**$1^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE II - SME0801**

*Professora Juliana Cobre*

## Entregar Exercício 9

**Exercício 1.** Suponha que as tabelas seguintes representem a distribuição de probabilidade conjunta da variável aleatória discreta $(X, Y)$. Calcule todas as distribuições marginais e condicionais. Em qual(is) situação(ões) $X$ e $Y$ são independentes? Por quê?

| | $X$ | | |
|---|---|---|---|
| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
| 1 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 3 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{15}$ |

| | $X$ | | |
|---|---|---|---|
| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 3 | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 |

**Exercício 2.** Suponha que a variável aleatória bidimensional $(X, Y)$ tenha a fdp conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x-y), \ 0 < x < 2, \ -x < y < x, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

**(a)** Calcule a constante $k$.
**(b)** Ache a fdp marginal de $X$.
**(c)** Ache a fdp marginal de $Y$.

**Exercício 3.** Suponha que a fdp conjunta da variável aleatória bidimensional $(X, Y)$ seja dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 2, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule:
**(a)** $P(X > \frac{1}{2})$ **(b)** $P(Y < X)$ **(c)** $P(Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$

**Exercício 4.** Suponha que duas cartas sejam tiradas ao acaso de um baralho de cartas. Seja $X$ o número de ases obtido e seja $Y$ o número de damas obtido.
**(a)** Estabeleça a distribuição de probabilidade conjunta de $(X, Y)$.
**(b)** Estabeleça a distribuição marginal de $X$ e a de $Y$.
**(c)** Estabeleça a distribuição condicionada de $X$ (dado $Y$) e a de $Y$ (dado $X$).

**Exercício 5.** Para que valor de $k$, a expressão $f(x,y) = k\mathrm{e}^{-(x+y)}$ é a fdp conjunta de $(X, Y)$, sobre a região $0 < x < 1, 0 < y < 1$?
**(a)** Calcule a constante $k$.
**(b)** Ache a fdp marginal de $X$.
**(c)** Ache a fdp marginal de $Y$.

**Exercício 6.** A densidade conjunta de $X$ e $Y$ é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 \leq x < 0, \ 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 1, \ -2 \leq y < 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**(a)** Calcule as marginais e verifique se $X$ e $Y$ são independentes.
**(b)** Determine a função de distribuição conjunta entre $X$ e $Y$.
**(c)** Obtenha a função de distribuição condicionada de $Y$ dado $X$.

**Exercício 7.** Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso, e sem reposição. Seja $X$ o número da primeira bola tirada e $Y$ o número da segunda.
**(a)** Descreva a distribuição conjunta de $X$ e $Y$.
**(b)** Calcule $P(X < Y)$.

**Exercício 8.** **(a)** Demonstre que a função

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x-y}, & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

não é uma função de distribuição de um vetor aleatório.
**(b)** Mostre que a seguinte função é função de distribuição de algum $(X, Y)$:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-x})(1 - \mathrm{e}^{-y}), & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Exercício 9.** Um milionário excêntrico, uma vez por semana, deixa seu escritório com $X$ milhares de reais no bolso. Ao caminhar para sua cassa vai distribuindo esse dinheiro aos eventuais pedintes que encontra. Admita que $X$ tem densidade de probabilidade $f(x) = \frac{x}{8} I_{(0,4)}(x)$ e, também que o dinheiro que lhe resta ao chegar em casa, denotado por $Y$, tem probabilidade uniforme entre zero e o dinheiro com que deixou o escritório.
**(a)** Calcule a densidade conjunta entre $X$ e $Y$.
**(b)** Determine a densidade marginal de $Y$.