Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Ciências de Computação

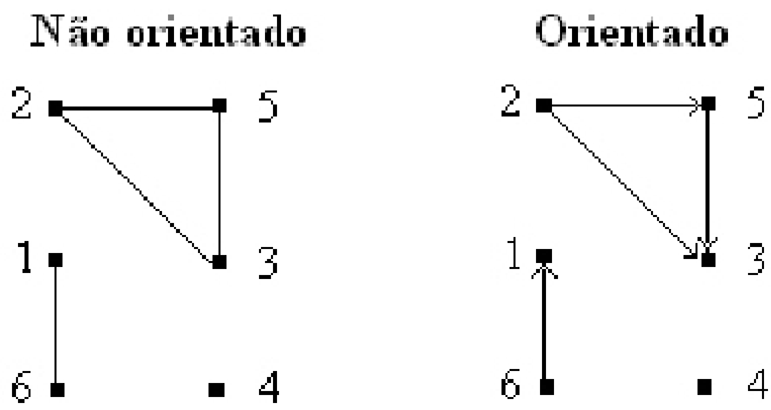
SCE-183 – Algoritmos e Estruturas de dados II

Profa. Dra. Maria Cristina F. de Oliveira
Estagiário PAE: André Pimenta Freire

Lista de Exercícios I – Conceitos sobre Grafos

1) Desenhe as versões não-orientada e orientada do grafo G = (V, E) que tem V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e E = {(2, 5), (6, 1), (5, 3), (2, 3)}

2) Defina os grafos ilustrados na Figura a seguir, ou seja, G = (V, E).



3) Desenhe o grafo completo com cinco arestas (K_5)

4) Dê um exemplo de um grafo em que cada vértice é adjacente a dois outros vértices e cada aresta é adjacente a duas outras arestas.

5) Um grafo completo com *n* vértices tem quantas arestas? E um grafo orientado completo com *n* vértices?

6) Dê um exemplo de um grafo em que cada vértice é adjacente a dois outros vértices e cada aresta é adjacente a duas outras arestas.

7) Um grafo com 3 vértices de grau 3 e um vértice de grau 5 tem quantas arestas?

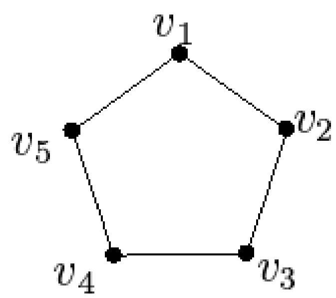
8) Qual o maior número possível de vértices em um grafo com 35 arestas, sabendo que cada vértice tem grau pelo menos 3?
Observar que a soma dos graus dos vértices é igual a duas vezes o número de arestas. Assim, se cada aresta liga dois vértices teríamos 70 vértices de grau 1. Se cada vértice tem pelo menos grau 3 então...

9) Em um grafo com *n* vértices e *m* arestas, qual a soma dos graus de todos os vértices?
Não orientado: Cada aresta conta 1 grau em cada vértice em que incide e cada aresta incide somente sobre dois vértices, logo a soma dos graus dos vértices é duas vezes o número de arestas.
Orientado: Cada aresta conta 1 grau em cada vértice em que incide e cada aresta incide somente sobre um vértice, logo a soma dos graus dos vértices é o número de arestas.

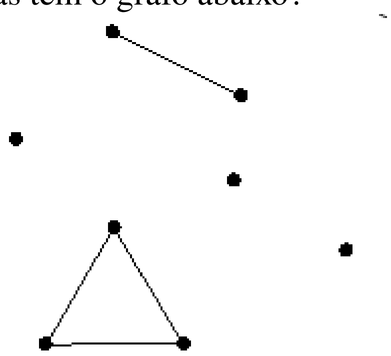
10) Uma árvore com 14 vértices tem quantas arestas? E uma árvore com *n* vértices?
Observe que para árvores a resposta geral é $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

11) A altura de uma árvore enraizada é o tamanho do maior caminho da raiz a uma folha. Quais as alturas possíveis para uma árvore de 5 vértices? Se cada nó interno de uma árvore *T* com *n* folhas tem dois filhos, com exceção de alguns nós de altura *h -1*, qual a altura *h* de *T*? E se cada folha tem *k* filhos?

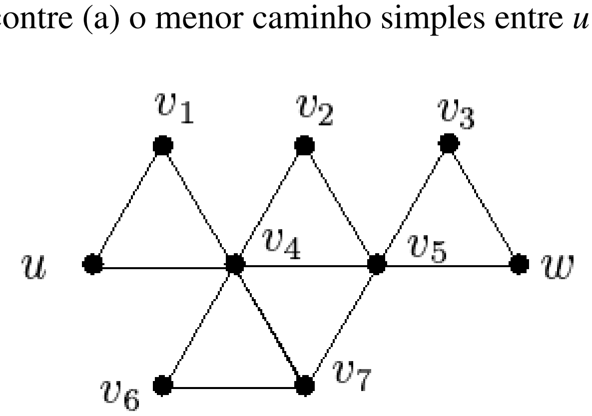
12) Encontre o complemento do grafo a seguir:



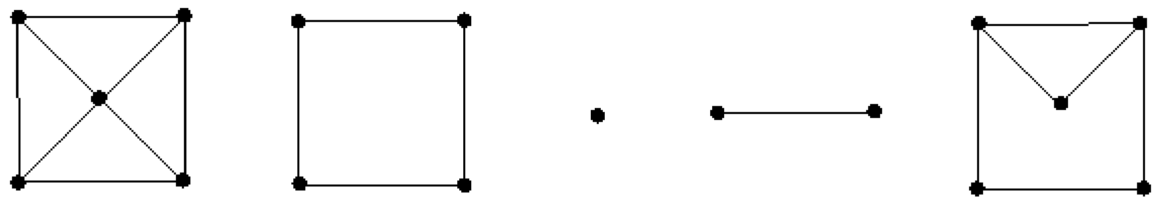
13) Quantas componentes conexas tem o grafo abaixo?



14) No grafo abaixo, encontre (a) o menor caminho simples entre *u* e *w* e (b) o maior ciclo simples entre *u* e w.



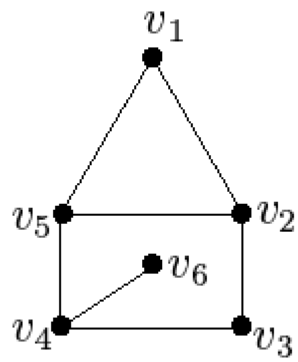
15) Dados os grafos abaixo, indique todos os pares *x* e *y* tais que:



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

- G_x é um subgrafo de G_y.
- G_x é subgrafo gerador de G_y.
- G_x é subgrafo induzido de G_y.
- G_x não é subgrafo de G_y.

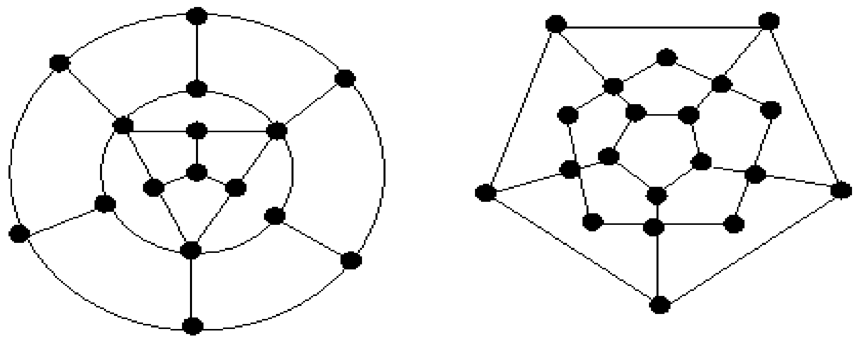
16) Represente o grafo abaixo usando matriz de adjacências e lista de adjacências.



17) Mostre como linearizar a lista de adjacências de um grafo em um vetor. Em que situação essa estrutura é útil?

18) O grafo da Questão 12 é euleriano? É hamiltoniano?

19) Mostre que nenhum dos dois grafos da figura a seguir contém um caminho Hamiltoniano (e, portanto, nenhum ciclo Hamiltoniano).
Dicas: Para a figura a, note que somente duas das arestas incidentes a qualquer vértice podem fazer parte do ciclo Hamiltoniano, e considere o total de arestas excluídas. Você vai ver que, no total, 13 arestas devem ser excluídas. O que sobra não é suficiente para formar um caminho Hamiltoniano. Na figura b, considere primeiro os vértices de grau 2.



(a) (b)

20) Desenhe um grafo no qual um caminho Euleriano é também um ciclo Hamiltoniano. O que podemos concluir sobre esse tipo de grafo?

21) Seja G um grafo conexo. Mostre que se G contém exatamente 2n vértices de grau ímpar, onde $n \geq 2$, G contém no mínimo n caminhos disjuntos (isto é, que não compartilham nenhuma aresta), onde cada um une dois vértices de grau ímpar.

22) Desenhe um grafo de 8 vértices

1. Que contém um circuito euleriano, mas não contém nenhum ciclo hamiltoniano.
2. Que contém um caminho hamiltoniano, mas não contém nenhum caminho euleriano.
3. Que contém um caminho hamiltoniano e um caminho euleriano.
4. Que não contém um caminho hamiltoniano nem um caminho euleriano.

23) Seja u e v dois vértices não adjacentes de um grafo simples de n vértices tal que d(u) + d(v) $\geq n$. Seja G+uv o grafo obtido acrescentando uma aresta entre u e v. Mostre que G é hamiltoniano se e somente se G+uv é hamiltoniano.