

Árvores

SCC-214 – Projeto de Algoritmos

Thiago A. S. Pardo

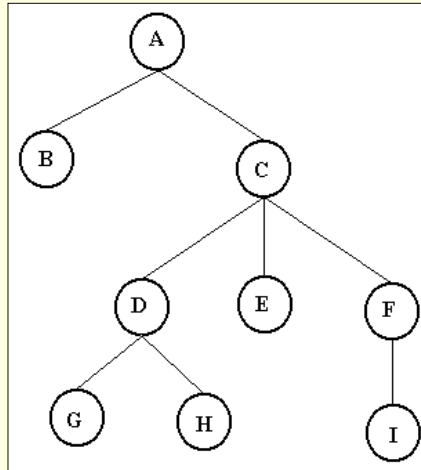
Listas e árvores

- **Listas lineares**
 - Um nó após o outro, adjacentes
 - Sem relações hierárquicas entre os nós, em geral

- Diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas do que as listas estudadas até agora
 - **Listas não lineares:** árvores, grafos, etc.

Árvores

■ Exemplo



Árvores

■ Motivações para usá-las

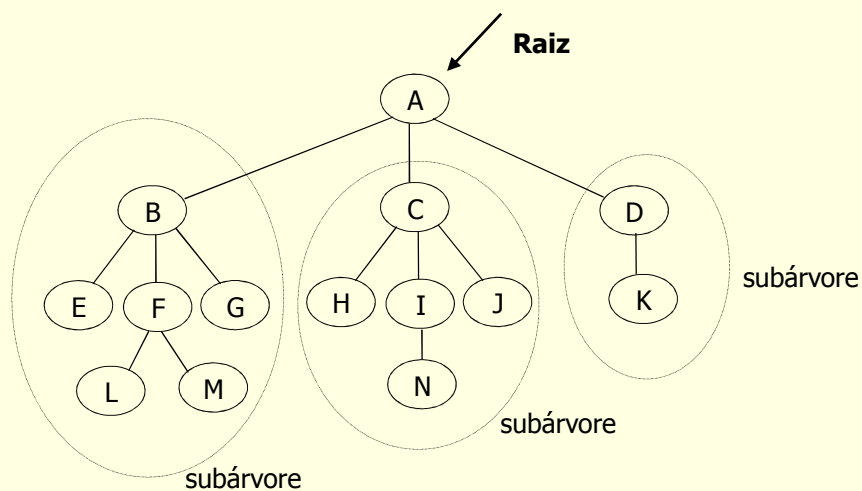
- Inúmeros problemas podem ser representados e tratados por árvores
- Árvores admitem tratamento computacional eficiente quando comparadas a estruturas mais genéricas como os grafos (os quais, por sua vez são mais flexíveis e, portanto, complexos)
- Ótimas para busca!

Árvores

■ Definição

- Uma árvore T , ou simplesmente uma árvore, é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que
 - $T=0$ é a árvore dita vazia ou
 - Existe um nó especial R , chamado raiz de T ; os nós restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em m (≥ 1) conjuntos não vazios que são as subárvores de R , sendo que cada subárvore é, por sua vez, uma árvore

Árvores



Árvores

- Nós filhos, pais, tios, irmãos e avô
 - Seja V o nó raiz de uma subárvore de T
 - Os nós raízes w_1, w_2, \dots, w_j das subárvores de V são chamados filhos de V
 - V é chamado pai de w_1, w_2, \dots, w_j
 - Os nós w_1, w_2, \dots, w_j são irmãos
 - Se Z é filho de w_1 , então w_2 é tio de Z e V é avô de Z

Árvores

- Grau de saída, descendente e ancestral
 - O número de filhos de um nó é chamado grau (de saída) desse nó
 - Se X pertence à subárvore V de T , então X é descendente de V e V é ancestral, ou antecessor, de X

Árvores

■ Nó folha e nó interior

- Um nó que não possui descendentes é chamado de nó folha, ou seja, um nó folha é aquele com grau de saída nulo ou zero
- Um nó que não é folha (isto é, possui grau de saída diferente de zero) é chamado nó interior, nó interno ou, ainda, nó intermediário

Árvores

■ Grau de uma árvore

- O grau de uma árvore é o máximo entre os graus de seus nós

Árvores

■ Floresta

- Uma floresta é um conjunto de zero ou mais árvores

Árvores

■ Caminho, comprimento do caminho

- Uma seqüência de nós distintos v_1, v_2, \dots, v_k , tal que existe sempre entre nós consecutivos (isto é, entre v_1 e v_2 , entre v_2 e v_3 , ... , $v_{(k-1)}$ e v_k) a relação "é filho de" ou "é pai de" é denominada um caminho na árvore; diz-se que v_1 alcança v_k e que v_k é alcançado por v_1
- Um caminho de v_k vértices é obtido pela seqüência de $k-1$ pares; o valor $k-1$ é o comprimento do caminho

Árvores

- **Nível (ou profundidade) e altura de um nó**
 - O nível de um nó é o número de nós do caminho da raiz até o nó
 - O nível da raiz é portanto 1
 - A altura de um nó V é o número de nós no maior caminho de V até um de seus descendentes
 - As folhas têm altura 1

Árvores

- **Altura de uma árvore**
 - A altura de uma árvore T é igual ao máximo nível de seus nós
 - Em geral, representa-se a altura de T por $h(T)$ e a altura da subárvore de raiz V por $h(V)$

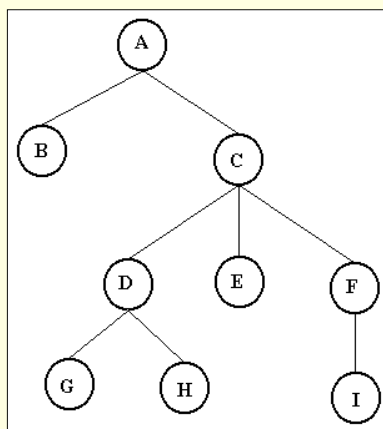
Árvores

■ Árvore ordenada

- Uma árvore ordenada é aquela na qual os filhos de cada nó estão ordenados
- Assume-se ordenação da esquerda para a direita

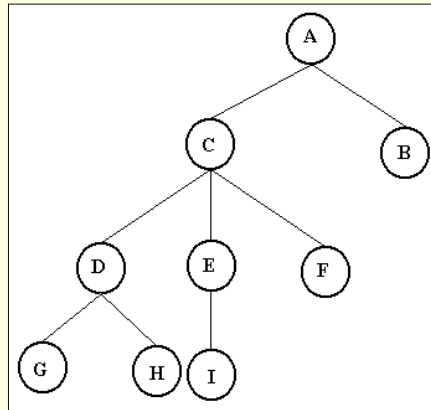
Árvores

■ Árvore ordenada



Árvores

- **Árvore não ordenada**



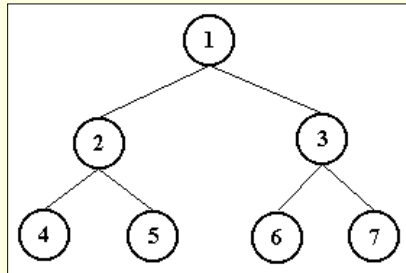
Árvores

- **Árvore cheia**

- Uma árvore de grau d é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós tem número máximo de filhos (exceto as folhas, logicamente) e todas as folhas estão na mesma altura

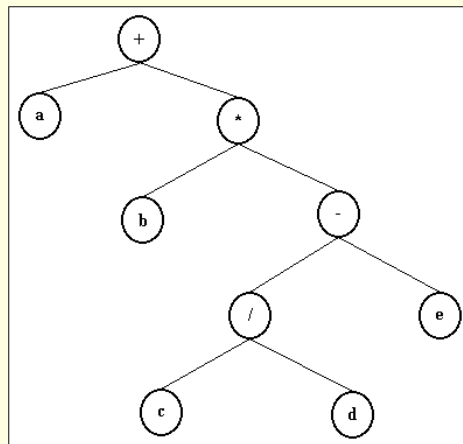
Árvores

- Exemplo de árvore cheia de grau 2



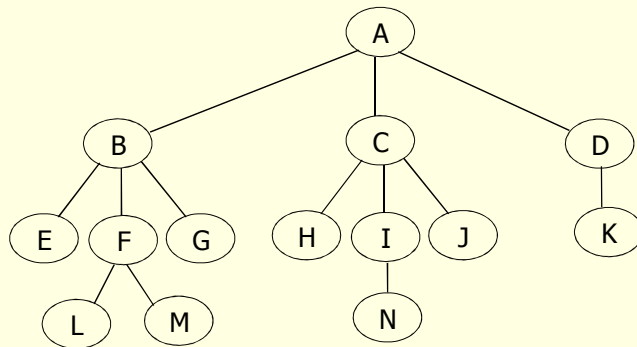
Árvores: exemplo

- Representação da expressão aritmética $(a + (b * ((c / d) - e)))$



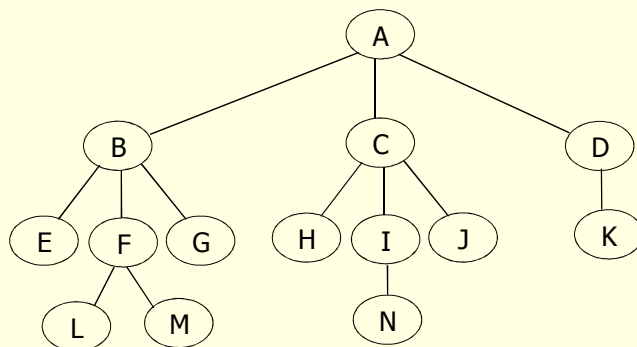
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quantas subárvores A tem?



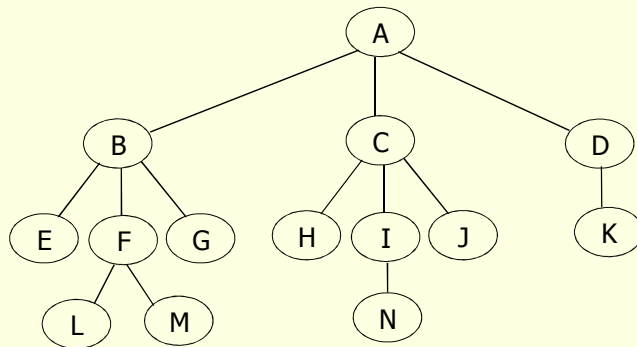
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quem são os filhos de A? E os descendentes de A?



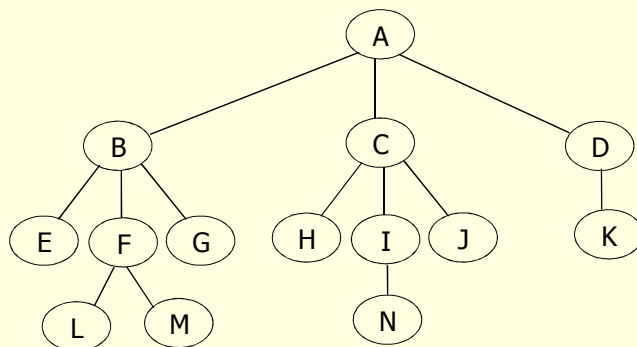
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quais são os nós folha dessa árvore?



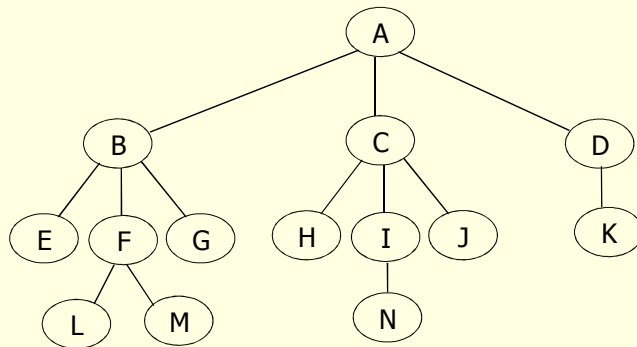
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Qual o grau dessa árvore?



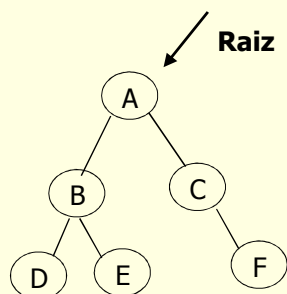
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Qual a altura dessa árvore?



Árvores binárias

- Árvores com grau 2, ou seja, cada nó pode ter 2 filhos, no máximo



Terminologia:

- filho esquerdo
- filho direito
- informação

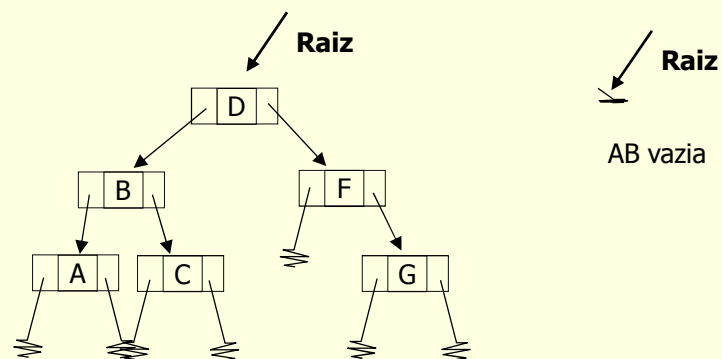
Árvores binárias

■ Exercício

- Considerando a implementação dinâmica e encadeada, declare a estrutura de cada nó de uma árvore binária

Árvores binárias

- Representação dinâmica e encadeada de uma árvore binária



Árvores binárias

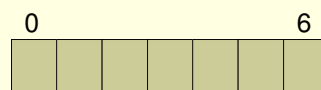
■ Pergunta

- Quantos ponteiros são necessários para se percorrer uma árvore binária completamente?
- Quantos são necessários para percorrer qualquer tipo de árvore?

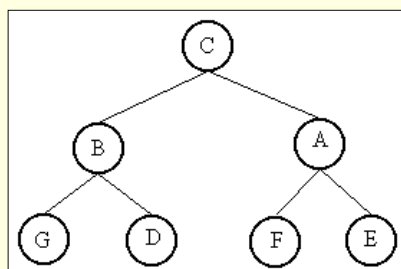
Árvores binárias

■ Representação estática e seqüencial de árvores binárias

■ Vetor



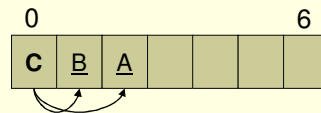
- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



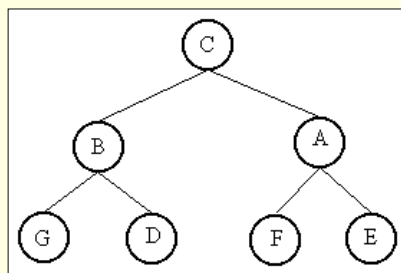
Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias

- Vetor



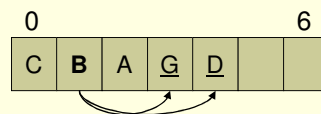
- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



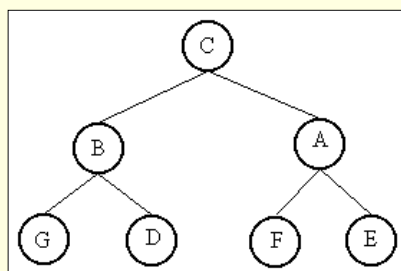
Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias

- Vetor

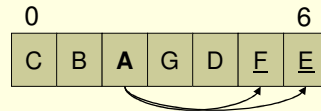


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

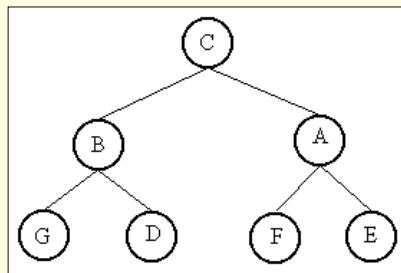


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Vetor

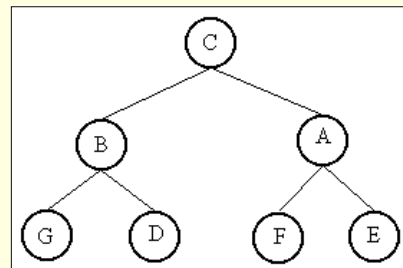
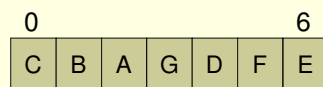


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



Árvores binárias

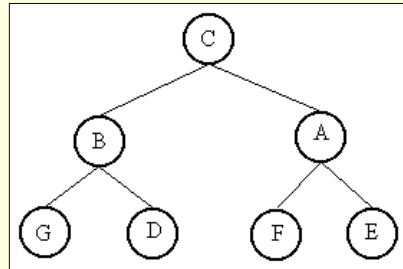
- Representação estática e seqüencial de árvores binárias



- Como saber quem é filho de quem?

Árvores binárias

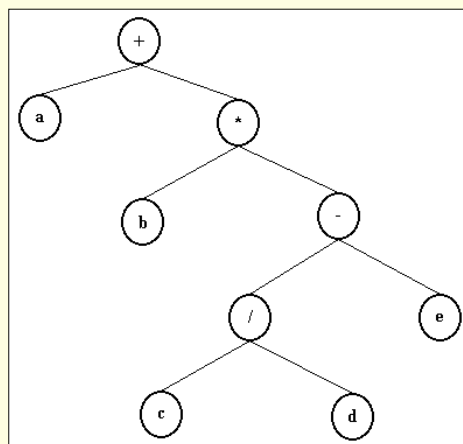
- Representação estática e seqüencial de árvores binárias



- Como saber quem é filho de quem?
 - Filhos de i são $2i+1$ e $2i+2$

Árvores binárias

- Exercício: represente a árvore abaixo em um vetor



Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
 - Como fazer a inserção e remoção de elementos nessa representação?
 - É mais fácil ou difícil do que na implementação encadeada e dinâmica? É mais eficiente?
 - E em termos de uso da memória?

Árvores binárias

- **Exercício**
 - Implemente uma sub-rotina para percorrer uma árvore binária e imprimir todos os seus elementos
 - Considere a implementação dinâmica e encadeada

Árvores binárias

- Exercício
 - Implemente uma sub-rotina para determinar a altura de uma árvore binária
 - Considere a implementação dinâmica e encadeada