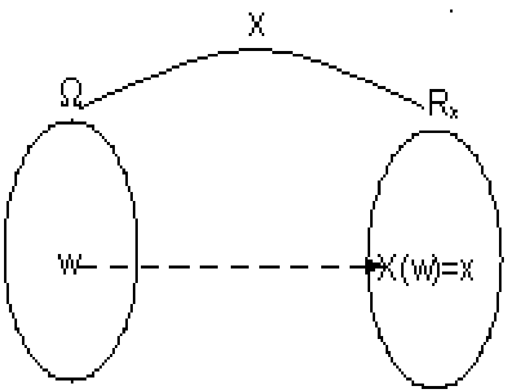
3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2014

Variável aleatória

Ω é o espaço amostral de um experimento aleatório. Uma variável aleatória, X, é uma função que atribui um número real a cada resultado em Ω.



Exemplo. Retira-se, ao acaso, um item produzido de um lote de seis unidades. Variáveis:

X: Número de defeitos no item selecionado.

Y: Tempo de vida do item (em h).

O espaço amostral associado a este experimento aleatório é

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_6\}.$$

Os possíveis valores da variável X são 0,1,2,..., e os possíveis valores da variável Y são os números reais não negativos.

Classificação:

•Variáveis aleatórias discretas. O conjunto de possíveis valores é finito ou infinito enumerável.

•Variáveis aleatórias contínuas. O conjunto de possíveis valores é infinito não enumerável (um intervalo, por exemplo).

No exemplo acima, X é discreta e Y é contínua.

Variáveis aleatórias discretas (VAD)

X é uma VAD com possíveis valores no conjunto R_X. Uma função f(x) é uma função de probabilidade se

$$\text{(i) } 0 \leq f(x_i) \leq 1,$$

$$\text{(ii) } \mathrm{P}(X = x_i) = f(x_i), \quad x_i \in \mathrm{R}_X \text{ e}$$

$$\text{(iii) } \sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1.$$

Exemplo. Um lote de um certo produto é formado por 35 itens, sendo 21 itens do tipo H e 14 do tipo M. Uma amostra de 3 itens será formada sorteando-se, sem reposição, três itens do lote. Qual a probabilidade de encontrarmos na amostra pelo menos dois itens do tipo M?

Definimos X como o número de itens do tipo M na amostra.

Espaço amostral	Probabilidade	X
HHH	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$	0
HHM	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$	1
HMH	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
MHH	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
HMM	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
MHM	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}097$	2
MMH	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$	2
MMM	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$	3

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}291 + 0{,}056 = 0{,}347.$

Exemplo. A demanda diária de um item é uma variável aleatória discreta com a função de probabilidade

$$\mathrm{P}(D = d) = \frac{C2^d}{d!}\,; \quad d = 1, 2, 3, 4.$$

(a) Determinar a constante C.

(b) Calcular P(D ≥ 2).

Solução. (a) Para que P(D = d) seja uma função de probabilidade, devemos ter (i) C > 0 e
(ii) P(D = 1) + P(D = 2) + P(D = 3) + P(D = 4) = 1. Ou seja,

$$\sum_{d \in R_D} \mathrm{P}(D = d) = 1 \Rightarrow \; C\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) = 1 \Rightarrow \; C = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Logo, } \mathrm{P}(D = d) = \frac{2^d}{6d!}; \quad d = 1,2,3,4.$$

$$(b)\ \mathrm{P}(D \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(D < 2) = 1 - \mathrm{P}(D = 1) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Função de distribuição acumulada de uma VAD

Função de distribuição acumulada (FDA)

X é uma VAD com valores em $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e função de probabilidade $f(x) = P(X = x)$. Para qualquer x, a FDA de X, denotada por F(x), é definida como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i), \quad \text{em que } x_i \in R_X.$$

Exemplo. Uma variável aleatória X tem função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/15, & \text{se} \quad x = 1, \\ 7/15, & \text{se} \quad x = 2,3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determinar F(x).

$$\text{Se } x < 1, \quad F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = 0.$$

$$\text{Se } x = 1, \quad F(1) = \mathrm{P}(X \leq 1) = \sum_{x_i \leq 1} \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X = 1) = f(1) = \frac{1}{15}.$$

$$\text{Se } 1 \leq x < 2, \quad F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{15}.$$

$$\textit{Se } x = 2, \quad F(2) = \mathrm{P}(X \leq 2) = \sum_{x_i \leq 2} \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Se } 2 \leq x < 3, \quad F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Se } x = 3, \quad F(3) = \mathrm{P}(X \leq 3) = \sum_{x_i \leq 3} \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = 1.$$

$$\text{Se } x \geq 3, \quad F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3) = 1.$$

Observação.

Se $x \in [1,2)$, então $F(x) = F(1)$;

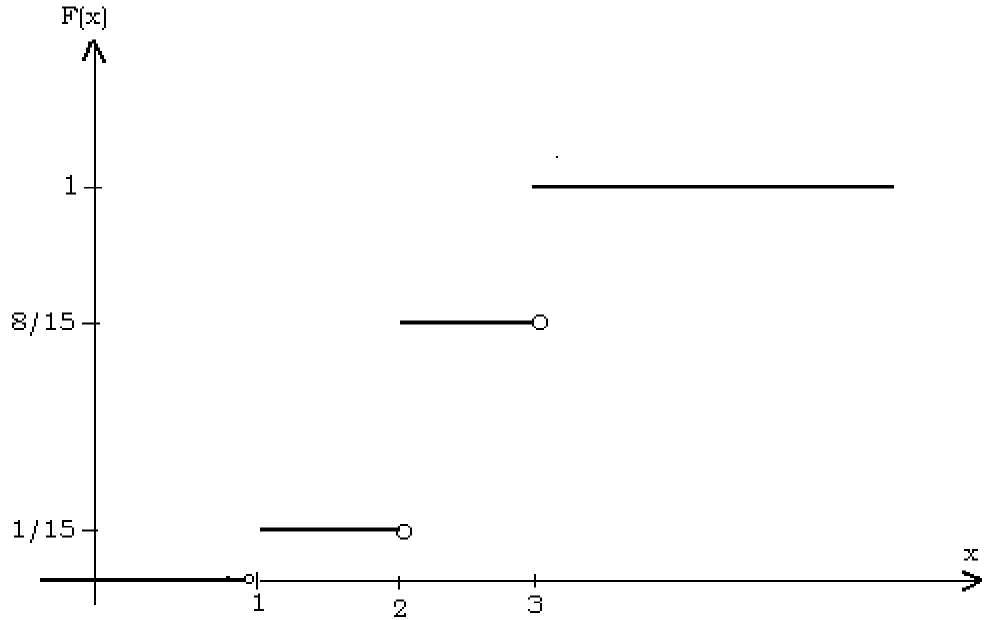
se $x \in [2,3)$, então $F(x) = F(2)$.

Em geral, se $x \in [x_l\, x_{l+1})$, então $F(x) = F(x_l)$

sendo que x_l e x_{l+1} são elementos de R_x.

Logo, a FDA é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 1, \\ 1/15, & \text{se} \quad 1 \le x < 2, \\ 8/15, & \text{se} \quad 2 \le x < 3, \\ 1, & \text{se} \quad x \ge 3. \end{cases}$$



Propriedades da função de distribuição acumulada

X é uma VAD

1. Para todo x, $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. F(x) é uma função monótona não decrescente.

3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4. Se $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, em que $x_1 < x_2 < \ldots$, então $f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

5. Se a e b são tais que a<b, então

$$(i)\ \mathrm{P}(X \leq a) = F(a),$$

$$(ii)\ \mathrm{P}(X \geq a) = 1 - \mathrm{P}(X < a),$$

$$(iii)\ \mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a),$$

$$(iv)\ \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + \mathrm{P}(X = a) \quad \text{e}$$

$$(v)\ \mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) - \mathrm{P}(X = b).$$

Exemplo. A variável aleatória X tem função de distribuição acumulada

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{se} \quad x<0, \\ 1/8, & \text{se} \quad 0\le x<1, \\ 1/2, & \text{se} \quad 1\le x<2, \\ 5/8, & \text{se} \quad 2\le x<3, \\ 1, & \text{se} \quad x\ge 3. \end{cases}$$

Determinar

(a) $\mathrm{P}(1< X\le 3)$, (b) $\mathrm{P}(X\ge 2)$ e (c) $f(x)$.

Usando a propriedade 5(iii) da FDA:

(a) $\mathrm{P}(1< X\le 3) = F(3) - F(1) = 1 - 1/2 = 1/2.$

(b) Propriedade 5(i) da FDA: $\mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}< 2) = 1 - \mathrm{F}(1) = 1 - 1/2 = 1/2.$

(c) Da FDA tem-se que $R_X = \{0,1,2,3\}$. Pela propriedade 4 da FDA, pode-se mostrar que a função de probabilidade de X é

$$f(x) = \mathrm{P}(X=x) = \begin{cases} 1/8, & \text{se} \quad x=0,\ 2, \\ 3/8, & \text{se} \quad x=1,\ 3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias contínuas (VAC)

Função densidade de probabilidade

Uma função f(x) é chamada função densidade de probabilidade de uma VAC X se

$$1.\ f(x) \geq 0, \quad \text{para todo } x.$$

$$2.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

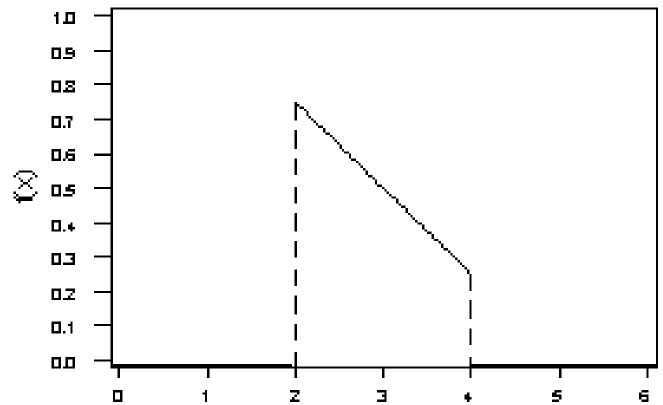
$$3.\ \text{Se } A = \{x; a \leq x \leq b\}, \ \text{então } \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo. O tempo de realização de uma etapa de um projeto (em horas) é uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5-x}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se f(x) é uma função densidade de probabilidade. Calcule a probabilidade que o tempo de realização seja menor do que 3 horas.

Primeiro notamos que $f(x) \geq 0$, para todo x. Falta verificar a condição (2), ou seja a área sob o gráfico de f(x) deve ser igual a 1.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{4} \frac{5-x}{4}dx + \int_{4}^{\infty} 0dx = \int_{2}^{4} \frac{5-x}{4}dx = \frac{1}{4}(5x - \frac{x^2}{2})\Big|_{x=2}^{4} = 1.$$

A probabilidade de que o tempo de realização seja menor do que 3 minutos é a probabilidade do evento $A = \{x;\ x < 3\}$, ou seja,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(X < 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{4}(5 - x)dx = \frac{1}{4}(5x - \frac{x^2}{2})\Big|_{2}^{3} = \frac{5}{8}.$$

Observação. Se X é uma VAC, então

(i) $P(X = x) = 0$, para todo x,

(ii) $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$

$= P(a < X \leq b)$, para todos a e b com $a < b$,

(iii) $P(X \leq a) = P(X < a)$, para todo a.

Função de distribuição acumulada. X é uma VAC com função densidade f(x). A função de distribuição acumulada (FDA) de X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \text{ para todo } x.$$

Obs. Se X é um tempo de vida, geralmente utilizamos a função de confiabilidade (*reliability function*) ou função de sobrevivência (*survival function*): R(x) = P (X > x) = 1 – F(x).

Exemplo. Uma variável aleatória X tem função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 - x}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinar F(x).

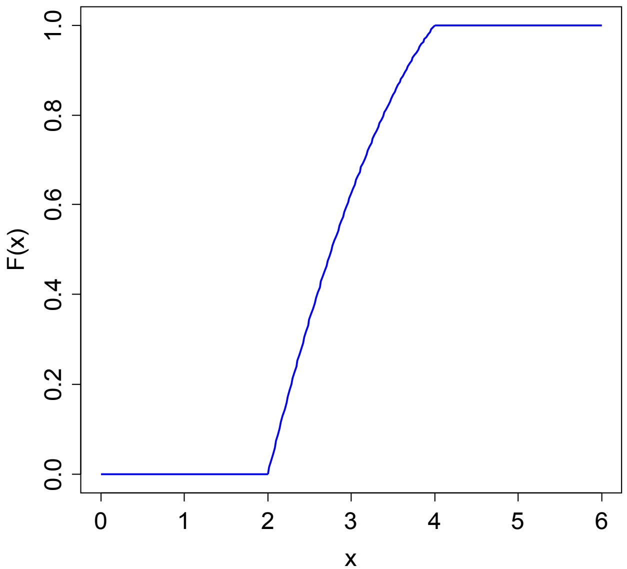
Se $x < 2$, $f(x) = 0$; logo, $F(x) = 0$.

Se $2 \leq x < 4$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{2} 0dt + \int_{2}^{x} \frac{5-t}{4}dt = -\frac{(5-t)^2}{8}\Bigg|_{2}^{x} = \frac{9-(5-x)^2}{8}.$$

Se $x \geq 4$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{2} f(t)dt}_{=0} + \underbrace{\int_{2}^{4} f(t)dt}_{=1} + \underbrace{\int_{4}^{x} f(t)dt}_{=0} = 1.$$



Logo, a FDA de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 2, \\ \dfrac{9-(5-x)^2}{8} & \text{se} \quad 2 \leq x < 4, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 4. \end{cases}$$

Observação.

A FDA de X permite o cálculo de probabilidades de eventos na forma de intervalos $E = \{x;\ a \leq x \leq b\}$, com $a \leq b$. Isto é,

$$P(E) = F(b) - F(a).$$

Exemplo. Considere a FDA abaixo. Obtenha $P(X \leq 3)$ e $P(3 \leq X < 5)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 2, \\ \dfrac{9-(5-x)^2}{8}, & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 4. \end{cases}$$

Solução.

$$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{9-(5-3)^2}{8} = \frac{5}{8} \text{ e}$$

$$P(3 \leq X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Propriedades

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, para todo x.
2. F(x) é uma função monótona não decrescente.
3. F(x) é uma função contínua para todo x.
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1.$
5. Do teorema fundamental do cálculo obtemos

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Exemplo. Suponha que o tempo de vida de um processador é uma variável aleatória X com

$$F(x) = \begin{cases} 1 - ke^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinar (a) o valor de k, (b) $P(X \geq 2)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ e $P(X \leq -1)$ e (c) f(x).

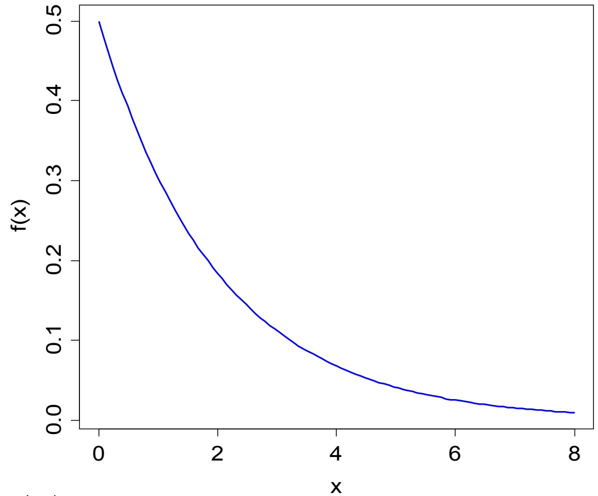
Solução. (a) Propriedade 3 de F(x): F(0) = 0.

$$1 - ke^{-0} = 0 \Rightarrow k = 1. \text{ Logo, } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} = 0{,}368.$

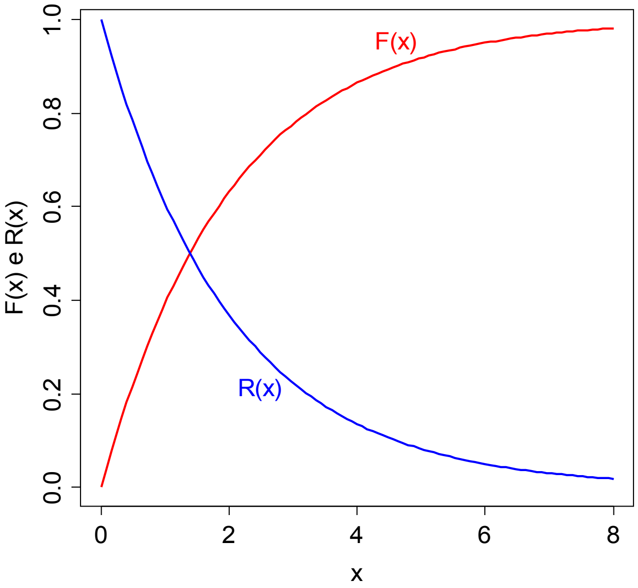
$P(2 \leq X < 4) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} = 0{,}233.$

$P(X \leq -1) = F(-1) = 0.$



(c) Propriedade 5 de $F(x)$:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Valor esperado e variância

Valor esperado de uma variável aleatória. X é uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade f(x). O valor esperado (ou esperança matemática ou média da variável aleatória), denotado por $E(X) = \mu_X$ é definido como

1. X é uma variável aleatória discreta:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) \quad \text{e}$$

2. X é uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

supondo que o somatório e a integral existem.

Valor esperado de uma função de variável aleatória

Y = h(X), sendo h uma função de X.

O valor esperado de h(X) é dado por

$$1.\ \text{X é uma variável aleatória discreta:}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{x \in R_X} h(x) f(x) \quad \text{e}$$

$$2.\ \text{X é uma variável aleatória contínua:}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

Variância de uma variável aleatória. X é uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade f(x) e com média E(X) = μ_X.

A variância de X, denotada por $Var(X) = \sigma_X^2$ é definida como o valor esperado de $(X - \mu_X)^2$.

1. X é uma variável aleatória discreta:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x) \quad \text{e}$$

2. X é uma variável aleatória contínua:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx.$$

Desvio padrão. É a raiz quadrada da variância:

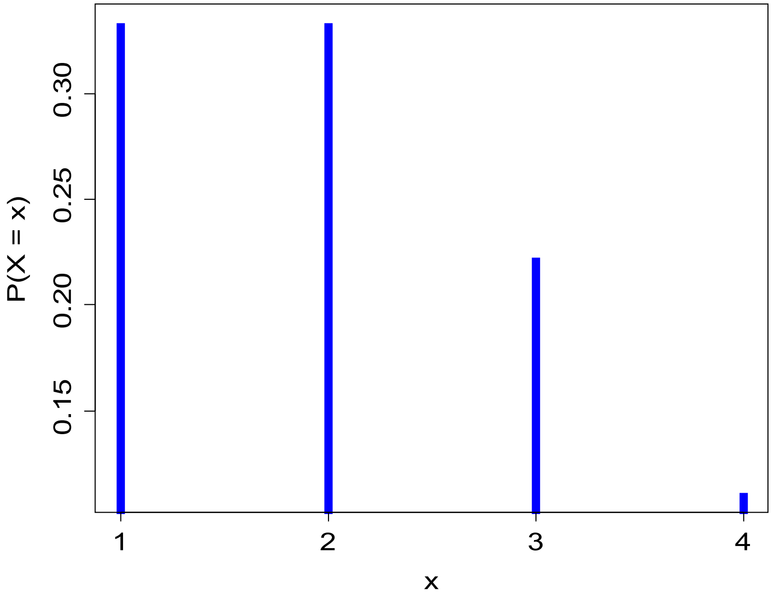
$$\mathrm{DP}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Exemplo. Suponha que a demanda diária de uma peça é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{2^x}{6x!}, & x = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determinar (a) a demanda esperada e (b) o desvio padrão da demanda.

Solução. Gráfico de f(x).



Solução. (a) Pela definição de valor esperado, temos

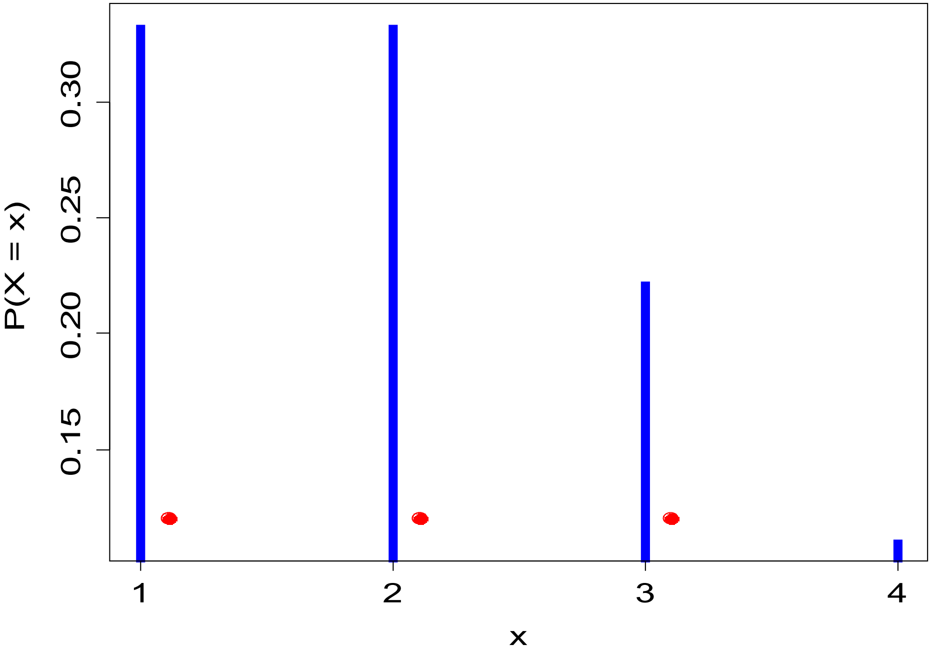
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = 1 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{2^2}{6 \times 2!} + 3 \times \frac{2^3}{6 \times 3!} + 4 \times \frac{2^4}{6 \times 4!} = \frac{19}{9} \cong 2{,}1.$$

$$(b) \quad \mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x) =$$

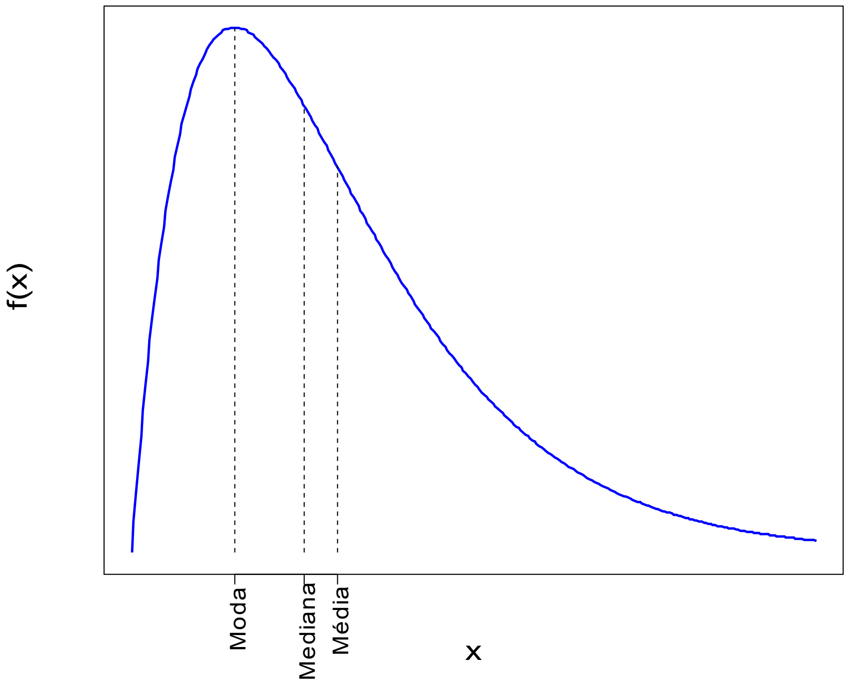
$$= (1 - \frac{19}{9})^2 \times \frac{2}{6} + (2 - \frac{19}{9})^2 \times \frac{2^2}{6 \times 2!} + (3 - \frac{19}{9})^2 \times \frac{2^3}{6 \times 3!} + (4 - \frac{19}{9})^2 \times \frac{2^4}{6 \times 4!} = \frac{80}{81},$$

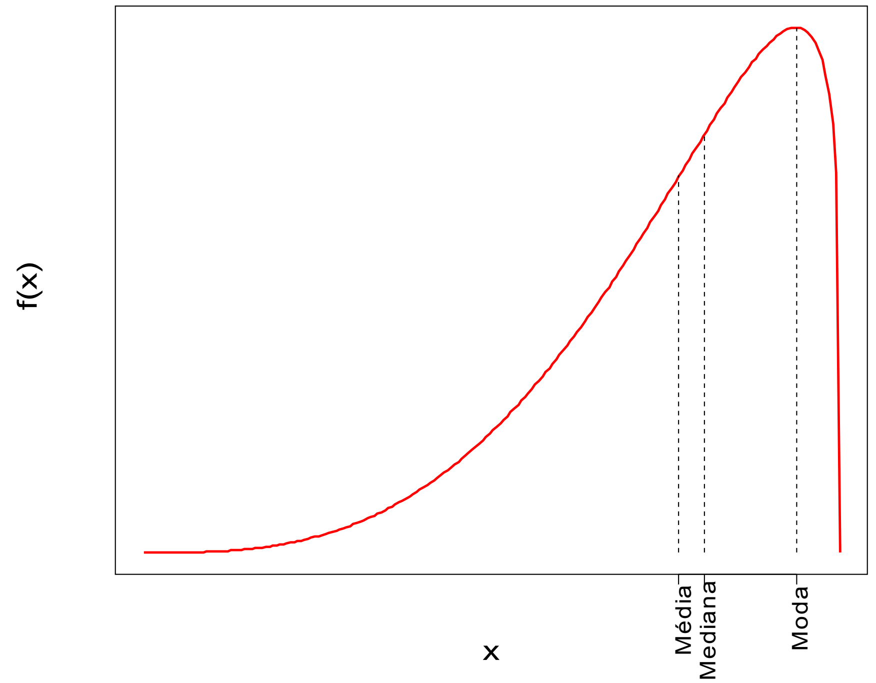
$$\mathrm{DP}(X) = \sigma_X = \sqrt{\frac{80}{81}} \cong 0{,}99.$$

Gráfico de f(x) com μ – σ, μ e μ + σ.



Moda, mediana e média (VAC)





Assimetria à direita:

Moda < Mediana < Média

Assimetria à esquerda:

Moda > Mediana > Média

Simetria: Mediana = Média (se existir).

Variáveis aleatórias independentes

X e Y são duas variáveis aleatórias. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se,

$$P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y))$$

$$= F_X(x) \times F_Y(y), \text{ para todos } x \text{ e } y,$$

sendo que F_X e F_Y são as FDA's de X e Y.

Em particular, se X e Y são duas variáveis aleatórias discretas, X e Y são independentes se, e somente se,

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y), \text{ para todos } x \text{ e } y.$$

Propriedades do valor esperado e da variância

X e Y são duas variáveis aleatórias e *a* e *b* dois números reais.

$1. E(a) = a.$

$2. E(aX) = aE(X).$

$3. E(aX \pm b) = aE(X) \pm b.$

$4. E\left(aX \pm bY\right) = aE(X) \pm bE(Y).$

$5. Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2.$

$6.\ Var(a) = 0.$

$7. Var(aX) = a^2 Var(X).$

8. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y).$

9. Se $X_1, \cdots, X_n$ são n variáveis independentes, então

$Var(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$

Exemplo. O módulo de resistência (em N/mm^2) de peças de madeira é uma variável aleatória com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1400}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 40, \\ \dfrac{70 - x}{1050}, & \text{se} \quad 40 \leq x \leq 70, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Obtenha F(x).

(b) Represente graficamente f(x) e F(x).

(c) Calcule a probabilidade de que a resistência seja maior do que 30 e menor do que 60 N/mm^2.

(d) Calcule a média e o desvio padrão do módulo de resistência.

Solução. Denotamos módulo de resistência por X.

(a) Se $x \le 0$, $F(x) = 0$ e se $x \ge 70$, $F(x) = 1$.

Para $x \in (0,40]$, $F(x) = \int_0^x \frac{y}{1400}\,dy = \frac{x^2}{2800}.$

Para $x \in [40,70]$, $F(x) = \int_0^{40} \frac{y}{1400}\,dy + \int_{40}^x \frac{70-y}{1050}\,dy.$

$$= \frac{1600}{2800} + \frac{1}{1050}\left(70x - \frac{x^2}{2} - 2800 + \frac{1600}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{1}{1050}\left(70x - \frac{x^2}{2} - 2000\right).$$

(b) Gráfico de f(x)

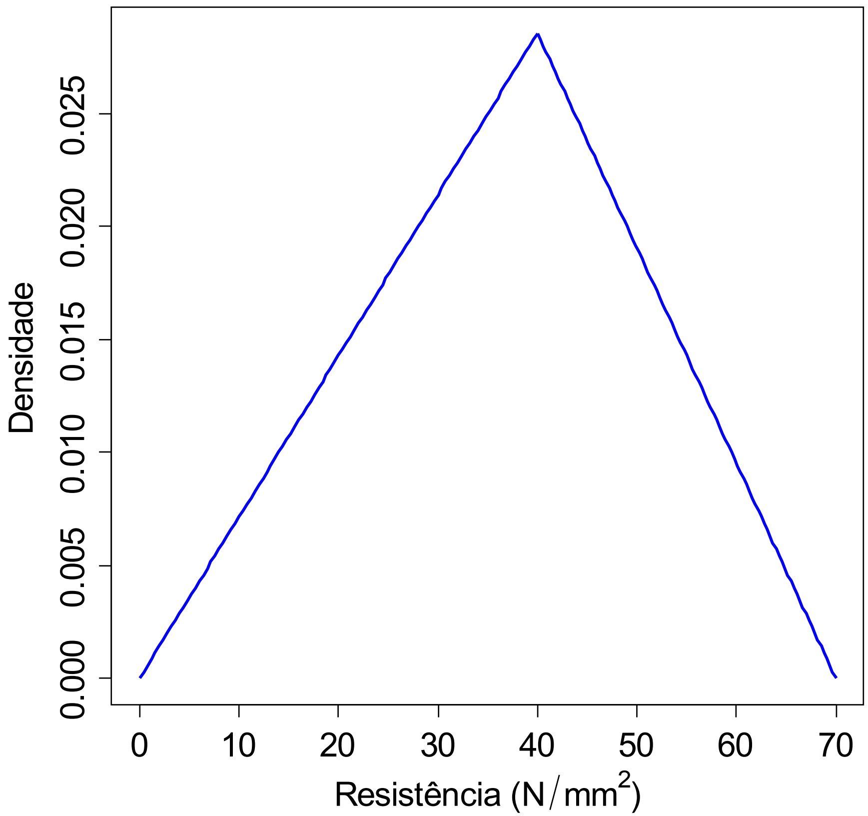
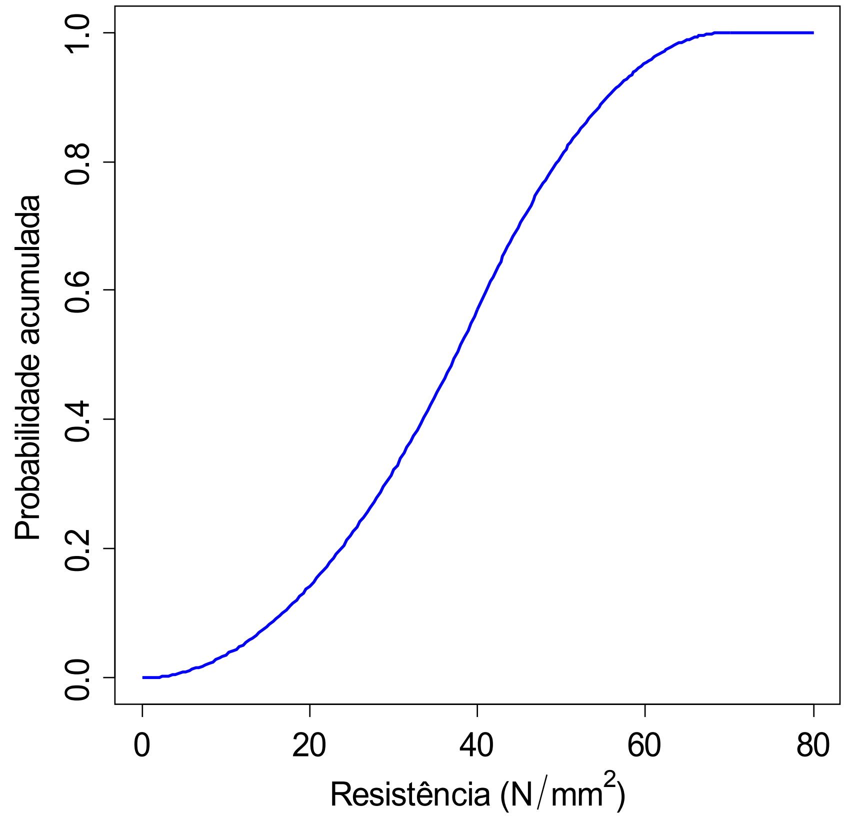


Gráfico de F(x)

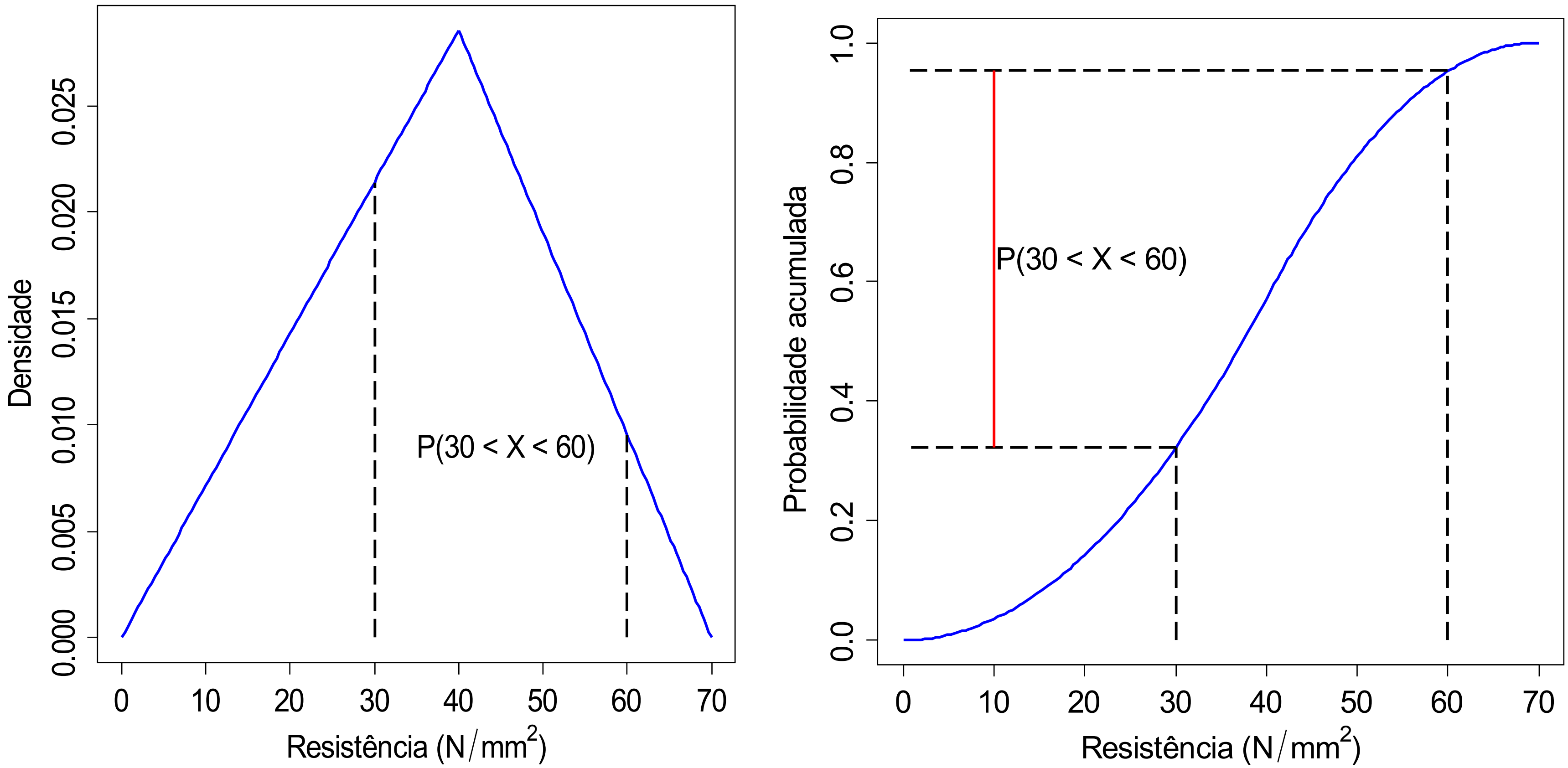


(c) Devemos calcular $P(30 < X < 60)$.

Utilizando a função distribuição acumulada obtemos

$$P(30 < X < 60) = F(60) - F(30) = 0{,}952 - 0{,}321 = 0{,}631.$$

(b) Solução gráfica



(d) Iniciamos calculando

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{40} \frac{x^2}{1400}dx + \int_{40}^{70} x\left(\frac{70 - x}{1050}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{4200}\Big|_0^{40} + \frac{1}{1050}\left(35x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{40}^{70} = \frac{110}{3} \cong 36{,}7\ \text{N/mm}^2.$$

No cálculo de var(X) utilizamos a relação var(X) = E(X²) – [E(X)]², sendo que

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{40} \frac{x^3}{1400}dx + \int_{40}^{70} x^2\left(\frac{70 - x}{1050}\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{5600}\Big|_0^{40} + \frac{1}{1050}\left(\frac{70x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{40}^{70} = 1550\ \text{N}^2/\text{mm}^4,$$

de modo que $\text{var}(X) = 1550 - \left(\frac{110}{3}\right)^2 = 1850/9\ \text{N}^2/\text{mm}^4$

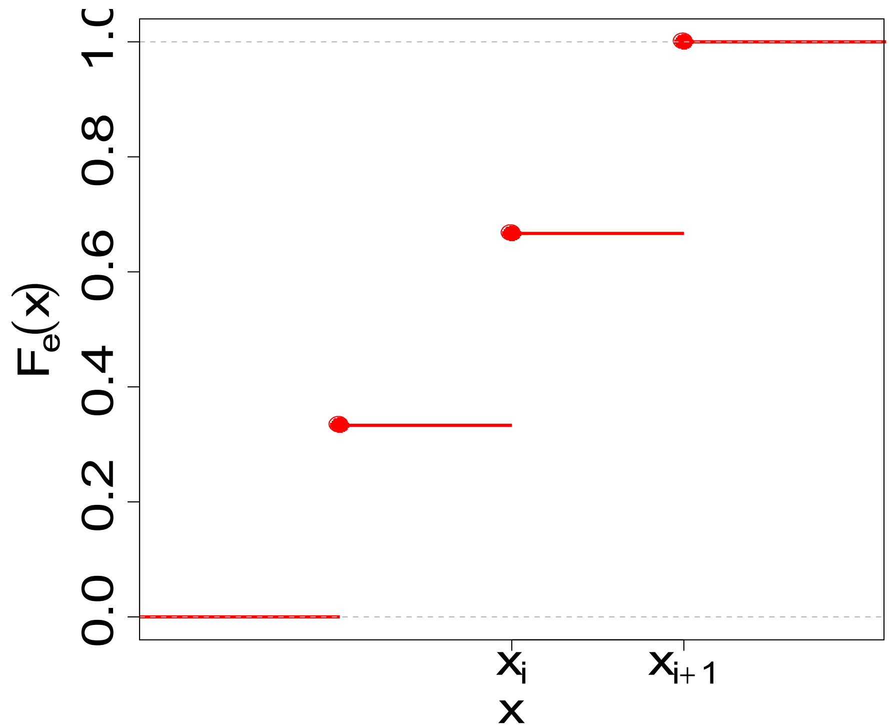
e $\sigma = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{1850/9} \cong 14{,}3\ \text{N/mm}^2.$

Função distribuição empírica

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: valores observados de uma variável aleatória X.

N(x): número de observações menores do que ou iguais a x.

A função distribuição empírica é dada por $F_e(x) = N(x) / n$, para todo x.



Obs. (1) $F_e(x) = 0$ para todo x < min.

(2) $F_e(x) = 1$ para todo $x \geq$ MAX.

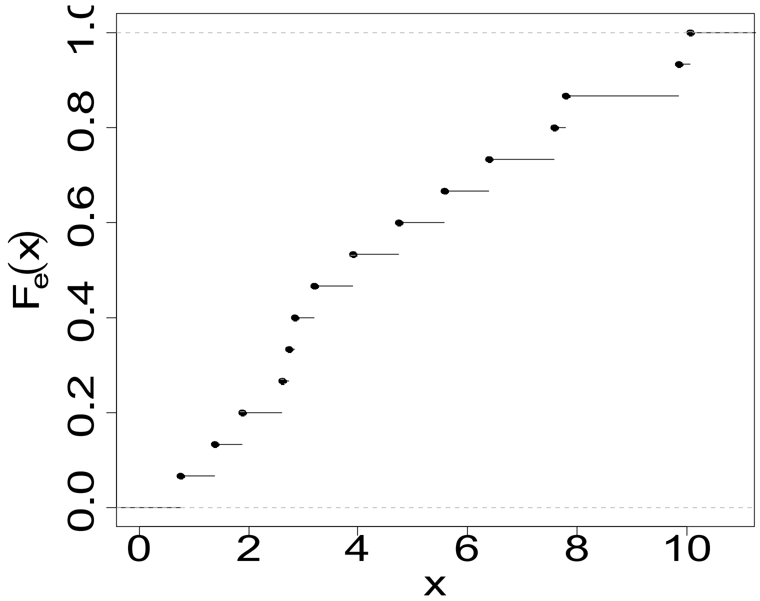
(3) O gráfico de $F_e(x)$ tem a forma de escada com saltos em cada um dos diferentes valores de x.

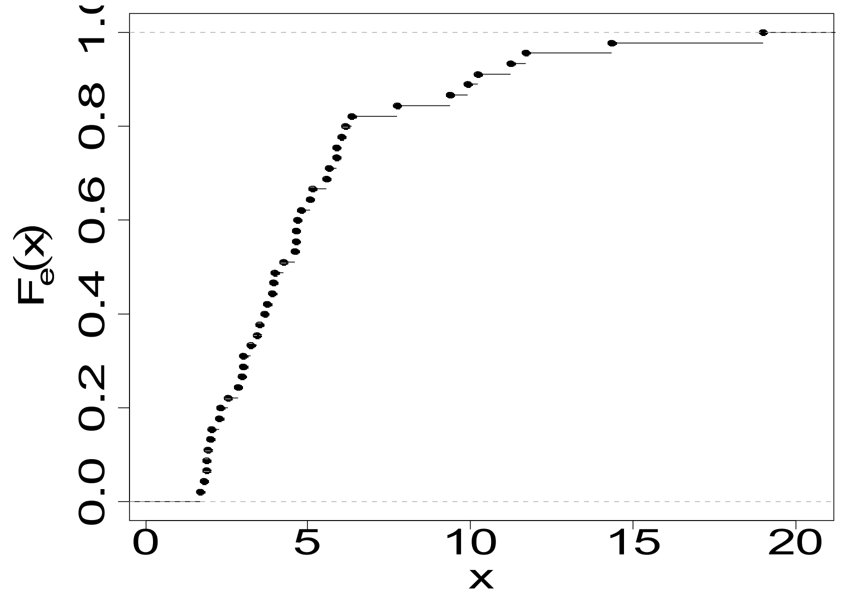
(4) A altura do salto no valor x_i é igual à frequencia relativa de x_i.

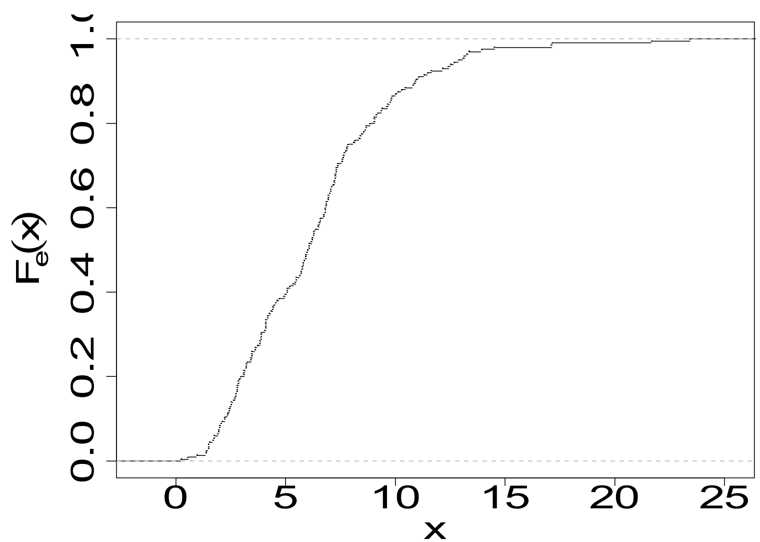
(5) Se todos os n valores forem diferentes, temos n saltos com altura = 1/ n.

(6) Se x_i e x_{i+1} são dois valores consecutivos na amostra ordenada ($x_i < x_{i+1}$), $F_e(x) = F_e(x_i)$ para todo $x \in [x_i, x_{i+1})$.

Exemplos







Problemas. (1) Encontrar F(x) teórica que "melhor" se ajusta à $F_e(x)$.

(2) Calcular, por exemplo, $P(X \leq 17)$, que é dada por $F(17)$.

(3) Calcular o valor de x que corresponde a uma probabilidade acumulada igual a p, ou seja,

resolver a equação F(x) = p, com solução $x = F^{-1}(p)$ = p-ésimo quantil de X.