2. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

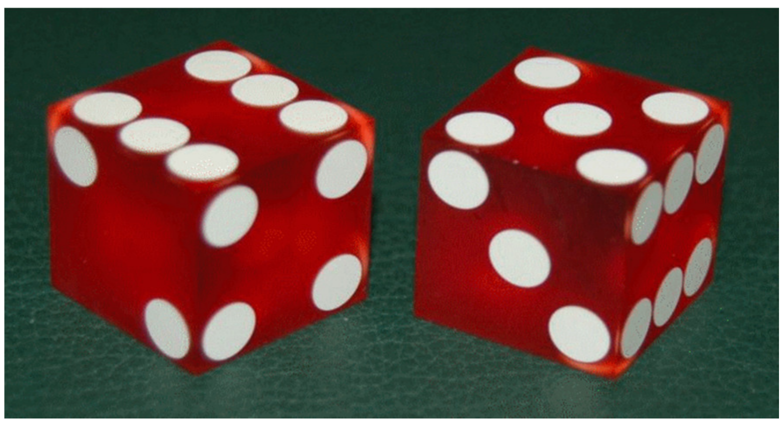
2012

Conceitos básicos

Experimento aleatório ou fenômeno aleatório

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Um experimento ou fenômemo que, se for observado em condições idênticas, pode apresentar diferentes resultados é chamado de experimento ou fenômeno aleatório.



Conceitos básicos

Exemplos

- Condições climáticas do próximo domingo.
- Taxa de inflação do próximo mês.
- Condição de um item produzido.
- Resultado do lançamento de um dado.
- Tempo de duração de uma lâmpada.
- Observação do número de veículos que passam por um praça de pedágio durante um certo intervalo.
- Tábua de Galton:

  http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html

  http://www.jcu.edu/math/isep/Quincunx/Quincunx.html

Conceitos básicos

Espaço amostral (Ω)

Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos

1. Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ou Ω = {⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ }
2. Observação do tipo sanguíneo de um indivíduo: $\Omega = \{A, B, AB, 0\}$
3. Condição de um item produzido: Ω = {defeituoso, não defeituoso}
4. Número de veículos que passam por uma praça de pedágio durante um certo intervalo: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
5. Tempo de duração de uma lâmpada (em h): $\Omega = (0, \infty)$

Exemplo

Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento

Subconjunto do espaço amostral Ω.

Notação: A, B, C,...

Exemplos. Eventos do exemplo acima:

A. Resultado é par: $A = \{2, 4, 6\}$ (evento composto)

B. Resultado é maior do que 3: $B = \{4, 5, 6\}$ (evento composto)

C. Resultado igual a 1: $C = \{1\}$ (evento simples)

D. Resultado maior do que 6: $D = \varnothing$ (evento impossível)

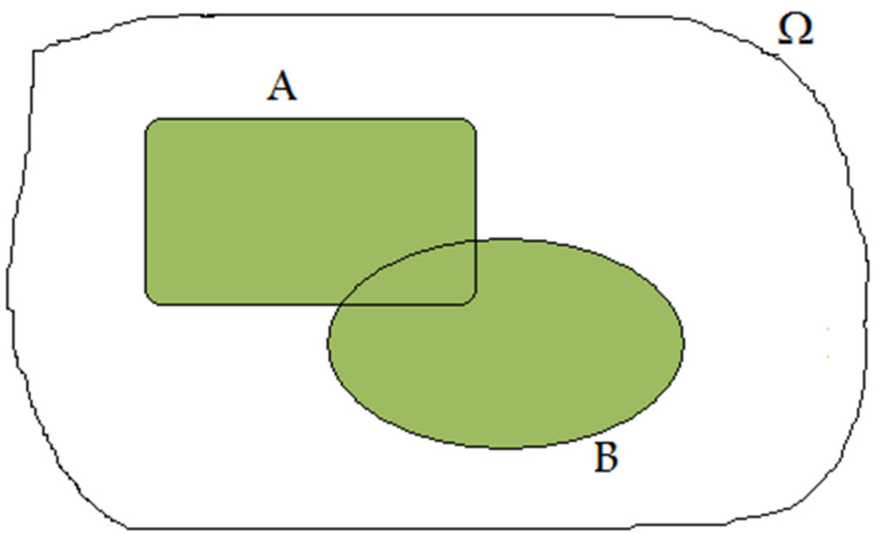
E. Resultado menor do que 7: $D = \Omega$ (evento certo)

Operações com eventos

A e B são eventos de Ω

- $A \cup B$: união dos eventos A e B

Ocorrência de pelo menos um dos eventos A e B.

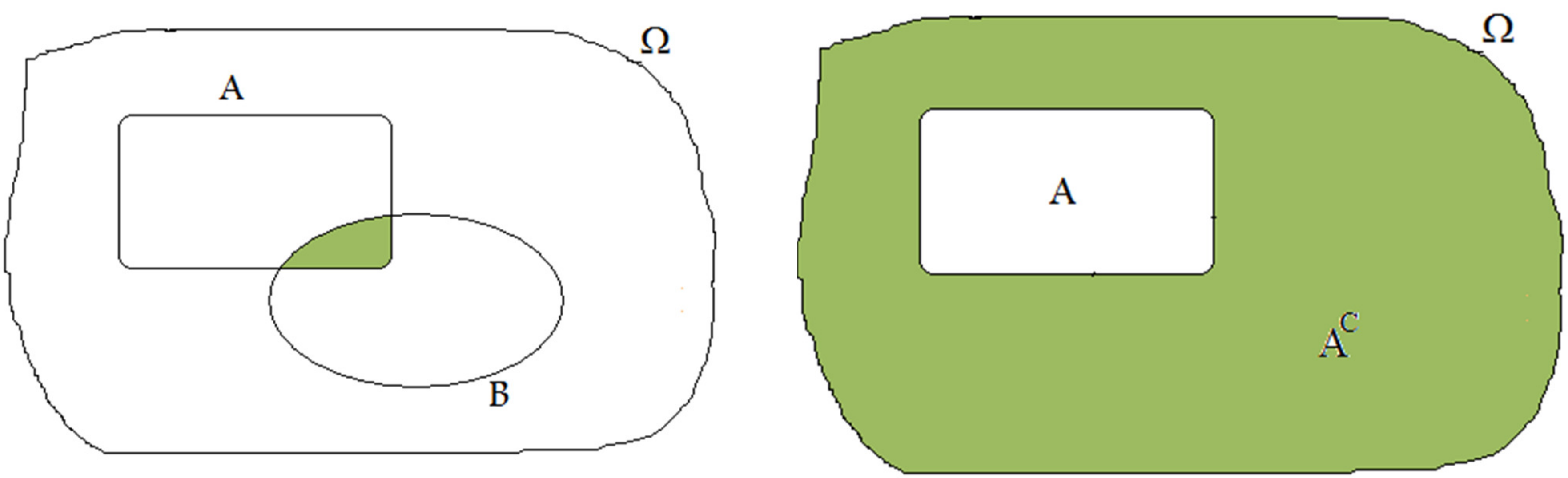


Operações com eventos

- A ∩ B: intersecção dos eventos A e B

Ocorrência simultânea dos eventos A e B.

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos A ∩ B = ∅.
- A e B são complementares se A ∩ B = ∅ e A ∪ B = Ω.
- O complementar de um evento A é representado por A^C *ou* $\overline{A}$



Definições de probabilidade

Probabilidade clássica ou *a priori*

Se um experimento aleatório tiver n(Ω) resultados mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e, se um evento A tiver n(A) desses resultados, a probabilidade do evento A, representada por P(A), é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo. Lançamento de dois dados balanceados. Calcular a probabilidade de

a) se obter soma das faces igual a 7,

b) se obter soma maior do que 5,

c) que o resultado do primeiro dado seja maior do que o resultado do segundo.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

a) A = {(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(6,1)}

$\Rightarrow$ P(A) = n(A) / n(Ω) = 6 /36=1/6

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{matrix} \right\}$$

B

b) P(B) = 26/36.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

C

c) P(C) = 15/36.

Definições de probabilidade

Probabilidade frequentista ou *a posteriori*

Um experimento é realizado n vezes (n "grande"). O evento A ocorre exatamente n(A) vezes ($0 \leq n(A) \leq n$) . A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é

$$f_r(A) = \frac{n(A)}{n}$$

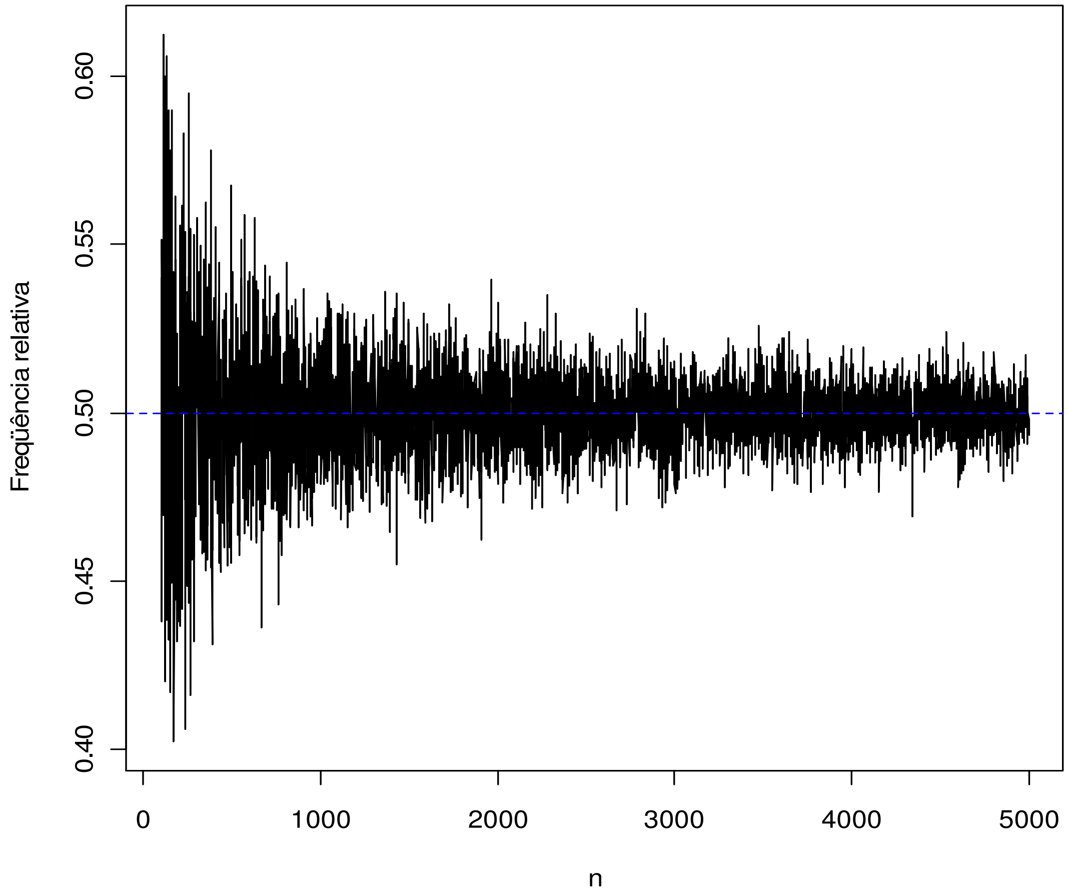
Quando $n \rightarrow \infty$, $f_r(A)$ se aproxima de P(A).

Exemplo. Lançamento de uma moeda balanceada. Calcular a probabilidade de A = {resultado obtido é cara}.

	fr_1	fr_2	fr_3	fr_4	...	P(A)
Cara	2/5	6/10	22/50	47/100	...	0,5
n	5	10	50	100	...	∞

Um exemplo em R

```
> p0 = 1/2 # Moeda balanceada
> n = 100:5000
> fr = mapply(function(x) sum(rbinom(x,1,p0))/x, n)
> plot(n, fr, ylab="Freqüência relativa", type = "l")
> abline(h = p0, lty=2, col="blue")
```



Definições de probabilidade

Definição axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número P(A) satisfazendo aos seguintes axiomas:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \subset \Omega,$

(ii) $P(\Omega) = 1,$

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos, então

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\Phi) = 0.$

2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c).$

3. $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(B).$

4. $A, B \subset \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

5. $A, B, C \subset \Omega, \Rightarrow$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$