

# Árvores

SCC-214 – Projeto de Algoritmos

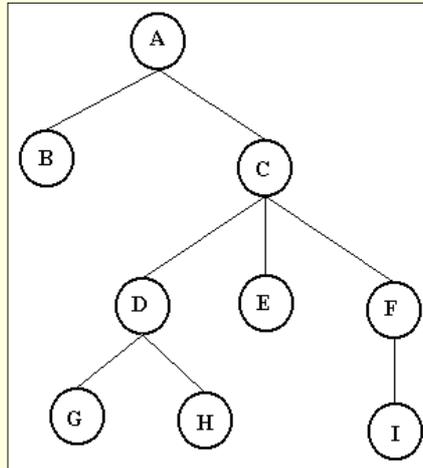
Thiago A. S. Pardo

## Listas e árvores

- **Listas lineares**
  - Um nó após o outro, adjacentes
  - Sem relações hierárquicas entre os nós, em geral
  
- Diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas do que as listas estudadas até agora
  - **Listas não lineares:** árvores, grafos, etc.

## Árvores

### ■ Exemplo



## Árvores

### ■ Motivações para usá-las

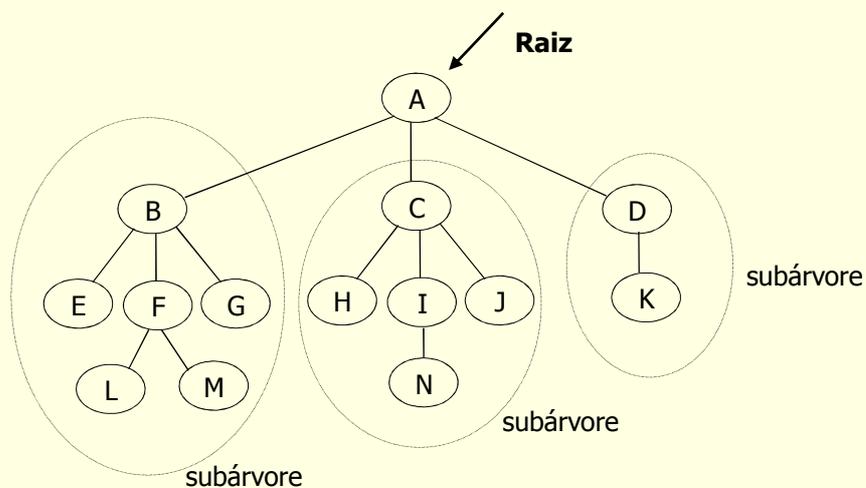
- Inúmeros problemas podem ser representados e tratados por árvores
- Árvores admitem tratamento computacional eficiente quando comparadas a estruturas mais genéricas como os grafos (os quais, por sua vez são mais flexíveis e, portanto, complexos)
- Ótimas para busca!

# Árvores

## ■ Definição

- Uma árvore  $T$ , ou simplesmente uma árvore, é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que
  - $T=0$  é a árvore dita vazia ou
  - Existe um nó especial  $R$ , chamado raiz de  $T$ ; os nós restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em  $m$  ( $\geq 1$ ) conjuntos não vazios que são as subárvores de  $R$ , sendo que cada subárvore é, por sua vez, uma árvore

# Árvores



## Árvores

---

- Nós filhos, pais, tios, irmãos e avô
  - Seja  $V$  o nó raiz de uma subárvore de  $T$ 
    - Os nós raízes  $w_1, w_2, \dots, w_j$  das subárvores de  $V$  são chamados filhos de  $V$
    - $V$  é chamado pai de  $w_1, w_2, \dots, w_j$
    - Os nós  $w_1, w_2, \dots, w_j$  são irmãos
    - Se  $Z$  é filho de  $w_1$ , então  $w_2$  é tio de  $Z$  e  $V$  é avô de  $Z$

## Árvores

---

- Grau de saída, descendente e ancestral
  - O número de filhos de um nó é chamado grau (de saída) desse nó
  - Se  $X$  pertence à subárvore  $V$  de  $T$ , então  $X$  é descendente de  $V$  e  $V$  é ancestral, ou antecessor, de  $X$

## Árvores

---

### ■ Nó folha e nó interior

- Um nó que não possui descendentes é chamado de nó folha, ou seja, um nó folha é aquele com grau de saída nulo ou zero
- Um nó que não é folha (isto é, possui grau de saída diferente de zero) é chamado nó interior, nó interno ou, ainda, nó intermediário

## Árvores

---

### ■ Grau de uma árvore

- O grau de uma árvore é o máximo entre os graus de seus nós

## Árvores

---

### ■ Floresta

- Uma floresta é um conjunto de zero ou mais árvores

## Árvores

---

### ■ Caminho, comprimento do caminho

- Uma seqüência de nós distintos  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , tal que existe sempre entre nós consecutivos (isto é, entre  $v_1$  e  $v_2$ , entre  $v_2$  e  $v_3$ , ... ,  $v_{(k-1)}$  e  $v_k$ ) a relação "é filho de" ou "é pai de" é denominada um caminho na árvore; diz-se que  $v_1$  alcança  $v_k$  e que  $v_k$  é alcançado por  $v_1$
- Um caminho de  $v_k$  vértices é obtido pela seqüência de  $k-1$  pares; o valor  $k-1$  é o comprimento do caminho

## Árvores

---

- **Nível (ou profundidade) e altura de um nó**
  - O nível de um nó é o número de nós do caminho da raiz até o nó
  - O nível da raiz é portanto 1
  - A altura de um nó  $V$  é o número de nós no maior caminho de  $V$  até um de seus descendentes
  - As folhas têm altura 1

## Árvores

---

- **Altura de uma árvore**
  - A altura de uma árvore  $T$  é igual ao máximo nível de seus nós
  - Em geral, representa-se a altura de  $T$  por  $h(T)$  e a altura da subárvore de raiz  $V$  por  $h(V)$

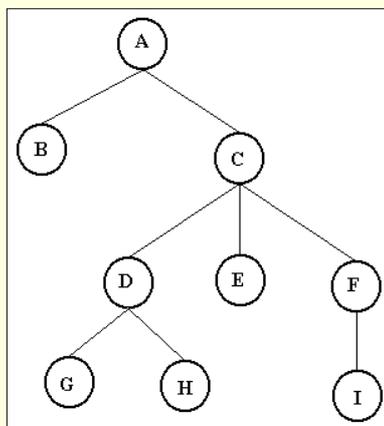
# Árvores

## ■ Árvore ordenada

- Uma árvore ordenada é aquela na qual os filhos de cada nó estão ordenados
- Assume-se ordenação da esquerda para a direita

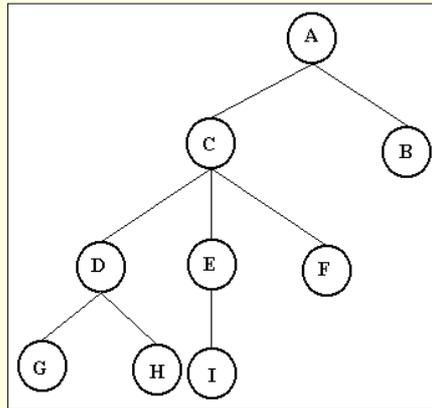
# Árvores

## ■ Árvore ordenada



## Árvores

- **Árvore não ordenada**



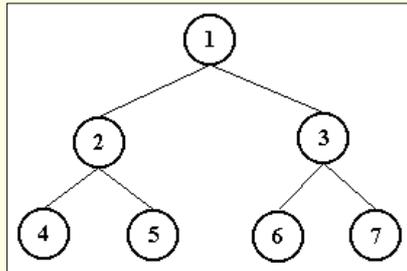
## Árvores

- **Árvore cheia**

- Uma árvore de grau  $d$  é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós tem número máximo de filhos (exceto as folhas, logicamente) e todas as folhas estão na mesma altura

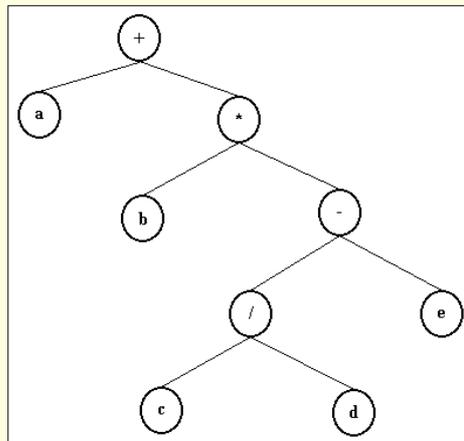
## Árvores

- Exemplo de árvore cheia de grau 2



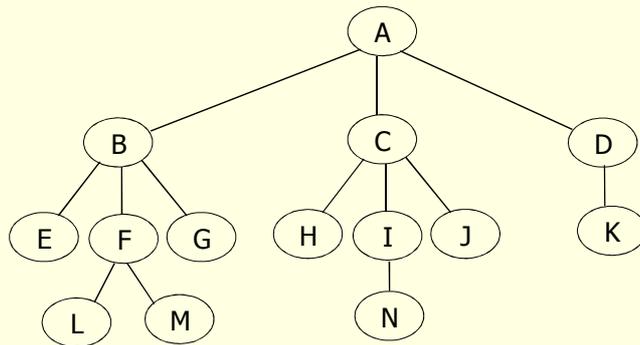
## Árvores: exemplo

- Representação da expressão aritmética  $(a + (b * ((c / d) - e))$



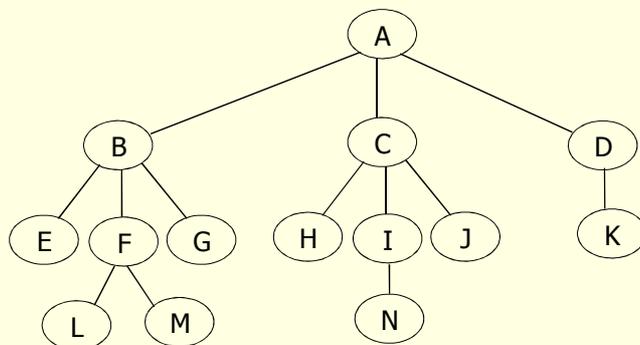
## Árvores

- Considere a árvore abaixo
  - Quantas subárvores A tem?



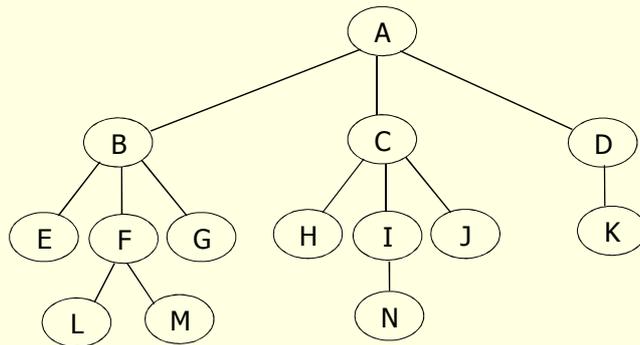
## Árvores

- Considere a árvore abaixo
  - Quem são os filhos de A? E os descendentes de A?



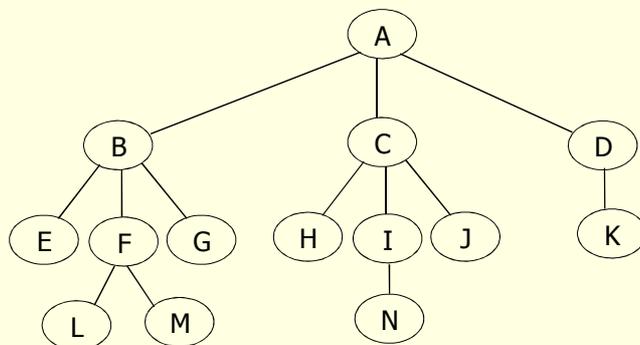
## Árvores

- Considere a árvore abaixo
  - Quais são os nós folha dessa árvore?



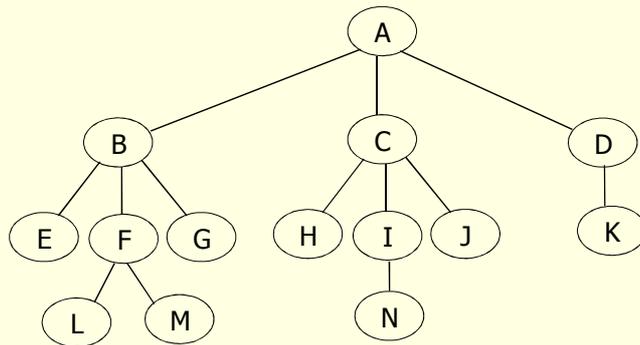
## Árvores

- Considere a árvore abaixo
  - Qual o grau dessa árvore?



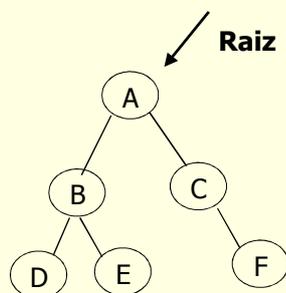
## Árvores

- Considere a árvore abaixo
  - Qual a altura dessa árvore?



## Árvores binárias

- **Árvores com grau 2**, ou seja, cada nó pode ter 2 filhos, no máximo



### Terminologia:

- filho esquerdo
- filho direito
- informação

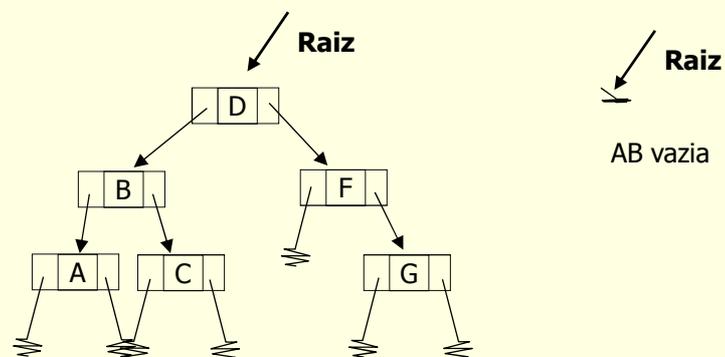
## Árvores binárias

### ■ Exercício

- Considerando a implementação dinâmica e encadeada, declare a estrutura de cada nó de uma árvore binária

## Árvores binárias

- Representação dinâmica e encadeada de uma árvore binária



## Árvores binárias

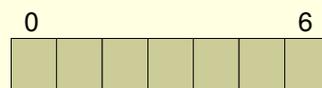
### ■ Pergunta

- Quantos ponteiros são necessários para se percorrer uma árvore binária completamente?
- Quantos são necessários para percorrer qualquer tipo de árvore?

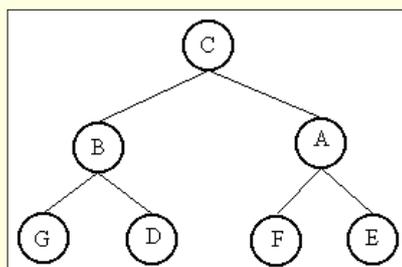
## Árvores binárias

### ■ Representação estática e seqüencial de árvores binárias

#### ■ Vetor



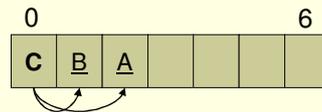
- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



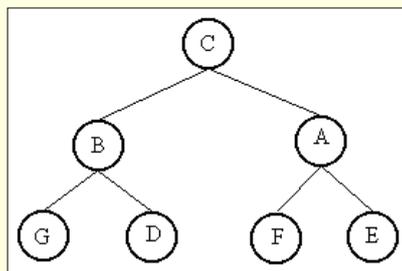
## Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias

- Vetor



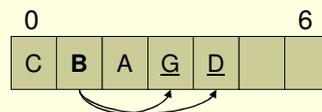
- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



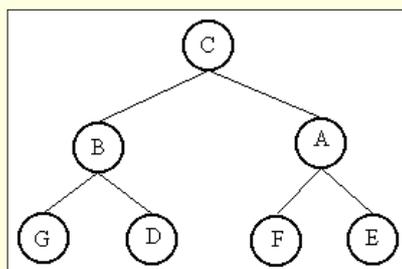
## Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias

- Vetor

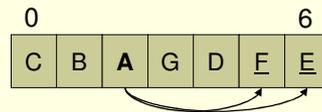


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

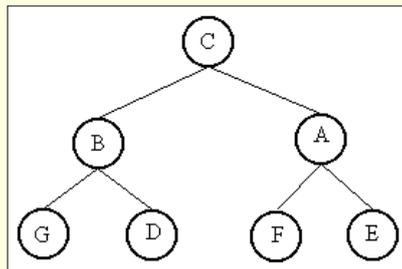


## Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
  - Vetor

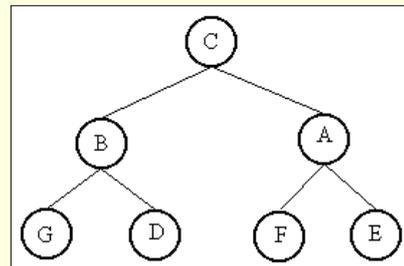


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



## Árvores binárias

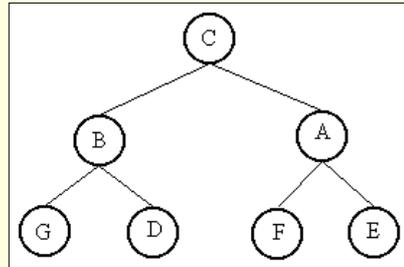
- Representação estática e seqüencial de árvores binárias



- Como saber quem é filho de quem?

## Árvores binárias

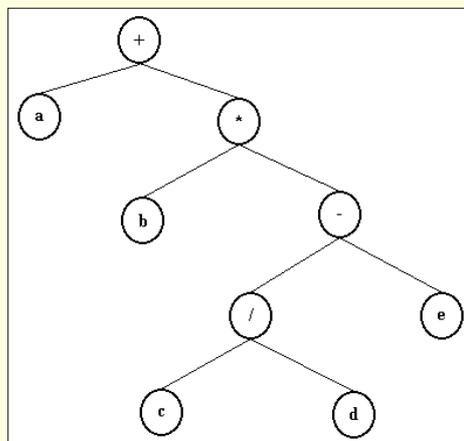
- Representação estática e seqüencial de árvores binárias



- Como saber quem é filho de quem?
  - Filhos de  $i$  são  $2i+1$  e  $2i+2$

## Árvores binárias

- Exercício: represente a árvore abaixo em um vetor



## Árvores binárias

---

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
  - Como fazer a inserção e remoção de elementos nessa representação?
  - É mais fácil ou difícil do que na implementação encadeada e dinâmica? É mais eficiente?
  - E em termos de uso da memória?

## Árvores binárias

---

- **Exercício**
  - Implemente uma sub-rotina para percorrer uma árvore binária e imprimir todos os seus elementos
    - Considere a implementação dinâmica e encadeada

## Árvores binárias

---

- Exercício

- Implemente uma sub-rotina para determinar a altura de uma árvore binária
  - Considere a implementação dinâmica e encadeada