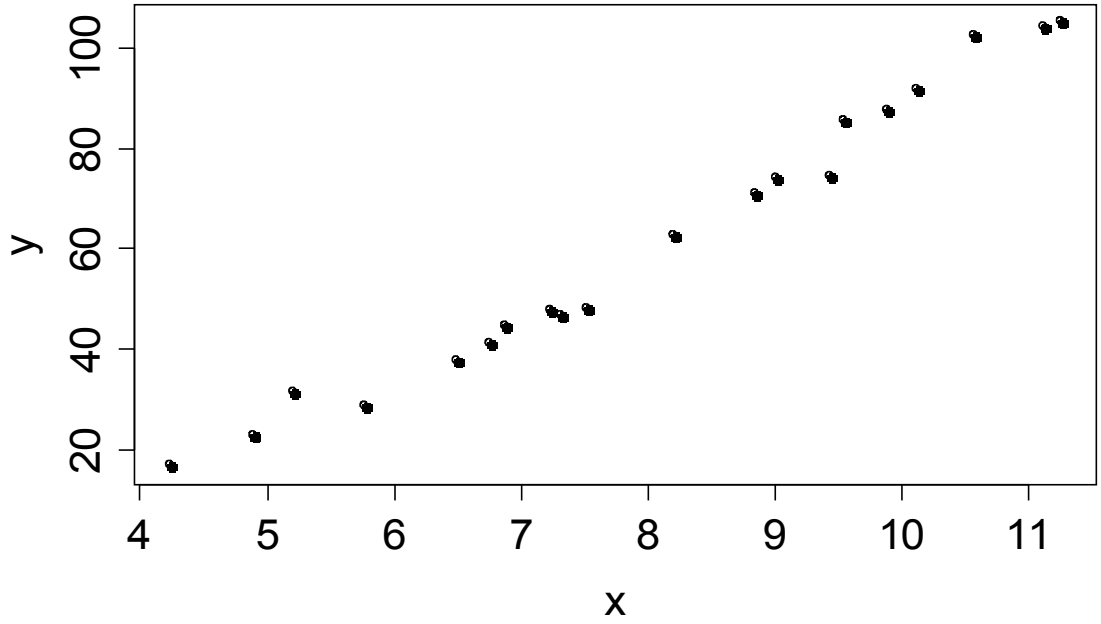
1. Coeficiente de correlação

(x_1,y_1), ..., (x_n,y_n): conjunto de dados bivariado.

Representação gráfica: gráfico de dispersão (*scatter plot*). Gráfico cartesiano dos pares (x_i,y_i), i = 1,...,n.



Covariância entre x e y: medida da variação conjunta (ou concomitante ou simultânea) de x e y em relação às suas médias.

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}), \qquad -\infty<\operatorname{cov}(x,y)<\infty.$$

1. Coeficiente de correlação

Obs. (a) cov(x, y) = cov(y, x) e (b) cov(x, x) = s_x^2.

Coeficiente de correlação linear de Pearson (r):

$$\text{cor}(x,y) = r = \frac{\text{cov}(x,y)}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y},$$

sendo que s_x e s_y denotam os desvios padrão de x e y. Se $s_x = 0$ e/ou $s_y = 0$, r não está definido.

Propriedades: P1. cor(x, x) = 1. P2. $-1 \leq r \leq 1$.

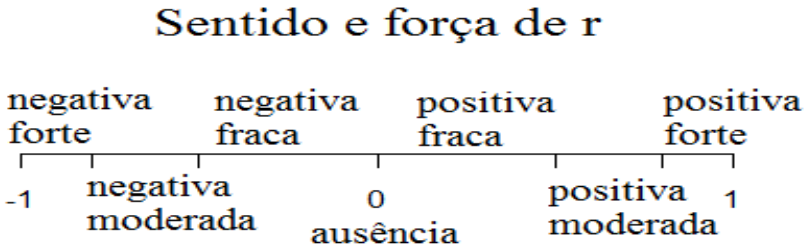
P3. r = 1 se, e somente se, a relação entre x e y for linear (y = a + bx) e b > 0.

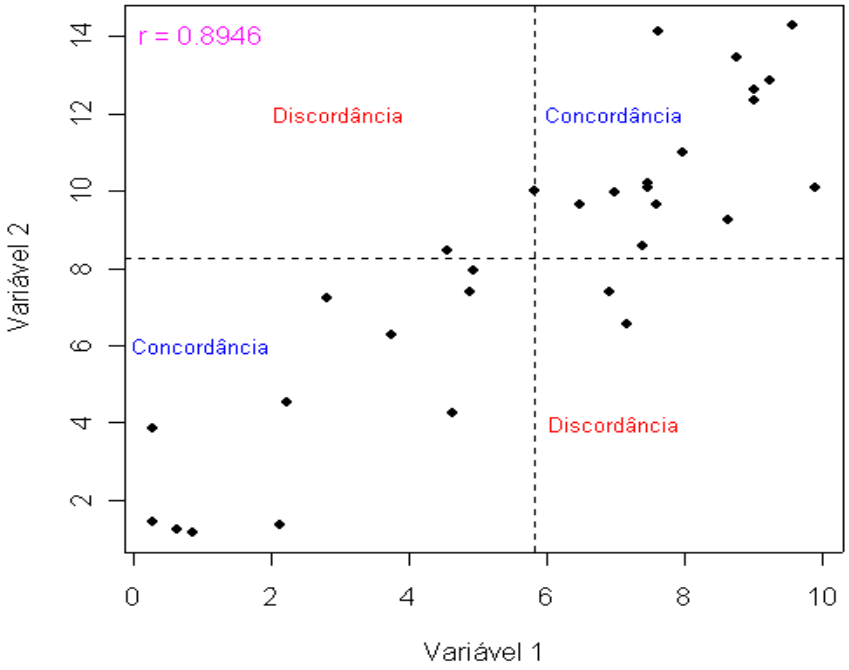
P4. r = – 1 se, e somente se, a relação entre x e y for linear (y = a + bx) e b < 0.

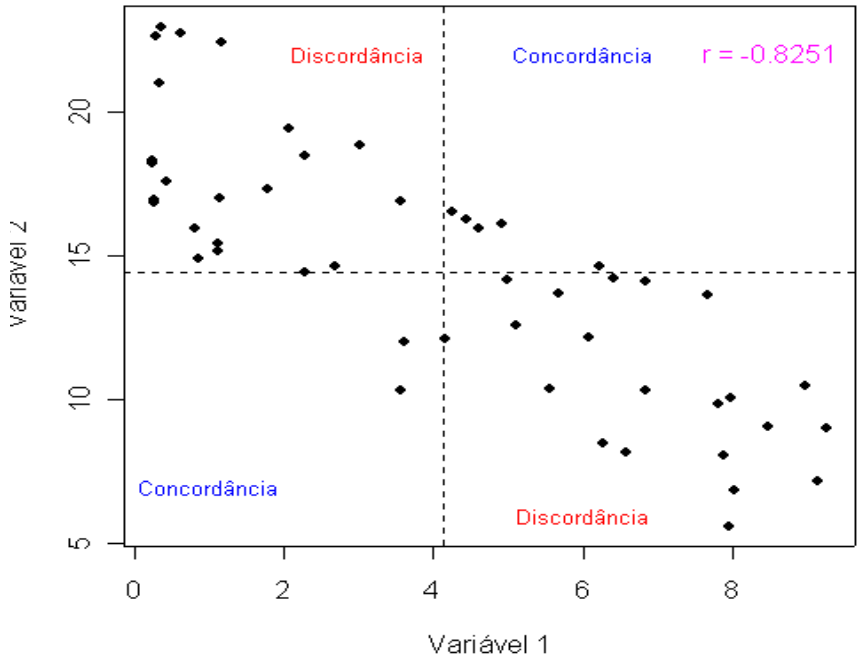
P5. Invariância. Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, então cor(x,y) = cor($a_1 + b_1x$, $a_2 + b_2y$), em que a_1 e a_2 são reais quaisquer.

Exercício. Se $b_1 < 0$ e $b_2 > 0$ ou $b_1 > 0$ e $b_2 < 0$ ou $b_1 < 0$ e $b_2 < 0$, o que se pode afirmar sobre cor($a_1 + b_1x$, $a_2 + b_2y$)?

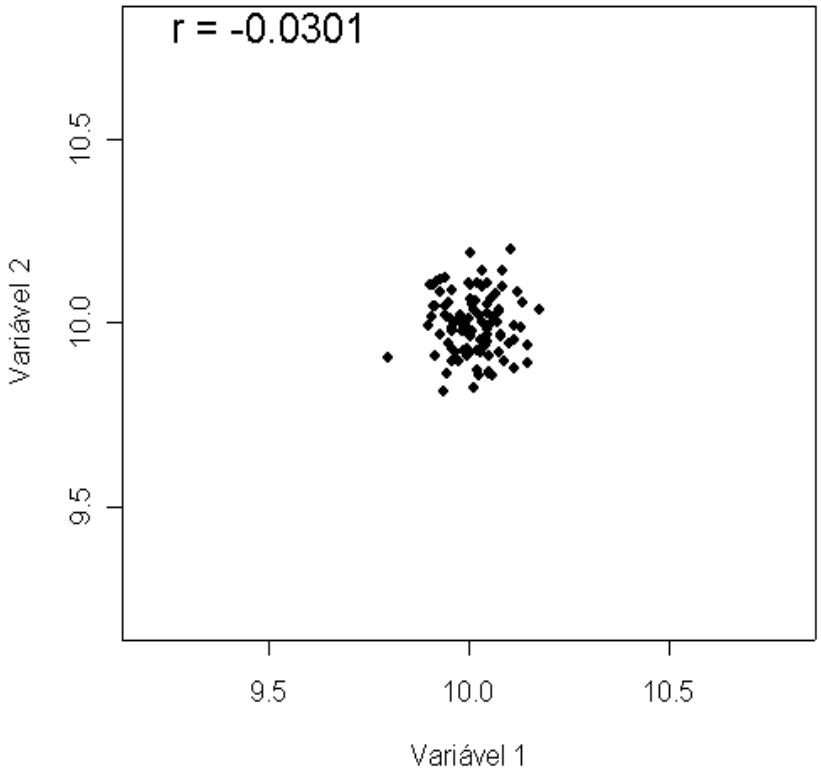
1. Coeficiente de correlação

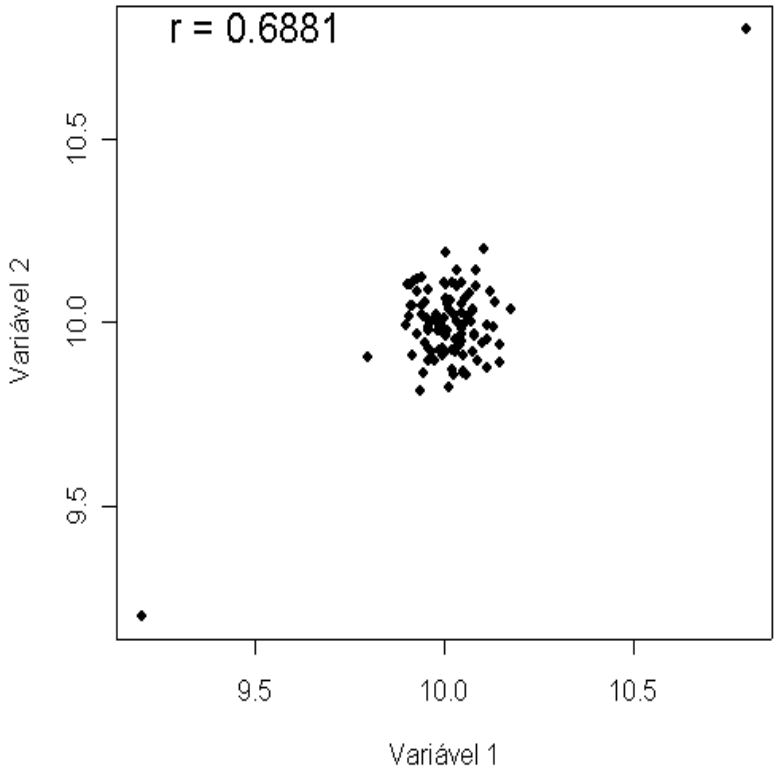




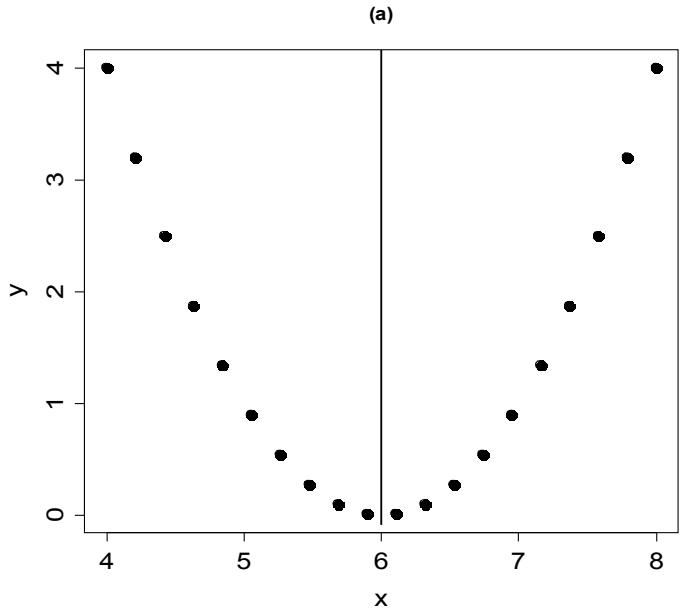


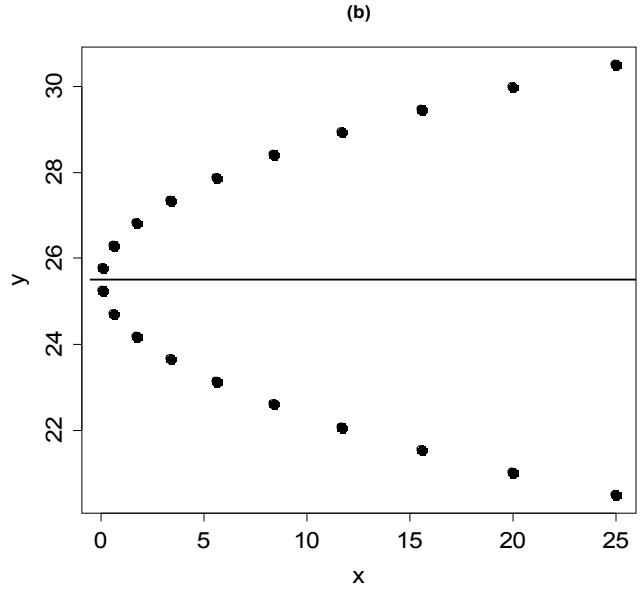
1. Coeficiente de correlação

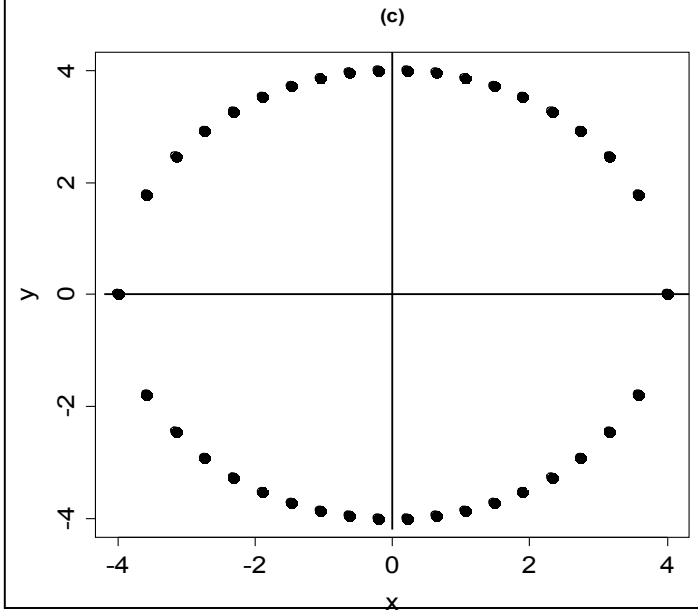


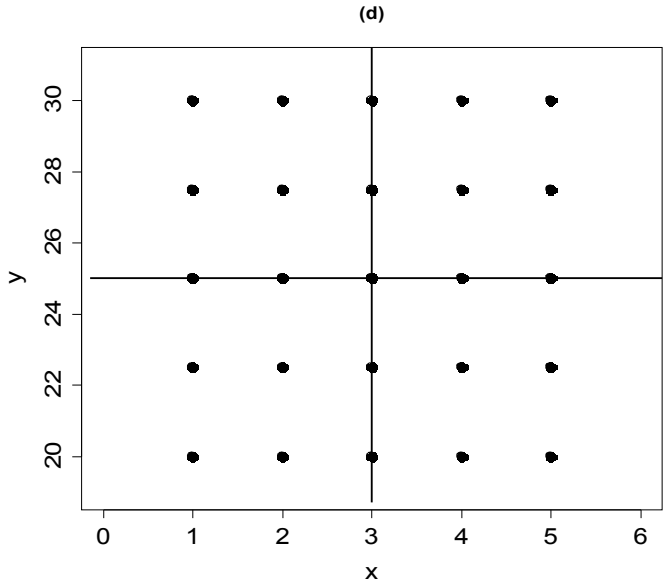


1. Coeficiente de correlação





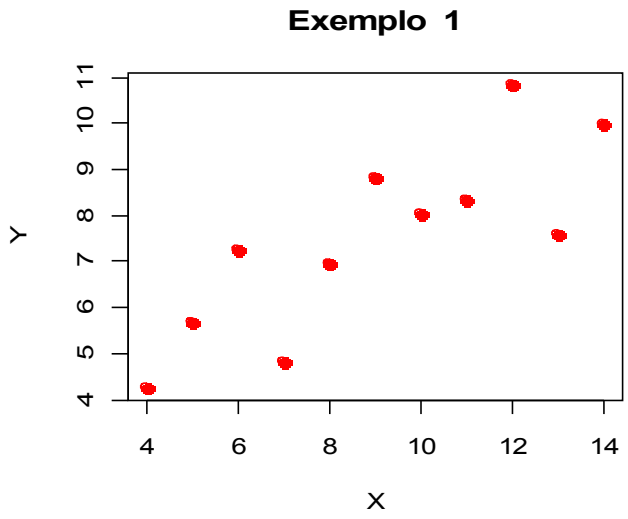


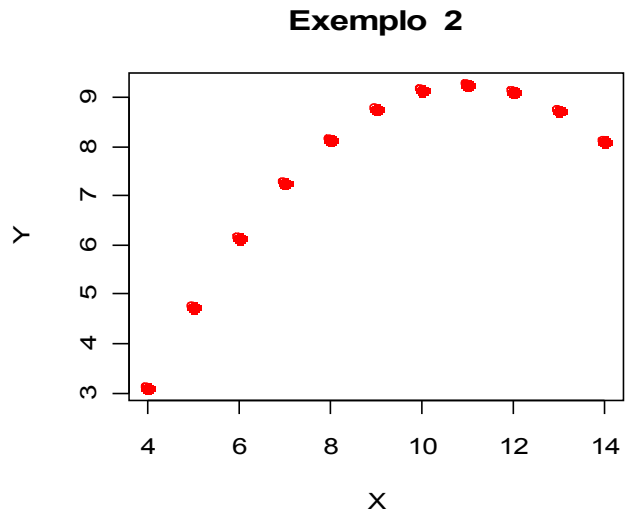


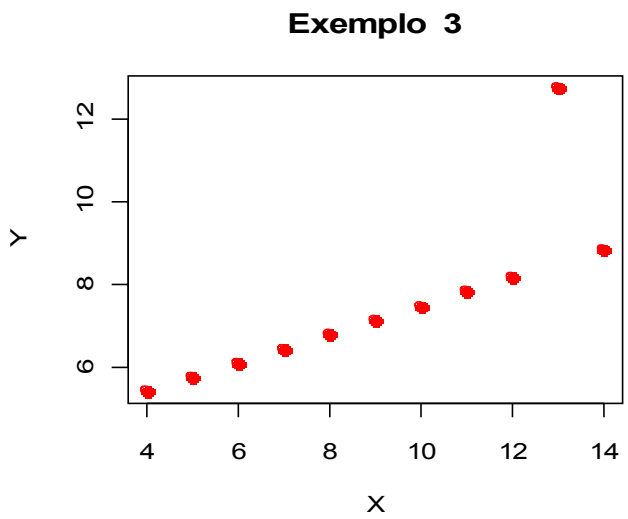
Exercício. Prove que se houver simetria em x e/ou y, então r = 0.

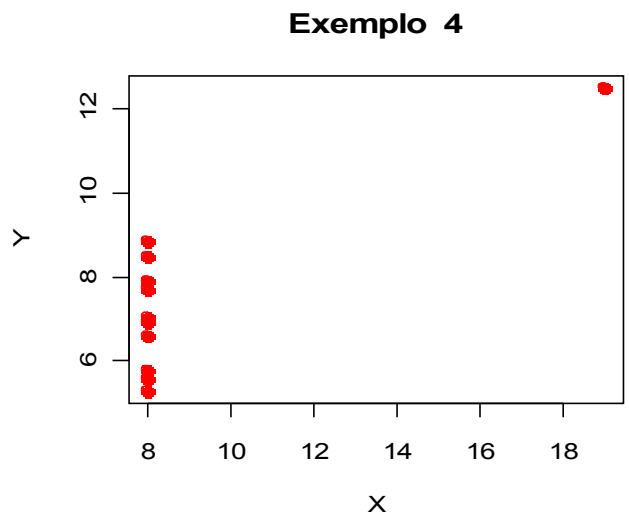
Obs. r = 0 não significa ausência de associação.

1. Coeficiente de correlação









Dados anscombe em R

```
> ?anscombe
```

Valores de r:

Exemplo 1: 0,8164

Exemplo 2: 0,8162

Exemplo 3: 0,8163

Exemplo 4: 0,8165

Veja também http://www.jerrydallal.com/LHSP/corr.htm

1. Coeficiente de correlação

Funções em R: `cor`, `cov` e `cov2cor`.

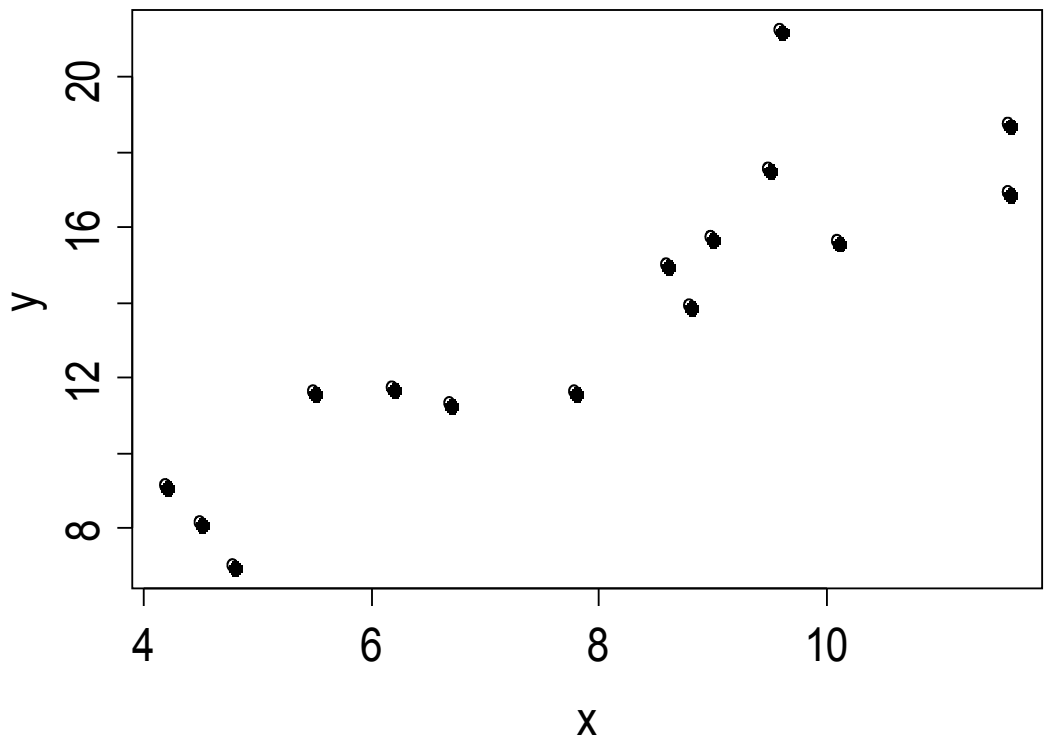
```
> x = c(5.5,6.7,9.5,4.2,9.0,11.6,4.5,9.6,6.2,11.6,8.8,8.6,7.8,4.8,
10.1)

> y = c(11.6,11.3,17.5,9.1,15.7,16.9,8.1,21.2,11.7,18.7,13.9,15.0,
11.6,7.0, 15.6)
```

```
> length(x)
[1] 15
```

```
> cor(x, y)
[1] 0.8908723
```

```
> plot(x, y, pch = 20)
```



1. Coeficiente de correlação

```
> ? USArrests

Description

This data set contains statistics, in arrests per 100,000 residents
for assault, murder, and rape in each of the 50 US states in 1973.
Also given is the percent of the population living in urban areas.
```

Número de prisões por assalto, homicídio e estupro por 100000 hab. e proporção da população urbana.

```
> names(USArrests)

[1] "Murder"   "Assault"  "UrbanPop" "Rape"

 > rownames(USArrests)

 [1] "Alabama" "Alaska" "Arizona” "Arkansas‟ "California‟ etc
 [50] "Wyoming"
```

```
> class(USArrests)

[1] "data.frame"
```

Classe “folha de dados”.

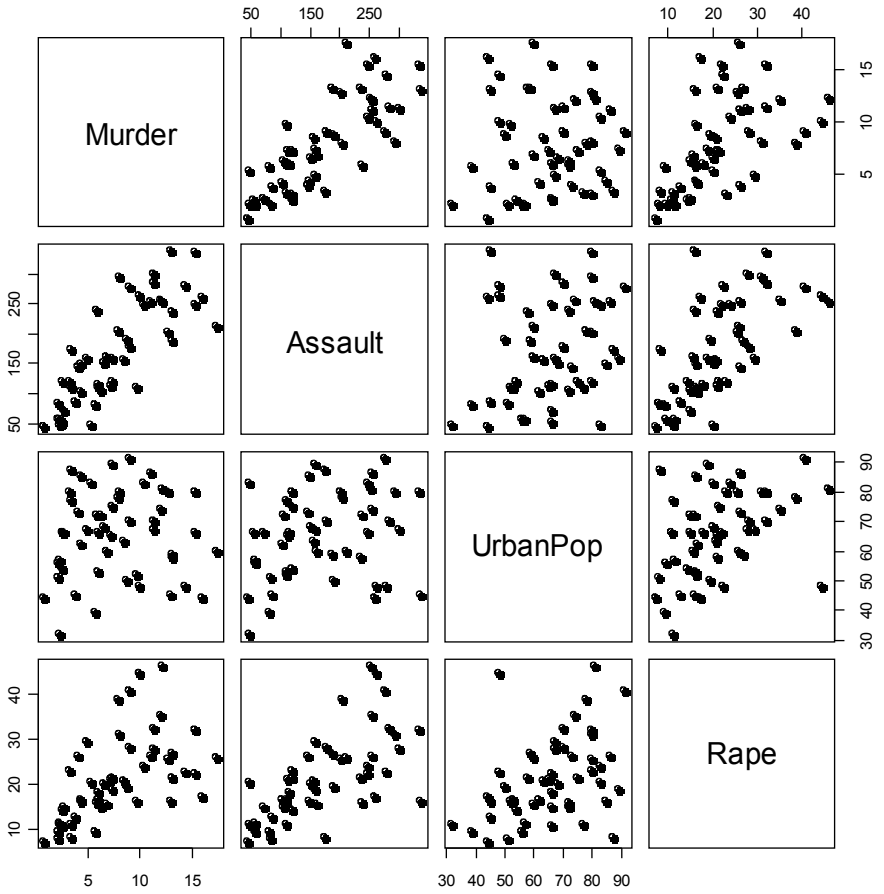
```
> summary(USArrests)

 Murder          Assault         UrbanPop          Rape
 Min.   : 0.800   Min.   : 45.0   Min.   :32.00   Min.   : 7.30
 1st Qu.: 4.075   1st Qu.:109.0   1st Qu.:54.50   1st Qu.:15.07
 Median : 7.250   Median :159.0   Median :66.00   Median :20.10
 Mean   : 7.788   Mean   :170.8   Mean   :65.54   Mean   :21.23
 3rd Qu.:11.250   3rd Qu.:249.0   3rd Qu.:77.75   3rd Qu.:26.18
 Max.   :17.400   Max.   :337.0   Max.   :91.00   Max.   :46.00
```

1. Coeficiente de correlação

Gráficos de dispersão: função `pairs`.

```
> pairs(USArrests, pch = 20)
```

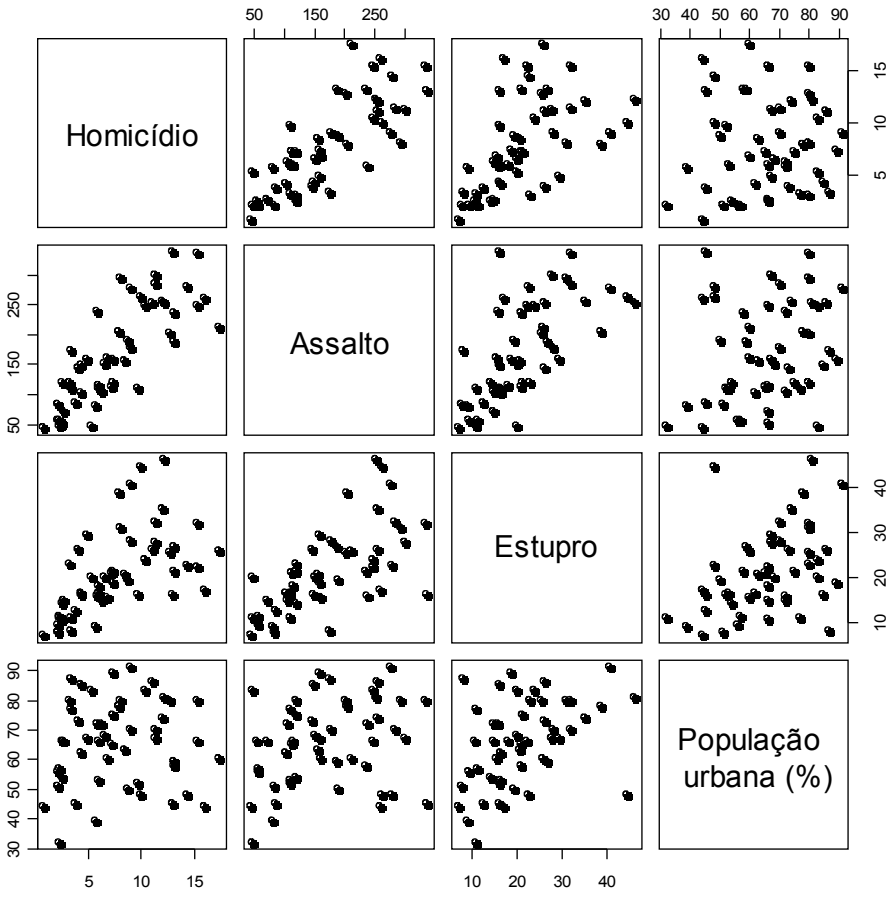


Matriz de gráficos de dispersão (*scatter plot matrix*).

```
> ordem = c("Murder", "Assault",
"Rape", "UrbanPop")

> nomes = c("Homicídio", "Assalto",
"Estupro", "População \n urbana (%)")

> pairs(USArrests[, ordem], pch = 20,
labels = nomes)
```



1. Coeficiente de correlação

Matriz de covariâncias:

```
> cov(USArrests[, ordem])
             Murder   Assault      Rape   UrbanPop
Murder    18.970465  291.0624  22.99141   4.386204
Assault  291.062367 6945.1657 519.26906 312.275102
Rape      22.991412  519.2691  87.72916  55.768082
UrbanPop   4.386204  312.2751  55.76808 209.518776
```

Obs. É uma matriz simétrica com as variâncias na diagonal principal.

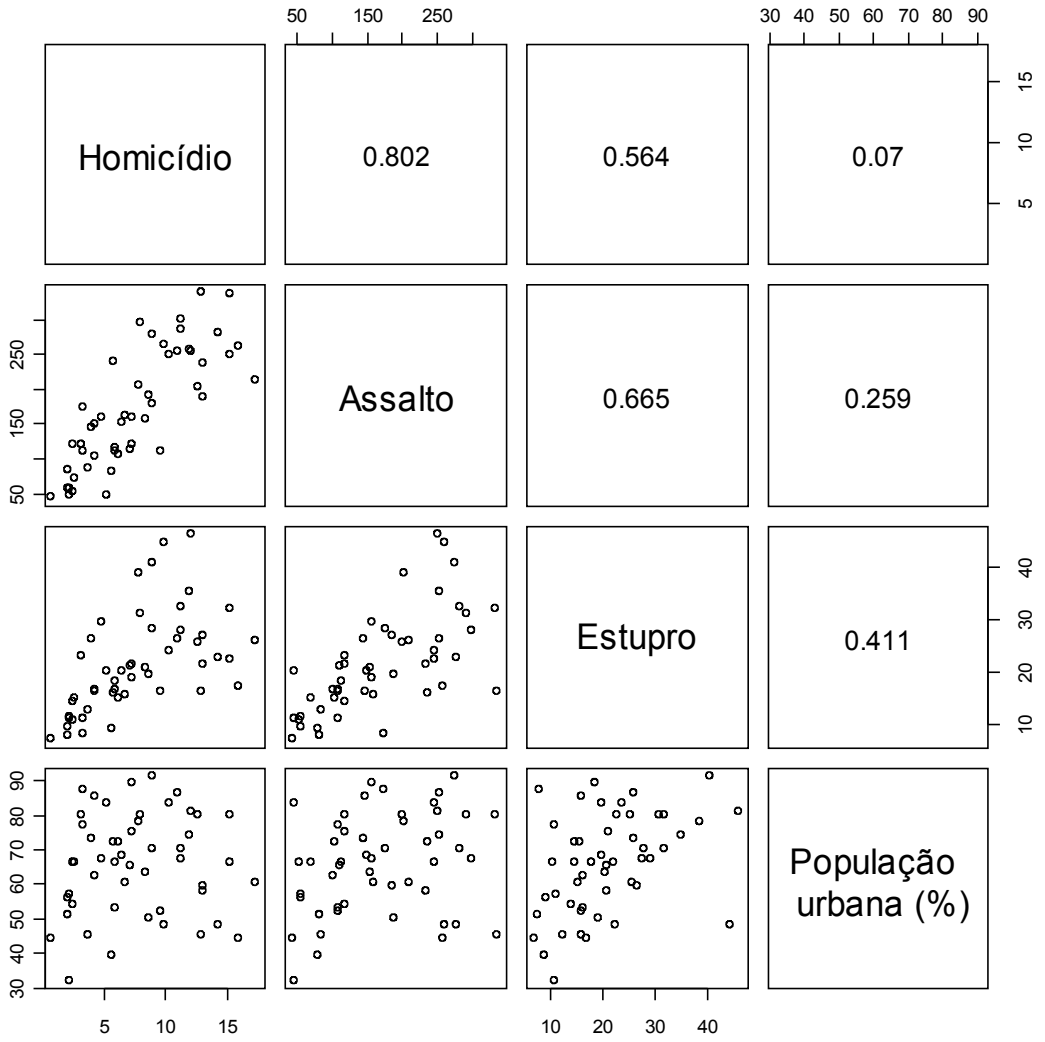
Matriz de correlações:

```
> cor(USArrests[, ordem])
             Murder   Assault      Rape   UrbanPop
Murder   1.00000000 0.8018733 0.5635788 0.06957262
Assault  0.80187331 1.0000000 0.6652412 0.25887170
Rape     0.56357883 0.6652412 1.0000000 0.41134124
UrbanPop 0.06957262 0.2588717 0.4113412 1.00000000
```

Obs. A função `cov2cor` transforma uma matriz de covariâncias em uma matriz de correlações.

1. Coeficiente de correlação

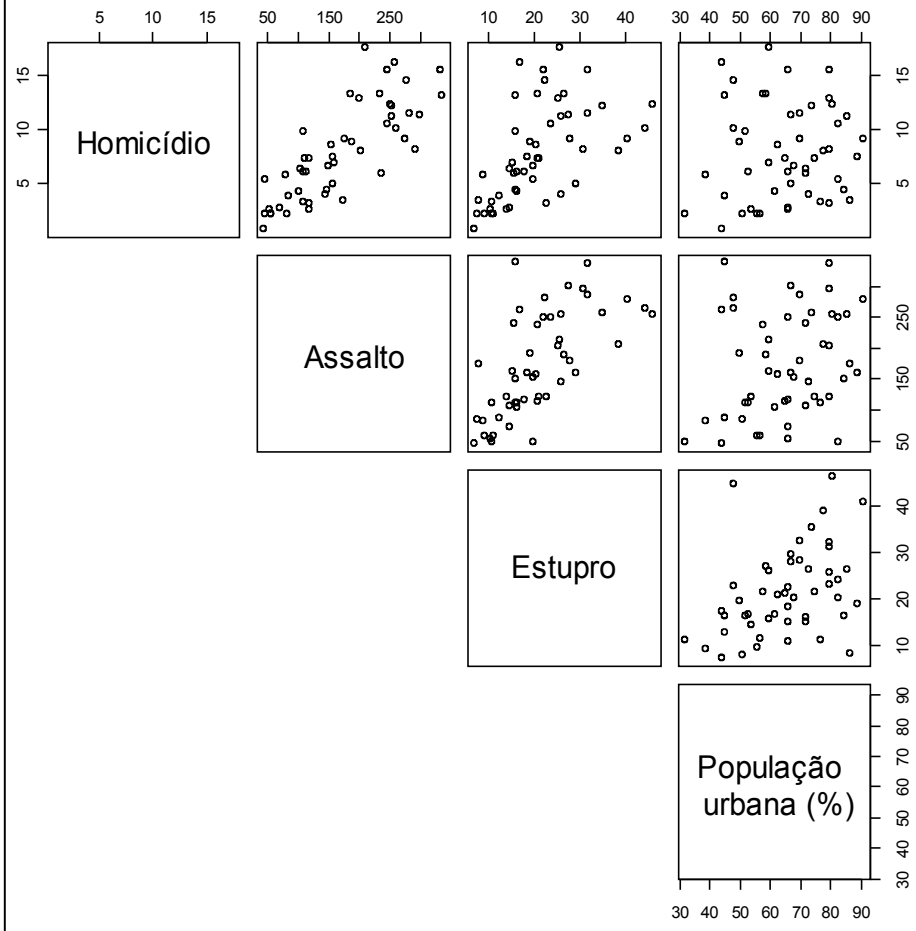
```
> panel.cor = function(x, y,
digits = 3)
{
    usr = par("usr")
    on.exit(par(usr))
    par(usr = c(0, 1, 0, 1))
    r = cor(x, y)
    text(0.5, 0.5, round(r,
digits), cex = 1.5)
}
> pairs(USArrests[, ordem],
 labels = nomes, upper.panel
= panel.cor)
```



1. Coeficiente de correlação

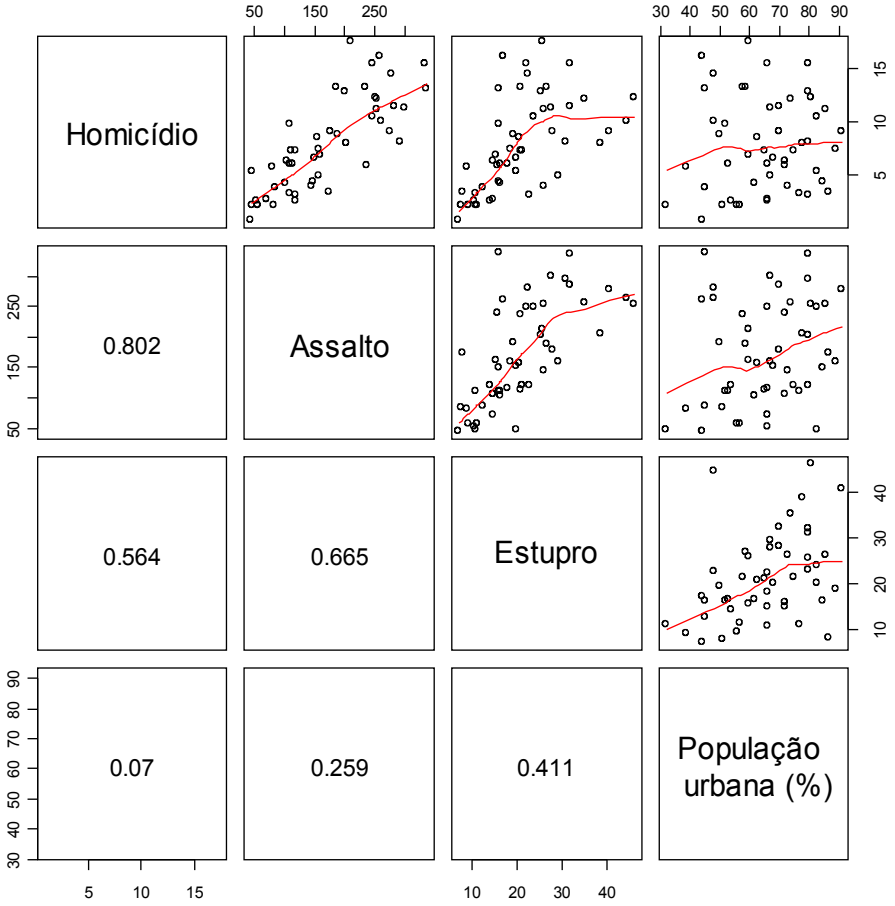
Omitindo a parte inferior da matriz:

```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, lower.panel = NULL)
```



Correlações e linhas de tendência:

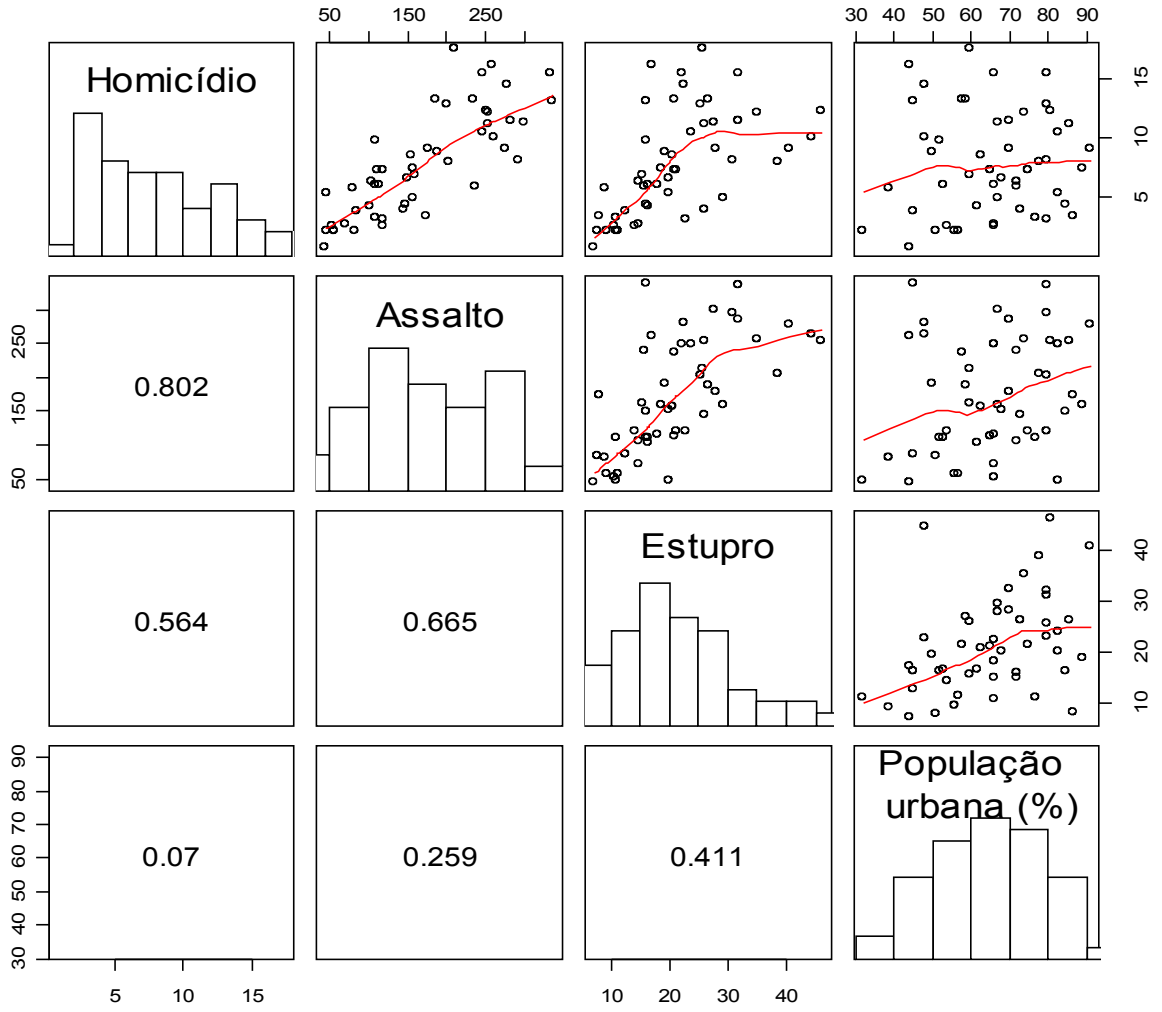
```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, upper.panel = panel.smooth, lower.panel = panel.cor)
```



1. Coeficiente de correlação

Correlações, linhas de tendência e histogramas (utilize `?pairs`):

```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, upper.panel =
panel.smooth, lower.panel = panel.cor, diag.panel = panel.hist)
```



Quais pares apresentam as correlações mais fracas e mais fortes?

O efeito de urbanização está mais associado a qual tipo de crime?

Uma grande quantidade de assaltos resultou em homicídios?

Que outras variáveis poderiam estar relacionadas à ocorrência dos crimes?

Dados: x_i, i = 1,...,n, vetores $p \times 1$ ($p \geq 2$) cujos componentes podem ser p variáveis qualitativas, p variáveis quantitativas ou de ambos os tipos.

Problema central. Existe algum tipo de relação entre as variáveis?

Utilizaremos os gráficos em grade (*trellis plots*) em R (pacote `lattice`).

Sintaxe baseada em fórmulas.

Exemplos. (1) **`var1 ~ var2 | var3 + var4 + var5`**

(2) **`~ var1 | var2 + var3`**

A barra vertical (|) indica condicionamento. O sinal "+" não é adição.

Em (1), **`var1`** é a variável dependente e **`var2`** é a variável independente.

Todas as combinações de (**`var3, var4, var5`**) são consideradas na relação **`var2`** $\rightarrow$ **`var1`**.

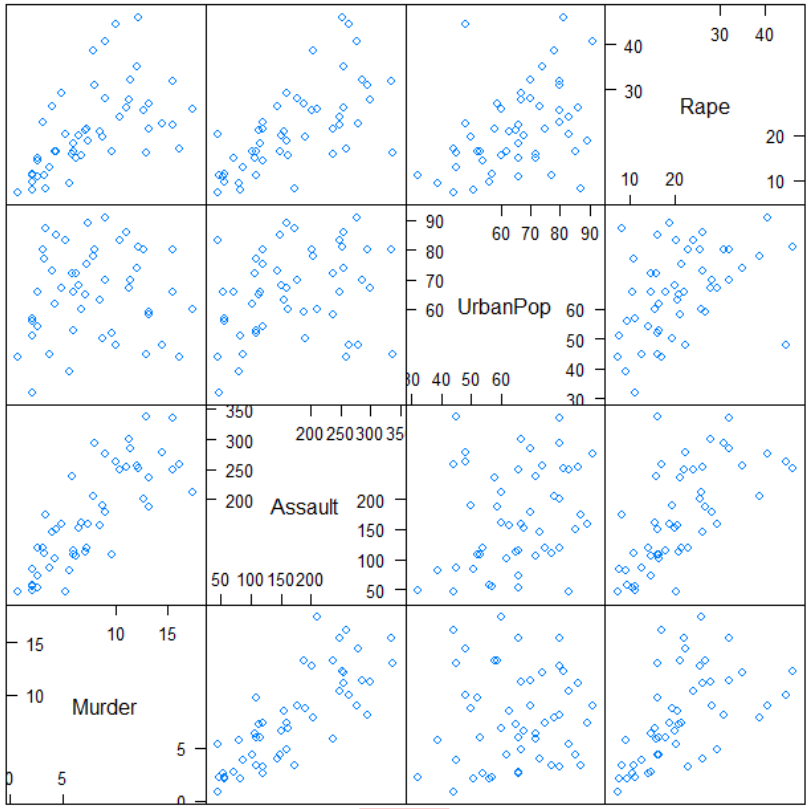
Em (2), não há variável dependente. Todas as combinações de (**`var2, var3`**) são consideradas.

2. Gráficos

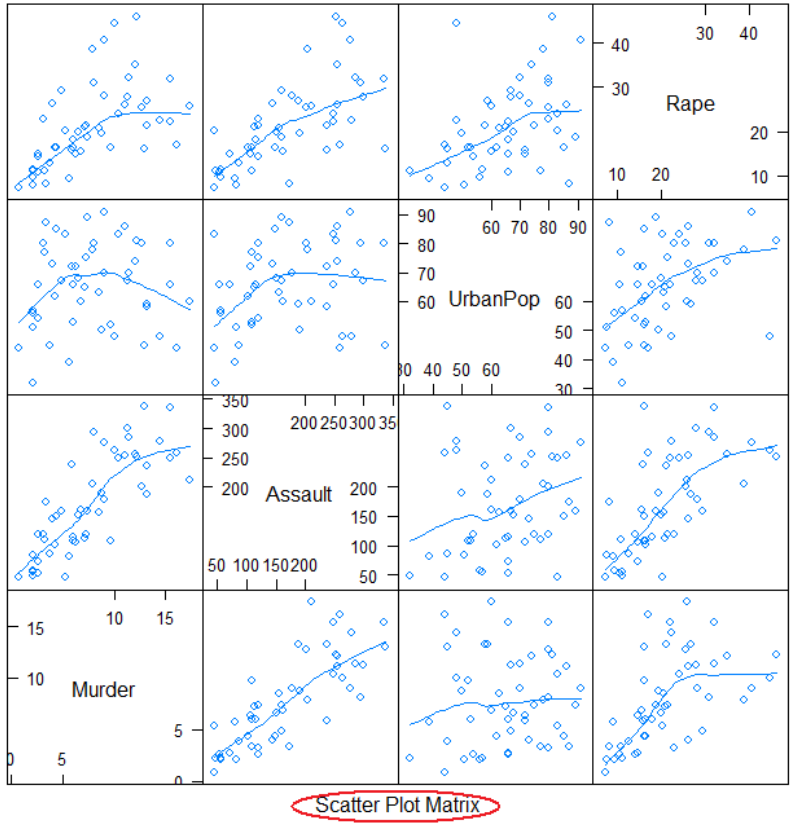
Função `splom` (`lattice`): matriz de gráficos de dispersão (scatter plot matrix).

Dados USArrests (Seção 8.1).

```
> library(lattice)
> splom(USArrests)
```



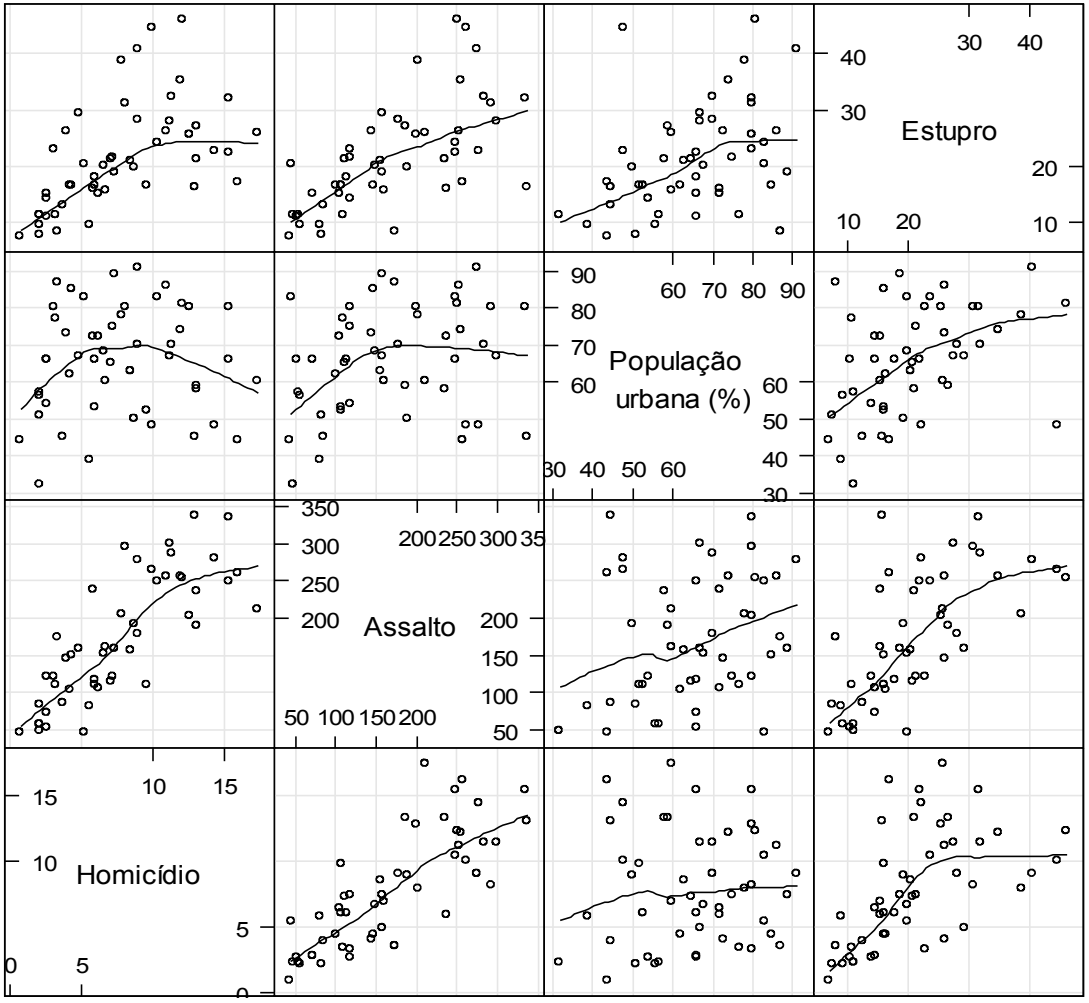

```
> splom(USArrests, type
= c("p", "smooth"))
```



Gráficos com pontos (`p`) e linhas de tendência (`smooth`).

2. Gráficos

```
> splom(USArrests, type = c("g", "p", "smooth"), col =
"black", xlab = "", varnames = c("Homicídio",
"Assalto", "População \n urbana (%)", "Estupro"))
```



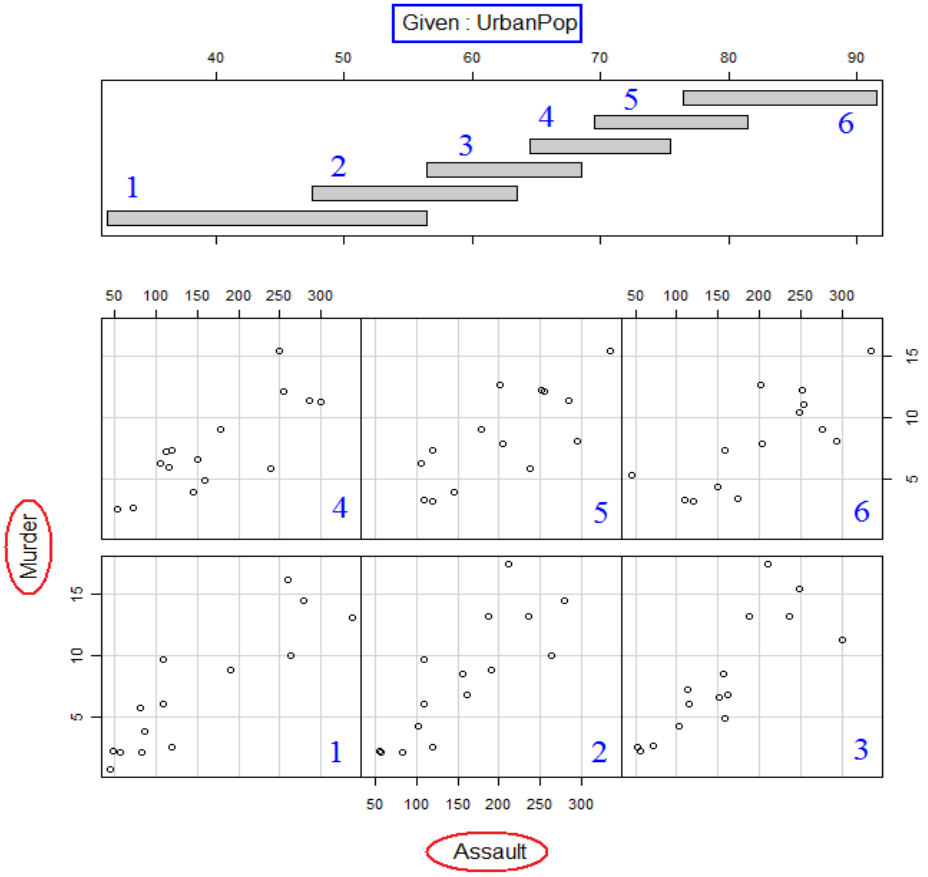
Gráficos com reticulados (`g`), pontos (`p`) e linhas de tendência (`smooth`).

2. Gráficos

Gráficos condicionais (*conditional plots*): gráfico de dispersão de (x_1, x_2) para faixas de valores de outras variáveis quantitativas.

Funções `coplot` (`graphics`) e `xyplot` (`lattice`).

```
> attach(USArrests)
> coplot(Murder ~ Assault | UrbanPop)
```



Por *default*, são criadas seis faixas com aproximadamente o mesmo número de observações da variável condicionante e com superposição (*overlap*) de 50% (estes argumentos podem ser mudados).

Os painéis são dispostos a partir do canto inferior esquerdo.

Permite avaliar se a relação entre x_1 e x_2 depende de valores de outra(s) variável(is).

2. Gráficos

Duas variáveis condicionantes:

`UrbanPop` e `Rape`.

Número de intervalos (faixas) é diferente para cada variável condicionante.

```
> coplot(Murder ~ Assault
UrbanPop * Rape, number =
c(2, 3), pch = 20, cex =
1.5, panel = panel.smooth)
```