1. Determine o posto das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ abaixo.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Determine a matriz $\boldsymbol{A}$ associada à forma quadrática $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2$, ou seja, determine $\boldsymbol{A}$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, em que $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$.

3. Sejam duas variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$ sendo que $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de covariâncias de $(Y_1, Y_2)^\top$ e verifique que é semidefinida positiva.

4. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz $k \times m$ qualquer. Prove que $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$ são matrizes simétricas.

5. Considere $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, X_2)^\top \sim N_3(\boldsymbol{0}_3, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a distribuição marginal de X_1.
   (b) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2.
   (c) Determine a distribuição condicional de X_0 dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$.
   (d) Determine ρ_{12}, ρ_{01} e ρ_{02}, em que $\rho_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)/\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}$.
   (e) Determine a distribuição de $Z = 4X_0 - 6X_1 + X_2$.
   (f) Determine a covariância entre Z_1 e Z_2, em que $Z_1 = X_0 - X_1 + 2X_2$ e $Z_2 = 2X_1$.

6. Se $(X, Y)^\top$ tem distribuição normal bivariada, com $X \sim N(8, 4)$, $Y \sim N(3, 2)$ e $\mathrm{E}(Y|X = x) = -1 + x/2$, determine o coeficiente de correlação entre X e Y e $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.

7. Sejam $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{I}_n)$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, em que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes $r \times n$ de posto $r < n$. Se $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{0}_{r\times r}$ e $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0}_{r\times r}$, mostre que $\boldsymbol{X}$ é independente de $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$.

8. Sejam $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ e $\boldsymbol{X}_4$ vetores aleatórios independentes com distribuição $N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Determine a distribuição dos vetores aleatórios $\boldsymbol{V}_1 = \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_1 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_2 + \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_4$ e $\boldsymbol{V}_2 = \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_2 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{X}_4$. Determine a distribuição conjunta de $\boldsymbol{V}_1$ e $\boldsymbol{V}_2$.

9. Considere $\boldsymbol{X}$ uma matriz $n \times p$ de posto igual a p, com $n > p$. Defina $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} : \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p\}$.

   (a) O que representa o conjunto $\mathcal{M}$?
   (b) Um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ pode ser decomposto como $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})$. Determine o vetor $\boldsymbol{b}$ de modo que as duas parcelas da decomposição sejam vetores ortogonais.