$12^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - 09/06/2011

Em construção

1. Um problema do calor um pouco diferente daquele que estudamos na aula mas que também pode ser tratado pelo método de separação de variáveis é obtido quando as extremidades da barra estão isoladas (condição de Neumann). Siga os passos a seguir para enuncie um teorema de existência de solução e exibir uma fórmula da solução do problema do calor com condição de Neumann:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0, & 0 \le t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

   (a) Use o método de separação de variáveis $u(t,x) = T(t)X(x)$ para obter

$$T'' + \lambda T = 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

   (b) Verifique que $\lambda = 0$ ou $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, e que para cada $n \in N \cup \{0\}$ as respectivas soluções são

$$X_0(x) = 1, \quad T_0(t) = 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

   (c) Defina $u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = 1$ e $u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, e considere

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x).$$

   (d) Verifique que se $f \in C([0,L])$ é diferenciável, exceto um número finito de pontos, e $f' \in SC([0,L])$ então u satisfaz $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$, desde que a_n sejam os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de cossenos de f (aproveite para discutir a necessidade de estender a função f a toda reta a uma função par, contínua e periódica de período $2L$.

   (e) Verifique que

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

   onde a_n são os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de f, define uma função contínua em $[0,\infty) \times [0,L]$ que a série pode ser derivada termo a termo com respeito a t (uma vez) e a x (duas vezes) para todo $t > 0$ e $x \in [0,L]$.

   Sugestão: use o mesmo argumento que empregamos para o problema do calor estudado na aula para a condição de fronteira nula (Dirichlet).

(f) Conclua que $u(t,x)$ definida acima é a solução do problema do calor com condição de Neumann.

(g) Note que se $f(x) = k$, uma constante, então $u(x,t) = k$.

(h) Estude $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ e interprete o resultado obtido.

2. Use o exercício 1 para encontrar a solução do problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & 0 \leq t < \infty \\ u(x,0) = x^2 \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

3. (a) Determine a solução do problema:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ 0 < t < \infty \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2, & 0 \leq t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Sugestão: considere $v(x) = (1 - x/L)T_1 + (x/L)T_2$ *e defina* $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$.

(b) Determine $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$. Dê uma interpretação do valor encontrado.

4. Encontre a solução do problema da corda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = x(L-x),\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

5. Encontre a solução do problema da corda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$