10^a Lista de Exercícios de SMA332 - Cálculo II

Professor: Thais Jordão e Wagner Vieira Leite Nunes   17.02.2014

Exercício 1 *Calcule integral de linha* $\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{r}$, *onde:*

a) $\vec{F}(x,y,z) \doteq x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$, *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\gamma(t) \doteq (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, *para* $t \in [0, 2\pi]$. *Obtenha uma representação geométrica do traço da curva* γ.

b) $\vec{F}(x,y) \doteq x^2 \cdot \vec{e}_2$, *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\gamma(t) \doteq \left(t^2, 3\right)$, *para* $-t \in [-1, 1]$. *Obtenha uma representação geométrica do traço da curva* γ.

c) $\vec{F}(x,y) \doteq x^2 \cdot \vec{e}_1 + (x-y) \cdot \vec{e}_2$, *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\gamma(t) \doteq (t, \operatorname{sen}(t))$, *para* $t \in [0, \pi]$. *Obtenha uma representação geométrica do traço da curva* γ.

d) $\vec{F}(x,y,z) \doteq x^2 \cdot \vec{e}_1 + y^2 \cdot \vec{e}_2 + z^2 \cdot \vec{e}_3$, *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\gamma(t) \doteq (2\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), t)$, *para* $t \in [0, 2\pi]$. *Obtenha uma representação geométrica do traço da curva* γ.

Exercício 2 *Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por* $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$, *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças* $\vec{F}$, *para realizar o deslocamento da partícula do ponto* $\gamma(a)$ *até o ponto* $\gamma(b)$, *nos seguintes casos:*

a) $\gamma(t) \doteq (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, *para* $t \in [0, 2\pi]$, *isto é,* $a = 0$ *e* $b = 2\pi$.

b) $\gamma(t) \doteq (2t+1, t-1, t)$, *para* $t \in [1, 2]$, *isto é,* $a = 1$ *e* $b = 2$.

c) $\gamma(t) \doteq (\cos t, 0, \operatorname{sen} t)$, *para* $t \in [0, 2\pi]$, *isto é,* $a = 0$ *e* $b = 2\pi$.

Exercício 3 *Calcule o valor da integral de linha* $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, *onde* $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \doteq (t^2, \operatorname{sen}(t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercício 4 *Calcule o valor da integral de linha* $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é o segmento de extremidades* $(1,1)$ *e* $(2,3)$, *percorrido no sentido do ponto* $(1,1)$ *para o ponto* $(2,3)$.

Exercício 5 *Calcule o valor da integral de linha* $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$, *o traço da curva parametrizada* γ *é o segmento de reta de extremidades nos pontos* $(0,0,0)$ *e* $(1,2,1)$, *percorrido no sentido do ponto* $(0,0,0)$ *para o ponto* $(1,2,1)$.

Exercício 6 *Calcule o valor da integral de linha* $\int_\gamma x\,dx + dy + 2\,dz$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é a interseção do parabolóide* $z = x^2 + y^2$ *com o plano* $z = 2x + 2y - 1$, *onde o sentido de percurso deve ser escolhido de modo que a projeção do traço da curva* γ, *no plano* xOy, *seja percorrido no sentido anti-horário (do plano* $\mathbb{R}^2$*).*

Exercício 7 *Calcule o valor da integral de linha* $\int_\gamma 2x\,dx - dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é a* $x^2 + y^2 = 4$, *para* $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$, *onde o sentido de percurso é do ponto* $(2,0)$ *para o ponto* $(0,2)$.

Exercício 8 *Calcule o valor da integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}\,dx \ + \ \frac{x}{4x^2+y^2}\,dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é a curva* $4x^2+y^2=9$, *onde o sentido de percurso é anti-horário (no plano* $\mathbb{R}^2$*).*

Exercício 9 *Dado* $R>0$, *considermos a curva parametrizada diferenciável* $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t)=(R\cos(t), R\,\text{sen}(t))$, *para* $t\in[0,2\pi]$. *Mostre que o valor da integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx \ + \ \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ **não** *depende de* $R>0$.

Exercício 10 *Calcule o valor da integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma \sqrt[3]{x}\,dx \ + \ \frac{1}{1+y^2}\,dy$, *onde o traço da curva paremtrzada* γ *é o formada pelos lados quadrado centrado na origem e lado 2, percorrido no sentido anti-horário (do plano* $\mathbb{R}^2$*).*

Exercício 11 *Calcule o valor da integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{r}$ *onde o campo vetorial* $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *é dado por* $\vec{F}(x,y)\doteq(0,x+y^2)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *e a* γ *é a curva do Exercício anterior.*

Exercício 12 *Calcule o valor da integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma (x-y)\,dx \ + \ e^{x+y}\,dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é a fronteira do triângulo de vértices* $(0,0),(0,1)$ *e* $(1,2)$, *orientada no sentido anti-horário (do plano* $\mathbb{R}^2$*).*

Exercício 13 *Calcule o valor das integrais curvilíneas:*

a) $\displaystyle\int_\gamma \left(x^2+y^2\right)\,ds$, *onde* $\gamma(t)\doteq(t,t)$, *para* $t\in[-1,1]$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \left(2xy+y^2\right)\,ds$, *onde* $\gamma(t)\doteq(t+1,t-1)$, *para* $t\in[0,1]$.

c) $\displaystyle\int_\gamma xyz\,ds$, *onde* $\gamma(t)\doteq(\cos t, \text{sen} t, t)$, *para* $t\in[0,2\pi]$.

d) $\displaystyle\int_\gamma (x+y+z)\,ds$, *onde* $\gamma(t)\doteq(t,2t,3t)$, *para* $t\in[0,1]$.