USP – ICMC – SME0810 - Métodos Não Paramétricos
Prova 1 – 2019
S O L U Ç Ã O

1. Pode ser afirmado que as observações
   -0,53 -0,40 0,52 -0,27 -0,24 -0,07 -0,76 -0,58 -0,49 0,34
   foram amostradas de uma distribuição uniforme$(-1,1)$?

   Solução. Pelo enunciado, a distribuição é contínua e a hipótese nula $X \sim$ uniforme$(-1,1)$ é simples. Utilizamos o teste de Kolmogorov-Smirnov. A função densidade é $f(x) = 1/2$, se $x \in (-1,1)$, e $f(x) = 0$, caso contrário. Para $x \in (-1,1)$, temos $F_0(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} u|_{-1}^{x} = \frac{x+1}{2}$. Para $x \leq -1$, temos $F_0(x) = 0$ e para $x \geq 1$, temos $F_0(x) = 1$. Os valores das $n = 10$ observações são diferentes, de modo que a função distribuição empírica F_n apresenta saltos de altura igual a $1/n = 1/10$ em cada diferente valor observado. Os cálculos necessários são organizados na tabela abaixo.

x	Fn(x)	F0(x)	|F0(x) - Fn(x)|	|F0(x) - Fn(x-)|
-0,76	0,1	0,120	0,020	0,120
-0,58	0,2	0,210	0,010	0,110
-0,53	0,3	0,235	0,065	0,035
-0,49	0,4	0,255	0,145	0,045
-0,40	0,5	0,300	0,200	0,100
-0,27	0,6	0,365	0,235	0,135
-0,24	0,7	0,380	0,320	0,220
-0,07	0,8	0,465	0,335	0,235
0,34	0,9	0,670	0,230	0,130
0,52	1,0	0,760	0,240	0,140

   Calculando o valor máximo das duas últimas colunas da tabela acima, obtemos $D_n = d = 0,335$. Consultando a tabela da Nota 1, vemos que $0,323 < 0,335 < 0,369$, de modo que o valor-p correspondente a $d = 0,335$ é tal que 0,10 < valor-p < 0,20, ou seja, valor-$p > 0,05$. Logo, fixando o nível de significância do teste em 5%, não rejeitamos a afirmação de que as observações foram amostradas de uma distribuição uniforme$(-1,1)$.

2. Pares de gêmeos idênticos passaram por testes com o objetivo de medir a agressividade. O interesse do estudo consiste em verificar se o primeiro gêmeo do par tende a ser mais agressivo do que o segundo. Os resultados estão abaixo, sendo que escores com valores mais altos indicam mais agressividade.

	Escores											
Primeiro gêmeo	86	71	77	68	91	72	77	91	70	71	88	87
Segundo gêmeo	88	77	76	64	96	72	65	90	65	80	81	72

(a) Apresente o parâmetro a ser testado, formule as hipóteses a testar (H_0 e H_1) e indique dois testes que poderiam ser aplicados.

Solução. Pelo enunciado, percebemos que são dados pareados. Os escores de agressividade do primeiro gêmeo e do segundo gêmeo são denotados por X e Y, respectivamente. Definimos $Z = X - Y$, notando que valores positivos de Z indicam mais agressividade do primeiro gêmeo. O parâmetro a testar (θ) é a mediana da variável Z (mediana das diferenças dos escores). Pelo enunciado, escrevemos as hipóteses como $\mathrm{H}_0 : \theta = 0$ e $\mathrm{H}_1 : \theta > 0$, ou seja, $\theta_0 = 0$ (valor de teste). Se as v.a. $Z_1, \ldots, Z_n$ (1) são mutuamente independentes e (2) são contínuas e têm distribuição simétrica em relação a θ, podemos aplicar o teste de Wilcoxon. Se as v.a. $Z_1, \ldots, Z_n$ (1) são mutuamente independentes e (2) são contínuas e têm mediana única igual a θ, podemos aplicar o teste do sinal de Fisher.

(b) Apresente uma solução com base no valor-p de um teste apropriado.

Solução. Utilizamos o teste do sinal. Calculamos $z_i^* = z_i - \theta_0 = x_i - y_i$, para $i = 1, \ldots, n$, $n = 12$, obtendo

```
-2 -6  1  4 -5  0 12  1  5 -9  7 15
```

A diferença nula (z_6^*) é eliminada e o tamanho da amostra passa a ser $n = 11$. O número de diferenças positivas é $B_{\text{obs}} = 7$. Levando em conta as hipóteses no item 2(a), o valor-p do teste é dado por valor-$p = \sum_{j=B_{\text{obs}}}^{n} P_0(B \geq B_{\text{obs}})$, em que $B \sim$ binomial$(n, 1/2)$. Calculamos valor-$p = \sum_{j=7}^{11} \binom{11}{j} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{2^{11-j}} = \frac{1}{2^{11}} \sum_{j=7}^{11} \binom{11}{j} = 0,2744$, de modo que valor-$p > 0,05$. Portanto, com um nível de significância de 5% não podemos afirmar que o primeiro gêmeo do par tende a ser mais agressivo do que o segundo.

3. A sequência de símbolos

A, A, A, B, B, A, A, A, A, B, A, A, B, A, A, A, A, B, B, B, B

indica dias com temperatura máxima acima (A) ou abaixo (B) da média histórica de um certo período. Pode ser afirmado que as temperaturas diárias se afastam da média histórica de forma aleatória?

Solução. Os números de símbolos A e B são $n_1 = 13$ e $n_2 = 8$, respectivamente, de modo que $n = n_1 + n_2 = 21$. Na sequência de símbolos notamos quatro corridas de A e quatro corridas de B, de modo que o número observado de corridas R é $r = 8$. Supondo aleatoriedade, de acordo com a Nota 2, temos $\mathrm{E}_0(R) = 1 + \frac{2n_1n_2}{n} = 10,90$ $\mathrm{var}_0(R) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)} = 4,41$. Padronizando o número de corridas, obtemos $z = \{r - \mathrm{E}_0(R)\}/\sqrt{\mathrm{var}_0(R)} = -1,38$. Utilizando a aproximação pela distribuição normal padrão, com 5% de significância temos $|z_{\text{crit}}| = 1,96$. Como $|z| < |z_{\text{crit}}|$, não rejeitamos a hipótese de aleatoriedade. Com 5% de significância, concluímos que as temperaturas diárias se afastam da média histórica de forma aleatória.

4. Um total de $n = 50$ amostras de $m = 13$ itens cada foi coletada em uma linha de produção. As quantidades de defeitos e amostras são apresentadas abaixo. Pode ser afirmado que o número de defeitos segue a distribuição binomial?

Defeitos (x)	0	1	2	3	4	5	6 ou mais
Amostras (f)	10	24	10	4	1	1	0

Solução. O número de defeitos é denotado por X. Seguindo o enunciado, será testada a hipótese composta $X \sim$ binomial$(13, p)$, com um parâmetro (p) a ser estimado. Utilizando a Nota 3 e a tabela acima, obtemos a estimativa da probabilidade p dada por $\widehat{p} = \sum_{j=0}^{m} x_j \times f_j/(n \times m) = \sum_{j=0}^{13} x_j \times f_j/650 = 65/650 = 0,10$. Aplicamos o teste qui-quadrado de Pearson de bondade de ajuste. Na tabela abaixo, as probabilidades (`Prob.`) foram calculadas com a função massa de probabilidade da distribuição binomial, ou seja, $\binom{13}{j} \times 0,10^j \times 0,90^{13-j}$, para $j = 0, 1, \ldots, 13$. A coluna das frequências esperadas estimadas (`e^`) é calculada como $n\times$ `Prob.` $= 50 \times$ `Prob.`.

```
-------------------------------------------------
Defeitos Amostras (o) Prob.     e^ (e^ - o)^2 / e^
-------------------------------------------------
       0           10 0,254 12,709           0,578
       1           24 0,367 18,358           1,734
       2           10 0,245 12,239           0,409
       3            4 0,100  4,986           0,195
       4            1 0,028  1,385           0,107
       5            1 0,006  0,277           1,887
  6 ou mais         0 0,001  0,046           0,046
-------------------------------------------------
          Total    50 1,000 50,000           4,956
-------------------------------------------------
```

O teste é realizado com os resultados da tabela acima em que o número de categorias é $k = 7$ sem agrupar categorias para que a frequência esperada estimada (`e^`) seja pelo menos 5. Na tabela vemos que $Q_{\text{obs}} = 4,956$. O número de graus de liberdade (g.l.) é g.l. $= k - 1 - 1 = 5$. Consultando a tabela da Nota 4, vemos que $4,35 < 4,956 < 6,63$, de modo que o valor-p correspondente a $Q_{\text{obs}} = 4,956$ é tal que $0,25 <$ valor-$p < 0,50$, ou seja, valor-$p > 0,05$. Logo, fixando o nível de significância do teste em 5%, concluímos que a distribuição binomial$(13, p)$ faz um bom ajuste aos dados.

NOTA 1. Abaixo são apresentados alguns valores de probabilidades da cauda direita da distribuição da estatística D_n de Kolmogorov-Smirnov para $n = 10$.

d	0,323	0,369	0,409	0,489
$\mathrm{P}(D_{10} \geq d)$	0,20	0,10	0,05	0,01

NOTA 2. Supondo aleatoriedade da sequência, a média e a variância do número total de corridas R são $\mathrm{E}_0(R) = 1 + \frac{2n_1n_2}{n}$ e $\mathrm{var}_0(R) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n-1)}$, sendo que n é o tamanho da amostra e n_1 e n_2 denotam os números de símbolos dos dois tipos.

NOTA 3. Na questão 4, um estimador para a probabilidade da distribuição binomial é dado por $\sum_{j=0}^{m} x_j \times f_j/(n \times m)$.

NOTA 4. No corpo da tabela abaixo são apresentados alguns valores de w tais que $\mathrm{P}(\chi^2_{\text{g.l.}} \geq w) = p$ para diferentes graus de liberdade (g.l.).

	p			
g.l.	0,50	0,25	0,10	0,05
3	2,37	4,11	6,25	7,81
4	3,36	5,39	7,78	9,49
5	4,35	6,63	9,24	11,07