ICMC- USP - Departamento de Matemática
1^a Avaliação da disciplina SMA 304 Álgebra Linear
Professor: Sérgio Monari

Nome: ______________________________
Número USP: ______________________________
Data: 03.10.13

Questão	Nota	Valor
1.^{a}		3.0
2.^{a}		2.5
3.^{a}		2.0
4.^{a}		2.5
Total		10.0

1. Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta (isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra-exemplo se for falsa).

   (a) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V então $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V.

   (b) Sejam W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V então $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

   (c) O vetor $w = (1, -1, 2)$ pertence ao subespaço vetorial gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.

   (d) Se $S \subset T$ então $[S] \subset [T]$.

   (e) $[S] \subset [T]$ então $S \subset T$.

   (f) O conjunto $U = \{f \in C^\infty(\mathbb{R});\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$, com as operações usuais de funções, é um subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Sejam $(M_{2\times2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$) e $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a + b + c - d = 0 \right\}$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

   (a) Mostre que U é um subsepaço vetorial de $(M_{2\times2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

   (b) Encontre uma base e a dimensão dos subespaços vetoriais U, W, $U \cap W$ e $U + W$ de $(M_{2\times2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

3. Sejam $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ duas retas no plano concorrentes em um ponto P. Mostre que a reta $r_3 : a''x + b''y = c''$ passa pelo ponto P se, e somente se, existem números s e t tais que

$$\begin{cases} a'' = sa + ta', \\ b'' = sb + tb', \\ c'' = sc + tc'. \end{cases}$$

4. Sejam W_1, W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial W e consideremos $V = W_1 \oplus W_2$. Mostre que se $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de W_1 e $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ é uma base de W_2, então $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ será uma base de V.

Boa Prova!

ICMC- USP - Departamento de Matemática
1^a Avaliação da disciplina SMA 304 Álgebra Linear
Professores: Sérgio Monari e Regilene Oliveira

Nome: ____

Número USP: ____

Data: 27.09.13

Questão	Nota	Valor
1.^{a}		2.5
2.^{a}		2.5
3.^{a}		2.5
4.^{a}		2.5
Total		10.0

---

1. Consideremos uma mola (que supomos sem massa) suspensa verticalmente tendo sua extremidade superior presa num suporte rígido. Fixamos um corpo de massa m na outra extremidade da mola. Suponha que este corpo seja deslocado verticalmente a partir da sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberado. O deslocamento y deste corpo, a partir da posição de equilíbrio, é dado por uma função da forma:

$$y(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   onde $\omega \in \mathbb{R}$ é uma constante que depende da mola e da massa do corpo.

   (a) Mostre que para um $\omega \in \mathbb{R}$ fixo, o conjunto V de todas as funções descritas em (1) é um espaço vetorial real.

   (b) Determine uma base e a dimensão de V.

2. (a) Suponha que t é um número real fixado e A é uma matriz $n \times n$ real também fixada. Verifique que o conjunto de todas das matrizes $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ satisfazendo a equação $AX = tX$ é um subespaço vetorial de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. (Não se esqueça que verificar que este conjunto é não vazio.)

   (b) Determinar uma base e a dimensão para o subespaço vetorial definido pelas soluções do sistema lineares homogêneo:

$$\begin{cases} x - y + z/2 &= 0 \\ 6x - 2y + 6z &= 0 \\ -3y - 4z &= 0 \end{cases}$$

3. Sejam $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\}$ e $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}$.

   (a) Mostre que U e W são espaços vetoriais reais com as operações usuais em $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontre uma base e a dimensão para U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

4. Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Suponha que as dimensões de U, W e V são iguais a $4, 3$ e 5, respectivamente. Responda:

   (a) $U \cap W$ poderia ser o subespaço vetorial $\{0\}$?

   (b) O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 3?

   (c) A dimensão de $U \cap W$ poderia ser igual a 4?

   (d) Quais são os possíveis valores para a dimensão de $U \cap W$?

Boa Prova!

ICMC- USP - Departamento de Matemática
2^a Avaliação da disciplina SMA 304 Álgebra Linear
Professores: Sérgio Monari

Nome: ____________________
Número USP: ____________________
Data: 05.12.13

Questão	Nota	Valor
1.^{a}		2.0
2.^{a}		2.0
3.^{a}		2.0
4.^{a}		2.0
5.^{a}		2.0
Total		10.0

---

1. Uma transformação linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada um funcional linear. Prove que todo funcional linear não nulo é sobrejetor.

2. Sejam $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que
$$(T)_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Determine $T((x,y,z))$, onde (x,y,z) é um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$.

3. Mostre que o subespaço $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x-y=0, z-2t=0\}$ é isomorfo ao subespaço $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y-z=0\}$ e exiba um isomorfismo entre esses subespaços vetorias.

4. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada somente por autovetores de T.
   (b) Encontre uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $P^tAP = D$.

5. Considere $(M_{3\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ espaço vetorial real (com as operações usuais), munido do produto interno $< A\,,B >\doteq \operatorname{tr}\left(B^tA\right)$, onde $A,B \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ e $T : M_{3\times1}(\mathbb{R}) \to M_{3\times1}(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+4z \\ 2x+y+5z \\ 4x+5y+z \end{pmatrix}$, para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

   I) operador linear T é autoadjunto. II) o operador linear T é diagonalizável. III) $N(T) \neq \{O\}$. IV) operador linear T é automorfismo. V) operador linear T não sobrejetor.

   As **únicas** afirmações verdadeiras são (**justifique a sua resposta**):

   (a) I e II
   (b) I e IV
   (c) I , II e IV
   (d) III e IV
   (e) todas.

Boa Prova!

Prova Substitutiva de SMA304 – Álgebra Linear

Nome:____________________________________

06/12/2013

Questões	Notas	Valores
$1.^a$		2,0
$2.^a$		1,5
$3.^a$		1,5
$4.^a$		2,0
$5.^a$		3,0
Total		10,0

1. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que:
   (a) $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W, onde $Im(T)$ denota a imagem de T.
   (b) $N(T)$ é um subespaço vetorial de V, onde $N(T)$ denota o núcleo de T.

2. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos de uma transformação linear $T : V \to V$. Mostre que os respectivos autovetores v_1 e v_2 associados a λ_1 e λ_2 são linearmente independentes.

3. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva se, e somente se, T é injetora.

4. Seja T a transformação linear $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.
   (a) Encontre uma base para o núcleo de T.
   (b) Encontre uma base para a imagem de T.
   (c) Encontre a matriz de $(T)_{BB}$ com relação a base
   $$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$
   (d) Verifique que $(T(v))_B = (T)_{BB}(v)_B$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^3$

5. Seja $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$, definida por $T(A) = A^t$, onde A^t denota a matriz transposta de A. Considere $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ munido do produto interno $< A\,, B > \doteq \operatorname{tr}\left(B^t A\right)$, onde $A, B \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
   (a) Mostre que T é um isomorfismo.
   (b) Encontre os autovalores e os autovetores de T.
   (c) T é diagonalizável? Justifique ao menos por dois modos diferentes.
   (d) T é uma isometria (operador ortogonal)? Justifique.