das arestas que são adjacentes ao vértice i

Grafos

Listas de Adjacências

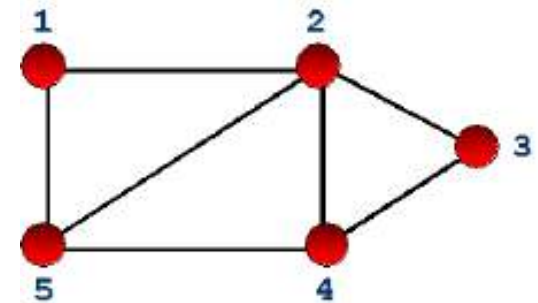
- Como são as listas de adjacências do grafo a seguir?



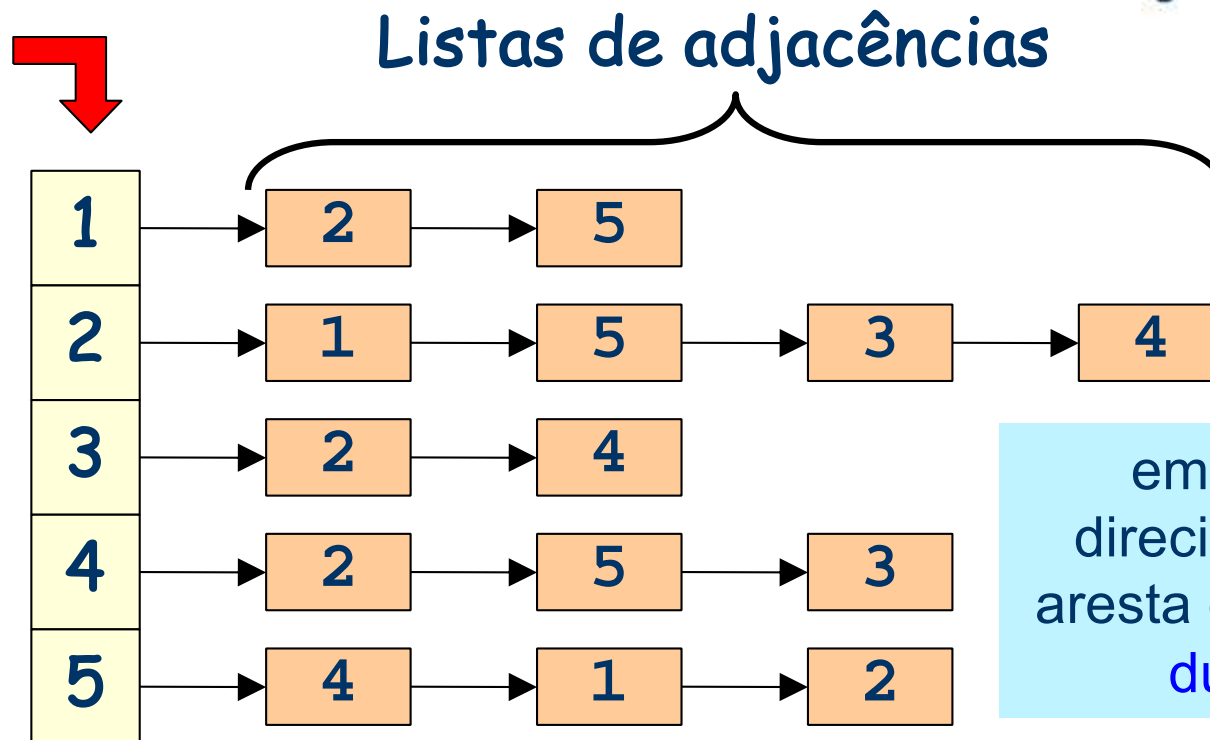
Grafos

Listas de Adjacências

- Possível resposta:



vértices

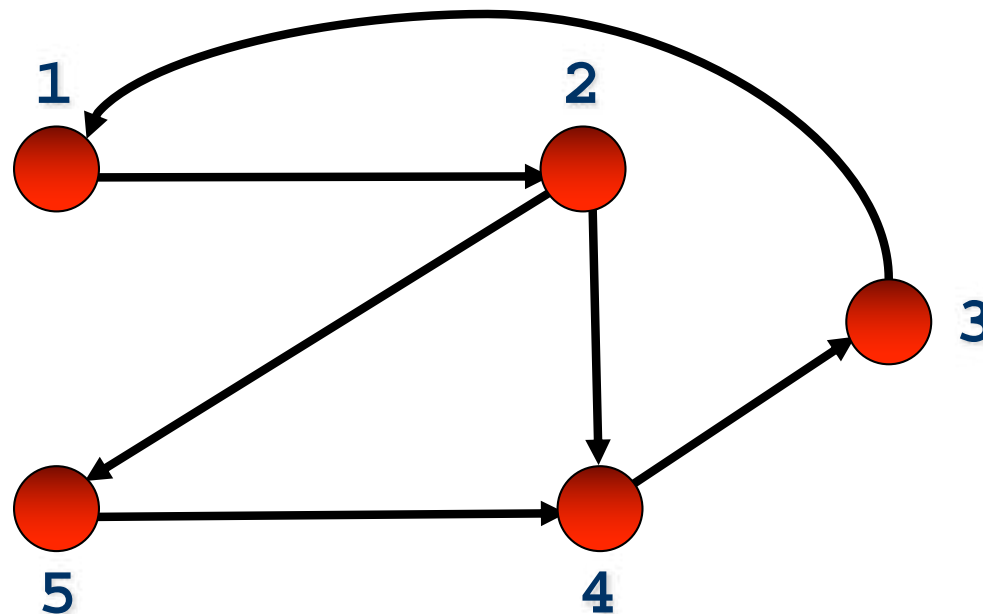


em grafos não
direcionados, cada
aresta é representada
duas vezes

Grafos

Listas de Adjacências

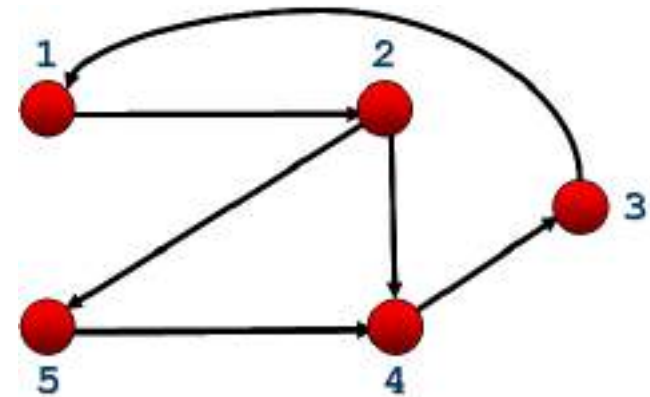
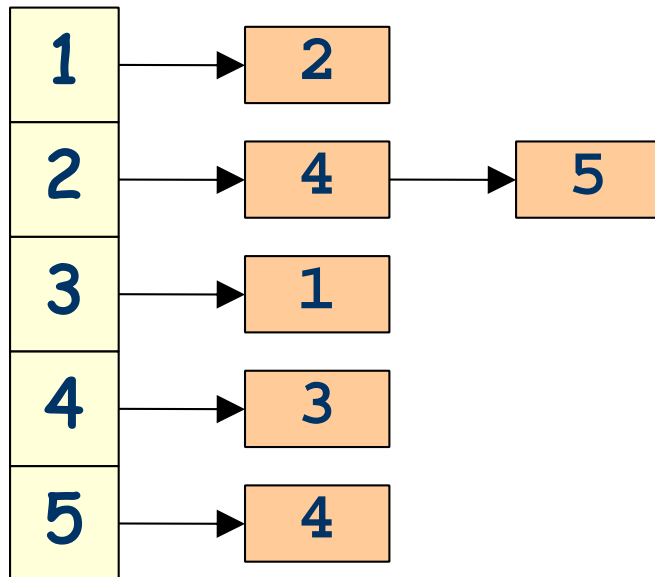
- Como representar o dígrafo abaixo?



Grafos

Listas de Adjacências

- Possível resposta:

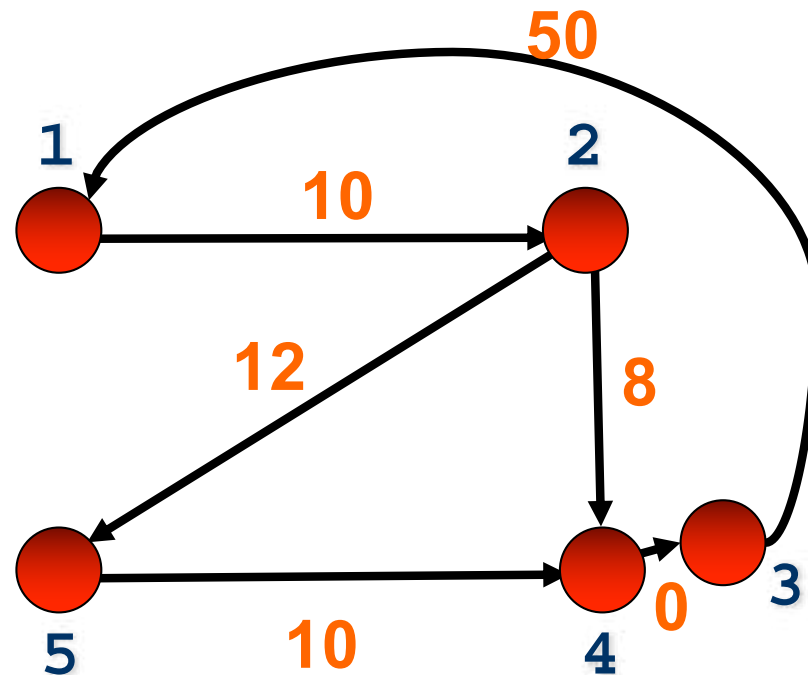


em grafos direcionados,
cada vértice aponta para
os seus vértices
adjacentes

Grafos

Listas de Adjacências

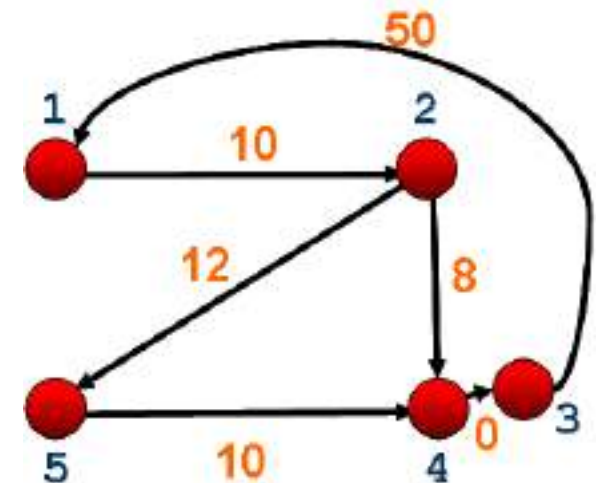
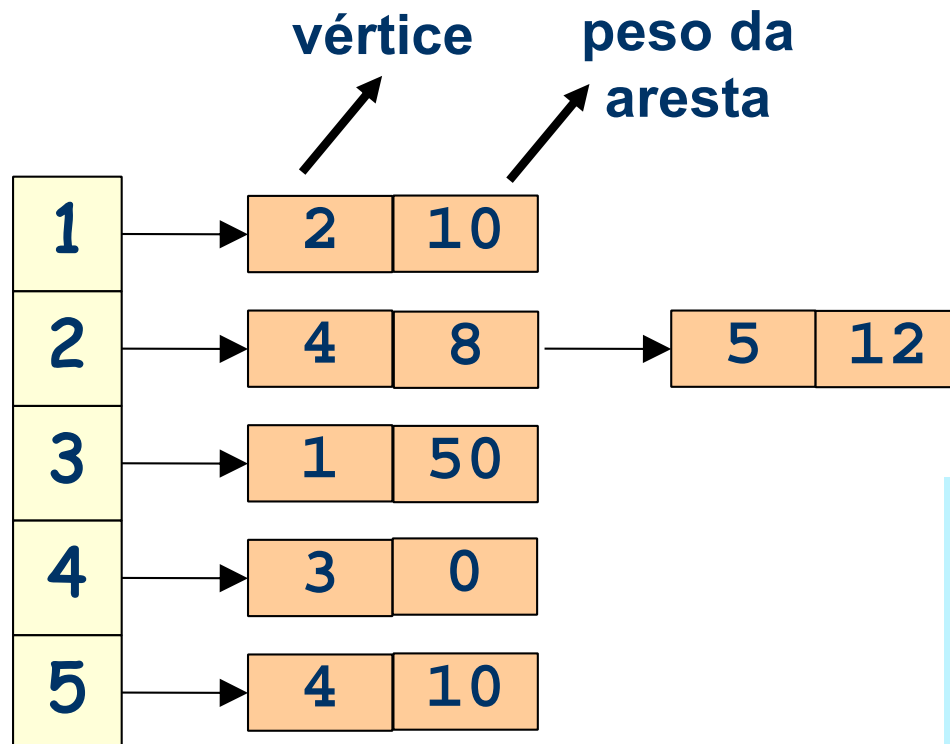
- Como representar o grafo direcionado e ponderado abaixo?



Grafos

Listas de Adjacências

- Possível resposta:



em grafos ponderados, cada elemento da lista armazena o rótulo do vértice e o peso da aresta correspondente

Grafos

Listas de Adjacências

- **Características**

- maior complexidade na representação de grafos

- **Propriedades**

- espaço de armazenamento: $O(|V|+|A|)$
- teste se aresta (u,v) está no grafo: $O(d_u)$
 - grafos não direcionados $\Rightarrow d_u =$ grau do vértice u
 - grafos direcionados $\Rightarrow d_u =$ grau de saída do vértice u
 - $d_u \approx |V|$ para vértices com muitas arestas

Grafos

Listas de Adjacências

- **Vantagens**
 - representação útil para **grafos esparsos**, nos quais $|A|$ é muito menor do que $|V|^2$
 - representação **compacta**
- **Desvantagens**
 - tempo $O(|V|)$ para determinar se existe uma aresta entre u e v
 - podem haver $|V|$ elementos na lista de adjacências de u

listas de adjacências:
representação geralmente usada
na maioria das aplicações

Grafos

Listas de Adjacências

- **Observações**

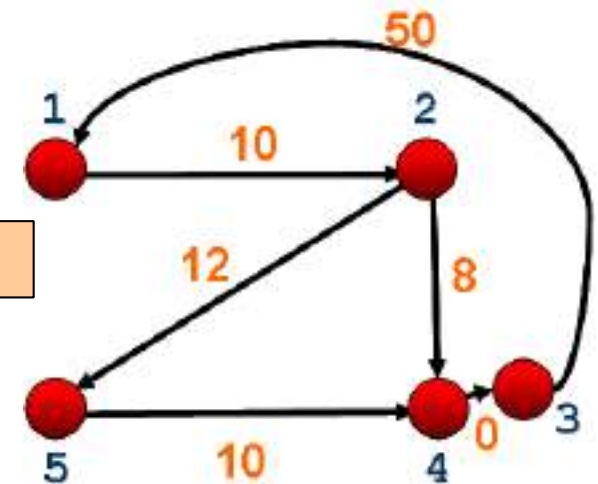
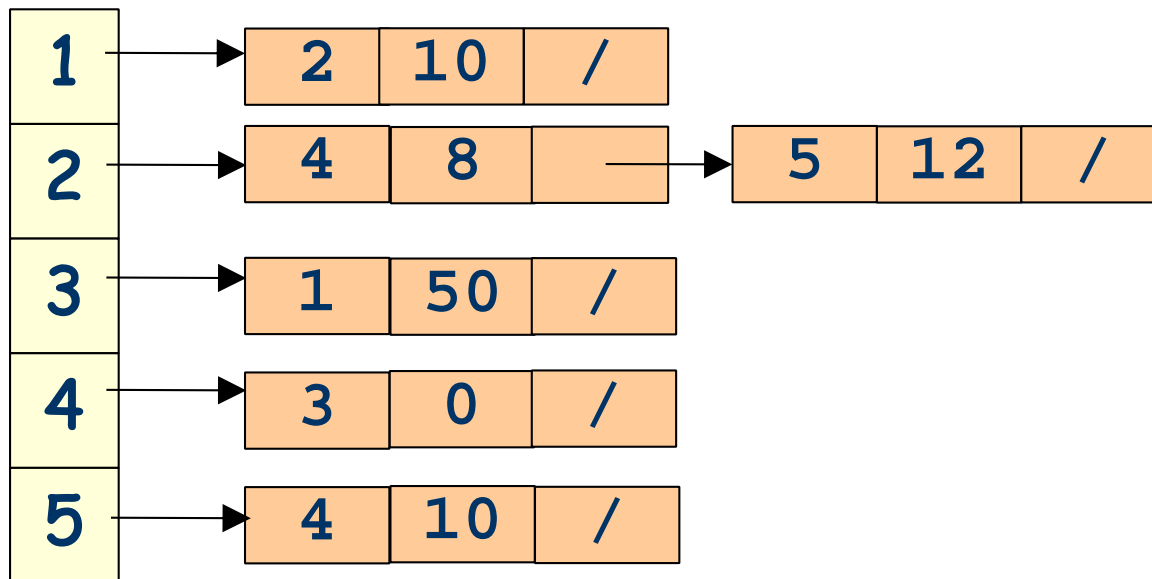
- Os vértices adjacentes a um vértice i podem ser armazenados na lista de adjacências de i em **ordem arbitrária** ou **não**
 - usualmente armazenados de forma arbitrária
- Como em qualquer estrutura de dados, há liberdade para haver **variações** na representação
 - **vetor de vetores**
 - **vetor de listas ligadas**
 - ...

implementação muito comum:
vetor de ponteiros com listas
encadeadas dinâmicas

Grafos

Listas de Adjacências

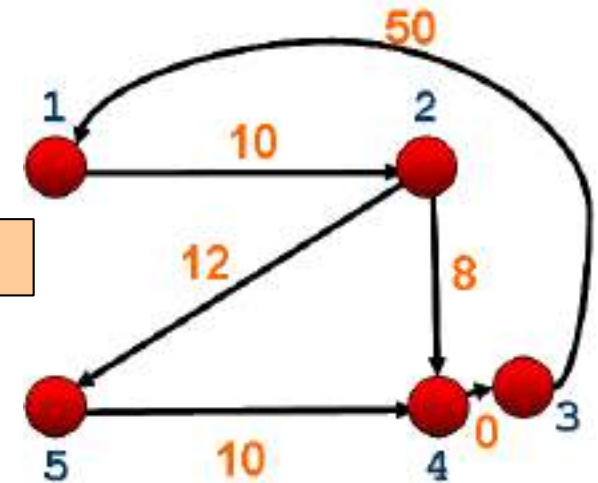
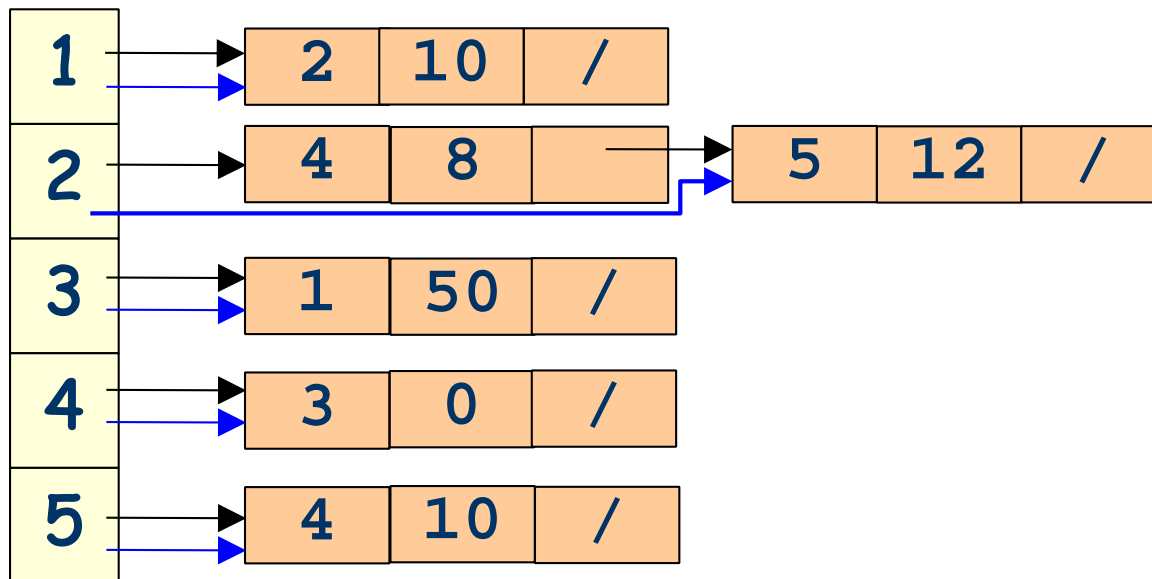
- Exemplo: representação usando vetor de ponteiros com listas encadeadas dinâmicas



Grafos

Listas de Adjacências

- Exemplo: representação usando vetor de ponteiros com listas encadeadas dinâmicas



Pergunta: seria interessante armazenar um ponteiro para o último elemento de cada lista?

Grafos

Matriz de Adjacências

- **Exemplos de operações básicas sobre um grafo G**
 - **Criar grafo**: cria G composto de um conjunto de vértices
 - **Inserir aresta**: insere uma aresta e seu peso em G
 - **Remover aresta**: remove uma aresta de G e retorna seu peso
 - **Verificar a existência de aresta**: retorna verdadeiro se a aresta existe e falso caso contrário
 - **Imprimir grafo**: imprimir os vértices e arestas de G
 - **Gerenciar vértices adjacentes**
 - Verificar a existência de um vértice adjacente ao vértice v
 - Verificar se a lista de vértices adjacentes está vazia
 - Retornar o primeiro vértice da lista
 - Retornar o próximo vértice adjacente da lista

Grafos

Comparação

Comparação	Vencedor
Rapidez para saber se (x,y) está no grafo	Matriz de adjacências
Rapidez para determinar o grau de um vértice	Listas de adjacências
Grafos esparsos	Listas de adjacências

Grafos

Comparação

Comparação	Vencedor
Grafos densos	Matriz de adjacências
Inserção/remoção de arestas	Matriz: $O(1)$ Listas: $O(d)$
Melhor na maioria dos problemas	Listas de adjacências
Rapidez para percorrer o grafo	Listas: $O(V + A)$ Matriz: $O(V ^2)$