UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
Departamento de Ciências de Computação

SCC-501 - Capítulo 2
Recursão

João Luís Garcia Rosa[1]

[1]Departamento de Ciências de Computação
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo - São Carlos
http://www.icmc.usp.br/~joaoluis

2011

Sumário

Sumário

Definições Recursivas e Processos

- Na matemática, vários objetos são definidos através de um processo que os produz.
- Por exemplo, π é definido como a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.
- Outro exemplo é a função fatorial.
- Dado um número inteiro positivo n o fatorial de n é o produto de todos os inteiros entre 1 e n:
  - $n! = 1$, se $n = 0$.
  - $n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 1$, se $n > 0$.
- Programa **iterativo** para o fatorial de n:

```
prod = 1;
for (x = n; x > 0; x--)
 prod *= x;
return(prod);
```

Definições Recursivas e Processos

- O algoritmo anterior é chamado de iterativo pois requer a repetição explícita de um processo até que determinada condição seja satisfeita.
- Este algoritmo pode ser traduzido para uma função em C que retorne $n!$ quando recebe n como parâmetro
- Outra definição para o fatorial:
  - $n! = 1$, se $n = 0$.
  - $n! = n * (n - 1)!$, se $n > 0$.
- Observe que a função fatorial está definida em termos de si mesma: o fatorial de n depende do fatorial de $n - 1$. Esta é uma definição **recursiva** do fatorial.

Definições Recursivas e Processos

- Programa recursivo para cálculo do fatorial:

```
unsigned long fat(int n)
{
 int fato = 1;
 if (n > 1)
   fato = n * fat(n-1);
 return fato;
}
```

Sumário

Recursão

- A recursão ocorre quando uma função chama a si própria. Quando isto acontece, várias ações ocorrem:
  - A função começa a execução do seu primeiro comando cada vez que é chamada;
  - Novas e distintas cópias dos parâmetros passados por valor e variáveis locais são criadas;
  - A posição que chama a função é colocada em estado de espera, enquanto que o nível gerado recursivamente esteja executando.
- O próximo programa explica estes efeitos.

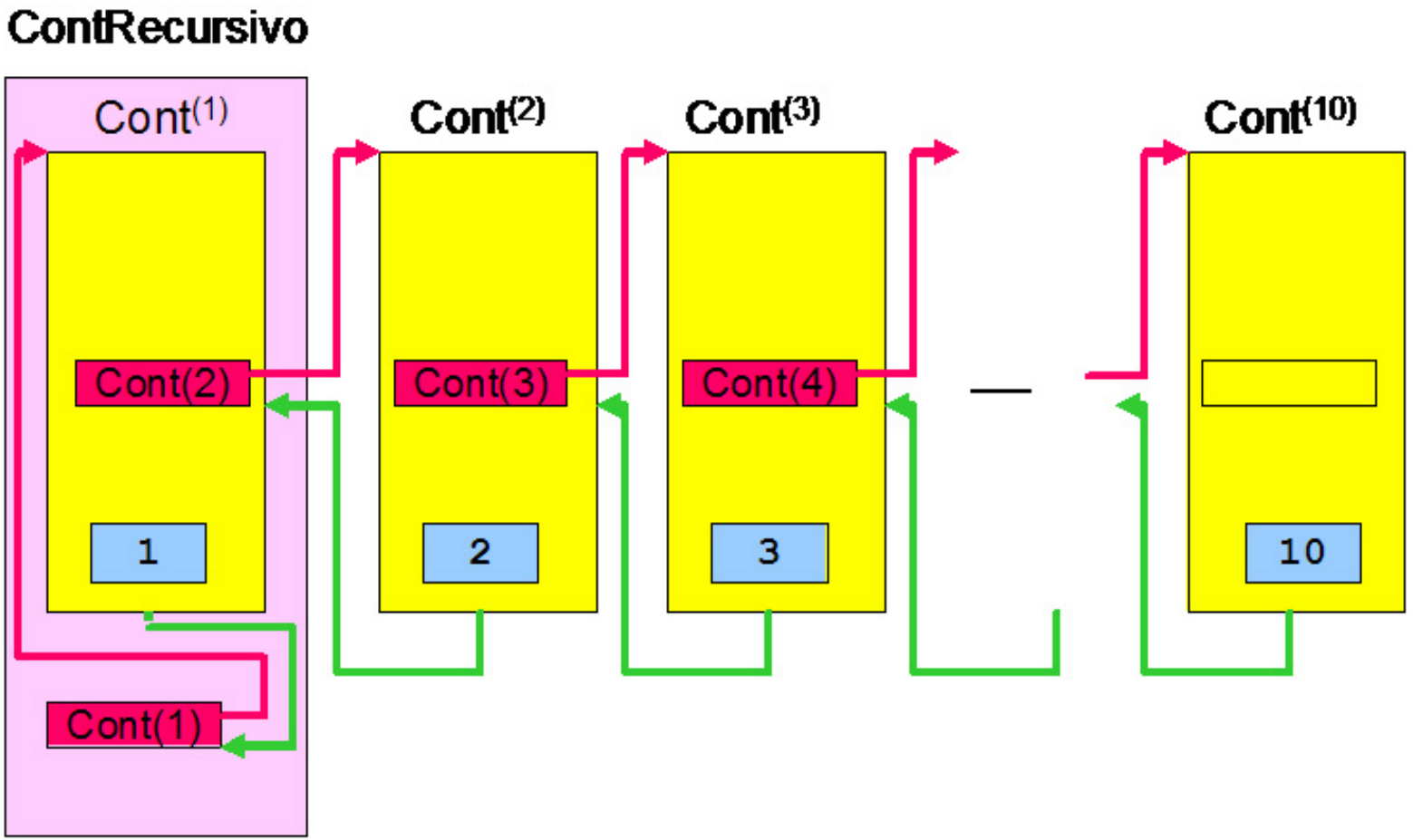
Sumário

Recursão

- Contador recursivo:

```
#include <stdio.h>
void cont (int);
main()
{
 cont(1);
}
void cont(int n)
{
 if (n < 10)
   cont(n+1);
 printf("%d\n", n);
}
```

Recursão


ContRecursivo
Cont(1)
Cont(2)
Cont(3)
Cont(4)
Cont(10)
Cont(2)
Cont(3)
Cont(4)
1
2
3
10
Cont(1)

Recursão

- A **seqüência de Fibonacci** é a seqüência de inteiros:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, ...$$

- Cada elemento nesta seqüência é a soma dos dois elementos anteriores. Se $fib(0) = 0$ e $fib(1) = 1$:
  - $fib(n) = n$, se $n = 0$ ou $n = 1$
  - $fib(n) = fib(n-2) + fib(n-1)$, se $n \geq 2$
- Por exemplo, para calcular $fib(6)$, pode-se aplicar a definição recursivamente:
  - $fib(6) = fib(4) + fib(5) = fib(2) + fib(3) + fib(5) =$
    $fib(0) + fib(1) + fib(3) + fib(5) = 0 + 1 + fib(3) + fib(5) =$
    $1 + fib(1) + fib(2) + fib(5) = 1 + 1 + fib(0) + fib(1) + fib(5) =$
    $2 + 0 + 1 + fib(5) = 3 + fib(3) + fib(4) =$
    $3 + fib(1) + fib(2) + fib(4) = 3 + 1 + fib(0) + fib(1) + fib(4) =$
    $4 + 0 + 1 + fib(4) = 5 + fib(2) + fib(3) =$
    $5 + fib(0) + fib(1) + fib(3) = 5 + 0 + 1 + fib(3) =$
    $6 + fib(1) + fib(2) = 6 + 1 + fib(0) + fib(1) = 7 + 0 + 1 = 8$

Recursão

- Seqüência de Fibonacci:

```
int Fib(int n)
{
 if (n < 2)
   return n;
 else
   return Fib(n-2) + Fib(n-1);
}
```

Sumário

Busca Binária

- **Busca binária** consiste em buscar um elemento em um vetor classificado, dividindo-o em duas metades
- Caso o elemento procurado seja o elemento do meio do vetor, a operação é terminada
- Caso o elemento procurado seja menor que o elemento do meio do vetor, procura-se na metade inferior
- Caso o elemento procurado seja maior que o elemento do meio do vetor, procura-se na metade superior
- Trata-se portanto de um procedimento recursivo: o método de busca é definido em termos de si mesmo, com um vetor menor como entrada
- A busca terminará quando o tamanho deste vetor for 1 (operação não recursiva)

Sumário

Busca Binária

- Busca binária:

```
1:  if (baixo > alto)
2:   return(-1);
3:  meio = (baixo + alto)/2;
4:  if (x == a[meio])
5:   return(meio);
6:  if (x < a[meio])
7:   procura x em a[baixo] até a[meio-1];
8:  else
9:   procura x em a[meio+1] até a[alto];
```

- Exemplo: seja o seguinte vetor:

x[0]	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]
12	25	33	37	**48**	57	86	92

- Suponha que se queira procurar o elemento 48, isto é, $x = 48$, entre o item 0 ($baixo = 0$) e 7 ($alto = 7$).

Busca Binária

- Aplicando o algoritmo, tem-se:
  - linha 1: $0 > 7$? Falso, executa linha 3
  - linha 3: $meio = (0 + 7)/2 = 3$
  - linha 4: $x = a[3]$? 48 não é igual a 37, executa linha 6
  - linha 6: $x < a[3]$? 48 não é menor que 37, executa linha 9
  - linha 9: repita com $baixo = meio + 1 = 4$ e $alto = 7$
  - linha 1: $4 > 7$? Falso, executa linha 3
  - linha 3: $meio = (4 + 7)/2 = 5$
  - linha 4: $x = a[5]$? 48 não é igual a 57, executa linha 6
  - linha 6: $x < a[5]$? 48 é menor que 57, executa linha 7
  - linha 9: repita com $baixo = 4$ e $alto = meio - 1 = 4$
  - linha 1: $4 > 4$? Falso, executa linha 3
  - linha 3: $meio = (4 + 4)/2 = 4$
  - linha 4: $x = a[4]$? 48 é igual a 48, retorna $meio = 4$ como resposta.

Sumário

Propriedades das Definições Recursivas

- Recursão significa repetição.
- Da mesma forma que num comando repetitivo a parada é uma preocupação, o mesmo ocorre com a recursão.
- A função recursiva *f* deve ser definida de modo a não envolver *f* para um argumento ou grupo de argumentos.
- Esta será a "saída" da seqüência de chamadas recursivas.
- Nos exemplos vistos, as partes **não**-recursivas das definições são:
  - fatorial: $0! = 1$
  - seqüência de Fibonacci: $fib(0) = 0$; $fib(1) = 1$
  - busca binária:

```
if (baixo > alto)
 return(-1);
if (x == a[meio])
 return(meio);
```

Escrevendo Programas Recursivos

- O desenvolvimento de uma solução recursiva **sem** o algoritmo nem sempre é fácil
- Normalmente, não há porque propor uma solução recursiva
- Entretanto, para alguns problemas a solução recursiva é mais elegante
- Há problemas que são recursivos já na sua definição
- Para estes, a solução recursiva é mais natural.

Torres de Hanói

- Considere o problema das **Torres de Hanói**. Há três torres A, B e C e há n discos de diâmetros diferentes dispostos na torre A, sempre com o disco de maior diâmetro abaixo de um disco de menor diâmetro. Como colocar todos os discos na torre C, usando a torre B como intermediária, passando um único disco de cada vez e sem inverter a ordem dos diâmetros (maior abaixo do menor) em nenhuma torre.
- Se uma solução para $n - 1$ discos for encontrada, tem-se a solução para n discos.
- No caso trivial de $n = 1$, a solução é simples.
- Se for possível declarar uma solução para n discos em termos de $n - 1$, haverá uma solução recursiva.

Torres de Hanói

- Mover n discos de A para C, usando B como auxiliar:
  1. Se $n = 1$, mova o único disco de A para C e pare.
  2. Mova os $n - 1$ discos de A para B, usando C como auxiliar.
  3. Mova o último disco de A para C.
  4. Mova os $n - 1$ discos de B para C, usando A como auxiliar.
- Programa:

```
void hanoi(char de, char para, char via, int n)
{
 if (n >= 1)
 {
   hanoi(de, via, para, n-1);
   printf("%c => %c\n", de, para);
   hanoi(via, para, de, n-1);
 }
}
```

Sumário

Simulando a Recursividade

- Todo problema com solução recursiva pode ser resolvido iterativamente
- Algumas linguagens de programação não permitem recursão
- Basta examinar com detalhes os mecanismos usados para implementar a recursividade para que seja possível simulá-los usando técnicas não-recursivas
- A solução recursiva geralmente é mais cara computacionalmente do que a solução não-recursiva
- A possibilidade de gerar uma solução não-recursiva a partir de um algoritmo recursivo é muito interessante em várias situações.

Sumário

Simulando a Recursividade

- Antes de examinar as ações de uma rotina recursiva, deve-se examinar a ação de uma rotina **não**-recursiva.
- Para o comando

  ```
  rota(x);
  ```

- onde *rota* é definida como

  ```
  rota(a)
  ```

- *x* é referido como um **argumento** (da função chamadora) e *a* como um **parâmetro** (da função chamada).
- O que acontece quando uma função é chamada?
  1. Passagem de argumentos,
  2. Alocação e iniciação de variáveis locais,
  3. Transferência do controle para a função.

Simulando a Recursividade

- Cada uma das três etapas:
  1. **Passagem de argumentos**: para um parâmetro em C, uma cópia do argumento é criada localmente dentro da função.
  2. **Alocação e iniciação de variáveis locais**: depois que os argumentos são passados, as variáveis locais da função serão alocadas. Incluem as declaradas diretamente na função e as temporárias criadas durante a execução.
  3. **Transferência do controle para a função**: neste ponto, o **endereço de retorno** deve ser passado à função (armazenado na pilha), para que seja possível passar também o controle. Este controle deverá ser devolvido à função chamadora ao final da execução da função, daí a necessidade do endereço de retorno.

Sumário

Retorno de uma Função

- Quando uma função termina sua execução, o controle retorna para a função chamadora. Três ações são executadas:
  1. O endereço de retorno é recuperado da pilha e armazenado em um lugar seguro
  2. A área de dados da função é liberada. Essa área contém todas as variáveis locais (incluindo as cópias locais dos argumentos), as temporárias e o endereço de retorno
  3. Desvia-se para o endereço de retorno salvo anteriormente. Isso devolve o controle à função chamadora no ponto imediatamente posterior ao comando que efetuou a chamada. Se a função retorna um valor, o mesmo será colocado num lugar seguro (registrador de hardware) de onde a função chamadora poderá recuperá-lo.

Retorno de uma Função

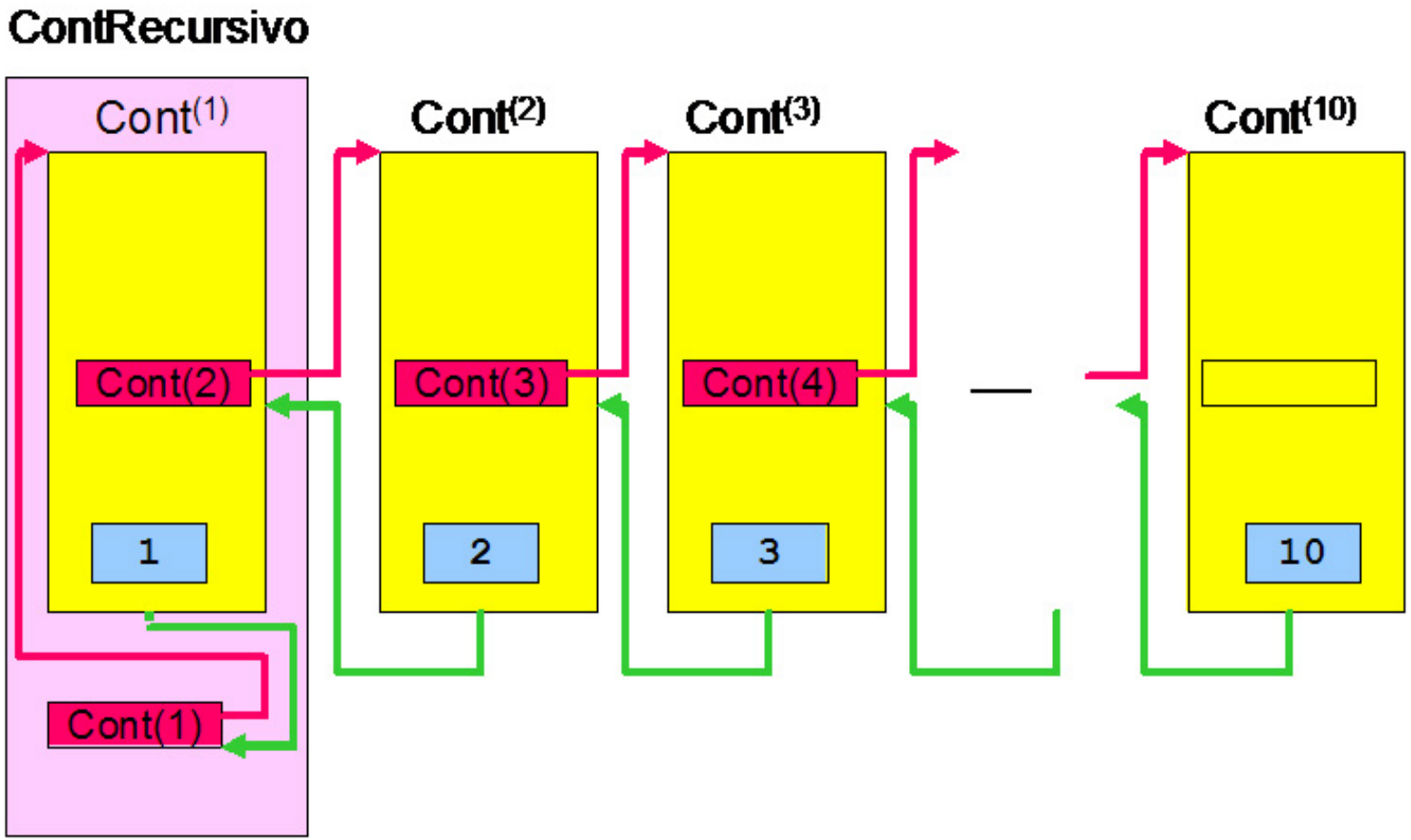
- A seqüência de endereços de retorno forma uma pilha: se uma função *A* chama uma função *B*, que chama uma função *C*, a pilha conterá no topo o endereço de retorno da função *C* (endereço dentro de *B*), depois da função *B* (endereço dentro de *A*).
- Ou seja, de *C* só é possível retornar para a função *B* (função chamadora de *C*) e de *B* só é possível retornar para a função *A* (função chamadora de *B*).
- Conclusão: chamar uma função corresponde a colocar um endereço na pilha (*push*) e retornar corresponde a retirar um endereço da pilha (*pop*).
- E no caso da função recursiva?

Implementando uma Função Recursiva

- Cada vez que uma função recursiva chama a si mesma, uma área de dados totalmente nova precisa ser alocada,
- Essa área de dados precisa ter todos os parâmetros, variáveis locais, temporárias e um endereço de retorno,
- No caso da recursividade, uma área de dados está associada não a uma função isolada, mas a uma chamada dessa função,
- Cada chamada acarreta a alocação de uma nova área de dados e toda a referência a um item na área de dados da função destina-se à área de dados da chamada mais recente,
- Da mesma forma, todo retorno provoca a liberação da atual área de dados e a área de dados alocada anteriormente torna-se a área atual.

Implementando uma Função Recursiva

- Veja novamente a figura do contador recursivo:



Eficiência da Recursividade

- Geralmente uma versão não-recursiva (iterativa) de um programa executará com mais eficiência, em termos de tempo e espaço, do que uma versão recursiva,
- Isso acontece porque o trabalho extra dispendido para entrar e sair de um bloco é evitado na versão não-recursiva,
- Num programa não-recursivo muita atividade de empilhamento e desempilhamento pode ser evitada,
- Contudo, muitas vezes, uma solução recursiva é o método mais natural e lógico de solucionar um problema,
- Alguns problemas são recursivos por natureza e sua solução recursiva é muito mais simples (por exemplo, as Torres de Hanói).

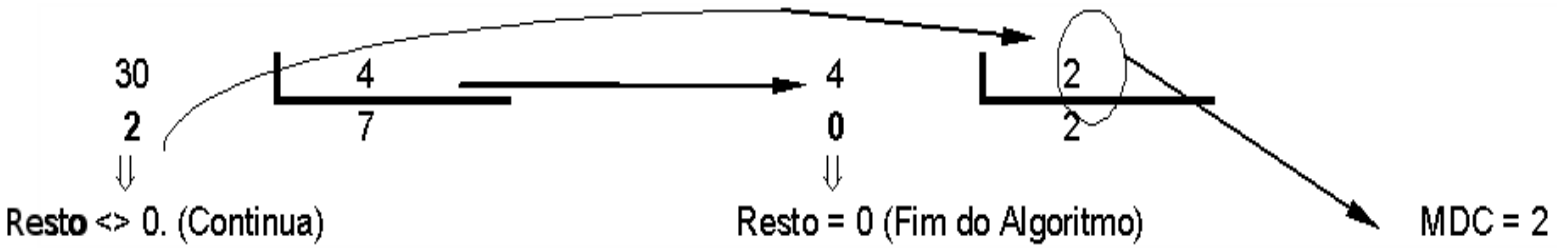
Sumário

MDC

Trabalho 1 (T1) - Individual: Submeter até dia 02/9

Escreva uma função iterativa (f_i) e uma função recursiva (f_r) que calculam o MDC (máximo divisor comum) de 2 números a e b recebidos como parâmetros. Compare f_i e f_r em termos de eficiência (notação *big-oh*: $\mathcal{O}$).

Para o cálculo do MDC, deve-se usar o Algoritmo de Euclides:
Ex: $a = 30$ e $b = 4$:



Referências I


Engelbrecht, Angela
Estrutura e Recuperação de Informação II.
Apostila. Engenharia de Computação. PUC-Campinas, 2000.


Horowitz, E., Sahni, S. Rajasekaran, S.
Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1998.


Rosa, J. L. G.
Recursão. SCC-201 Introdução à Ciência da Computação II (capítulo 2).
Slides. Ciência de Computação. ICMC/USP, 2009.

Referências II


Tenenbaum, A. M., Langsam, Y., Augestein, M. J.
Estruturas de Dados Usando C.
Makron Books, 1995.