Algoritmos e Estruturas de Dados II

GRAFOS – Conceitos Básicos (Parte 1)

Profa. Elaine Parros Machado de Sousa

alterações: Cristina Dutra de Aguiar Ciferri

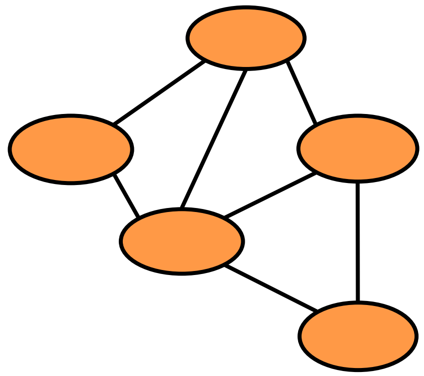
Material baseado em aulas dos professores:
Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr. e
Maria Cristina Oliveira.

ICMC USP
SÃO CARLOS

MOTIVAÇÃO...

- Como modelar problemas que envolvam conjuntos de objetos e relacionamentos entre pares de objetos estabelecidos por conexões?
- Exemplo – Google Maps
  - como ir da cidade A para cidade B?
  - quais os caminhos possíveis?
  - qual o caminho mais curto?
  - qual o caminho de menor custo?

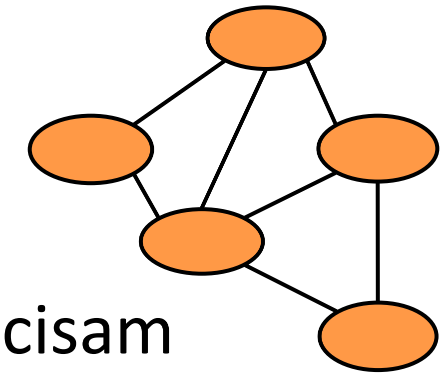
MOTIVAÇÃO...



- **Grafos**
  - estruturas abstratas que modelam objetos e a relação (conexão) entre eles

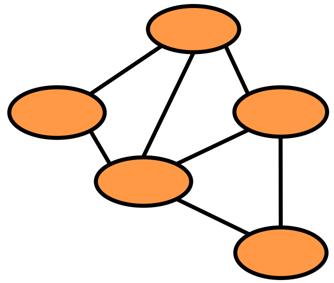
- **Teoria dos Grafos**
  - área de matemática combinatória voltada à resolução de problemas em computação

MOTIVAÇÃO...



- Muitas aplicações em computação precisam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos.
- Exemplos
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é o menor caminho entre dois objetos?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?
  - ...

MOTIVAÇÃO...

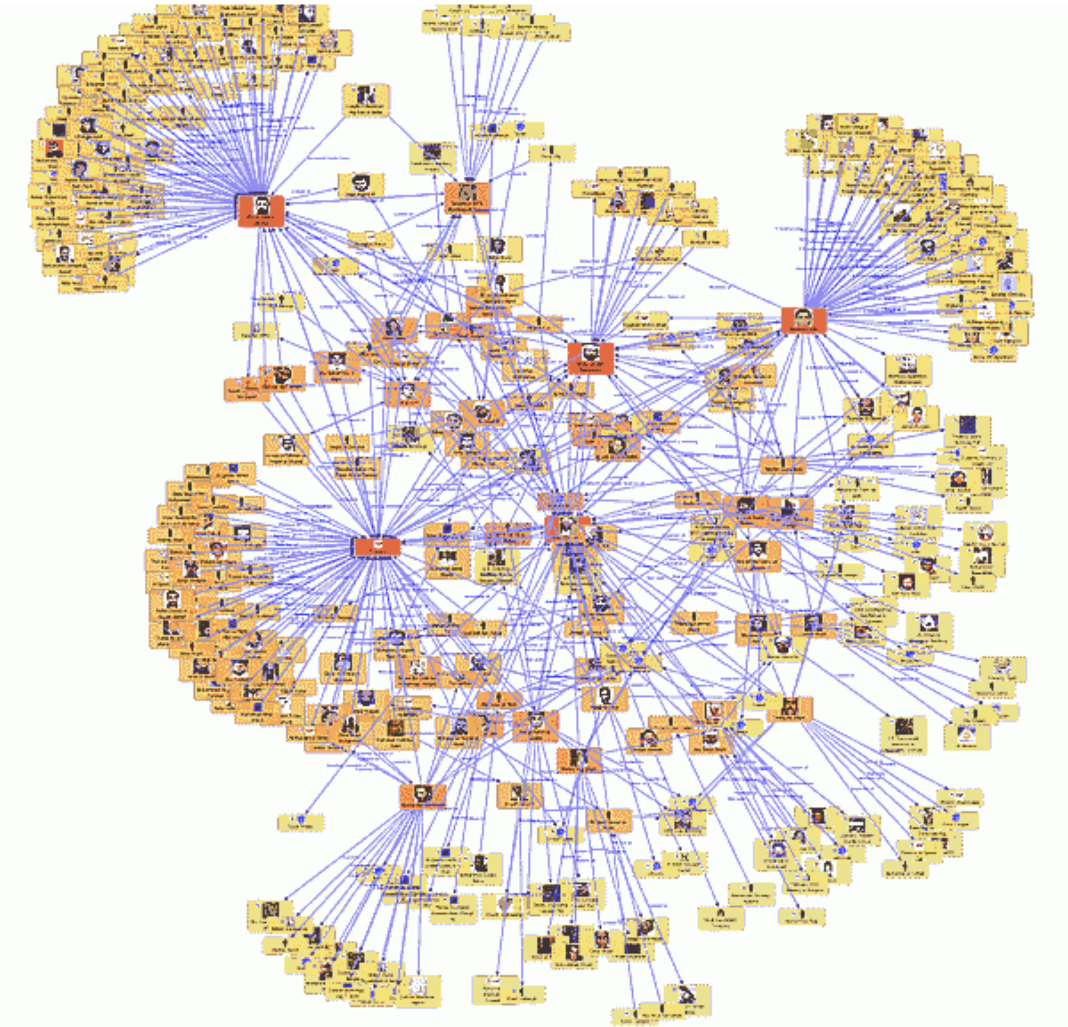


- Exemplos de problemas práticos que podem ser modelados com grafos:
  - Web
    - ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante.
    - documentos conectados por *links.*
  - Mapas
    - descobrir o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.
    - cidades conectadas por estradas.
  - Redes Sociais
    - descobrir pesquisadores com o maior número de colaboradores de outros países
    - pesquisadores conectados por projetos de pesquisa.

MOTIVAÇÃO...

- Mais exemplos de problemas práticos que podem ser modelados com grafos:
  - modelagem de circuitos eletrônicos
  - redes de transporte
  - redes de energia
  - redes de computadores
  - ...

EXEMPLOS



EXEMPLOS

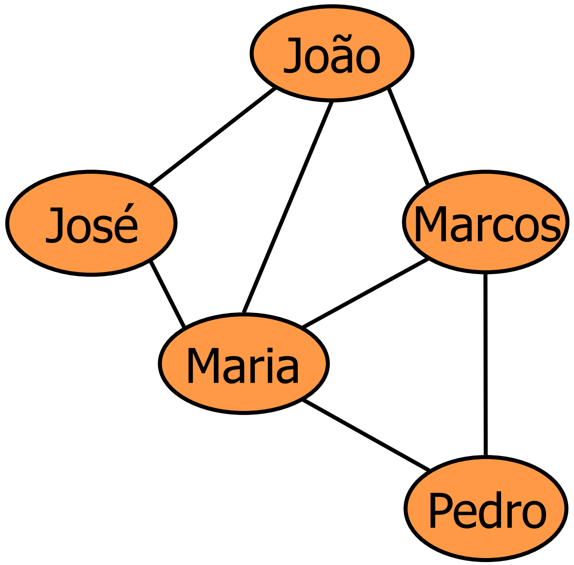

Fortaleza
Juazeiro do Norte
Petrolina
Recife
Maceió
Aracaju
Salvador
Vitória da Conquista
Montes Claros
Brasília
Porto Seguro
Ipatinga
Belo Horizonte
Araçatuba
S.J. dos Campos
Campos
Macaé
Cascavel
Curitiba
São Paulo
Rio de Janeiro
Chapecó
Florianópolis
ROTA EM APROVAÇÃO
Passo Fundo
Porto Alegre

EXEMPLOS

RNP
Boa Vista
Macapá
Belém
Santarém
São Luís
Alcântara
Tefé
Manaus
Fortaleza
Marabá
Teresina
Fernando de Noronha
Natal
Campina Grande
Recife
Porto Velho
Rio Branco
Palmas
Maceió
Aracaju
Salvador
EUA
Cuiabá
Cáceres
Brasília
Goiânia
Velocidade das conexões
2 Mbps
1 Mbps
512 Kbps
384 Kbps
256 Kbps
128 Kbps
64 Kbps
64 Kbps (solicitadas)
64 Kbps (pendentes de definição de pontos de presença)
EUA
EUA
Campo Grande
Belo Horizonte
Vitória
EUA
Rio de Janeiro
São Paulo
Curitiba
EUA
Florianópolis
Porto Alegre
f00199pd.gif
Copyright © 1999, RNP.

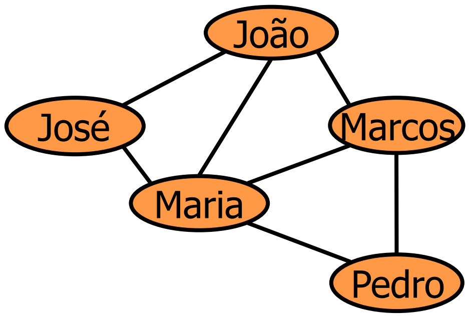
O QUE É UM GRAFO?

- **Grafo G** definido como um par (***V, A***) :
  - ***V*** : conjunto de nós chamados **vértices** (ou nós).
  - ***A*** : conjunto de pares de vértices chamados **arestas** (ou arcos).



- Exemplo:
  - Rede social de amizade
    - cada vértice é uma pessoa.
    - existe uma aresta entre duas pessoas se e somente se essas pessoas são amigas.

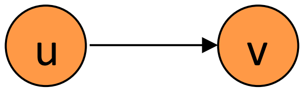
GRAFO SOBRE AMIZADE



- Se eu sou seu amigo, isso significa que você é meu amigo?
  - Se aresta (*x*,*y*) sempre implica em (*y*,*x*) **=>** grafo **não-direcionado**
  - Caso contrário **=>** grafo **direcionado** (ou **dígrafo**).
- Eu sou amigo de mim mesmo?
  - Aresta (*x*,*x*) **=>** **laço** ou ***self-loop***.
- Eu posso ser seu amigo diversas vezes?
  - relação modelada com **arestas múltiplas** ou **paralelas**.

DEFINIÇÃO – GRAFO DIRECIONADO (Dígrafo)

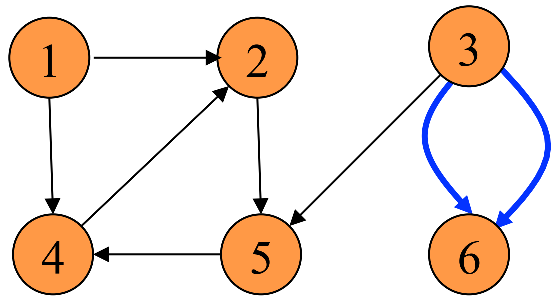
- Um **grafo direcionado (grafo orientado ou dígrafo)** *G* é um par *(V,A)*, em que:
  - *V* é um conjunto finito de vértices
  - *A* é um conjunto de arestas
    - relação binária ordenada em *V*
- Uma aresta *(u,v)* sai do vértice ***u*** (origem) e chega no vértice ***v*** (destino)



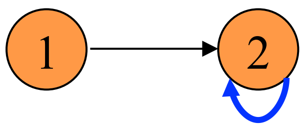
- Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo **=>** ***self-loops***.
- Podem existir arestas com mesma origem e mesmo destino **=>** ***arestas* múltiplas**.

GRAFOS DIRECIONADOS (DÍGRAFOS)

- G =(V,A)
  - V =
  - A =

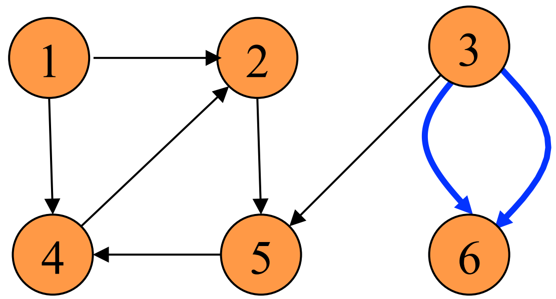


- G = (V,A)
  - V =
  - A =

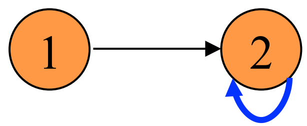


GRAFOS DIRECIONADOS (DÍGRAFOS)

- G =(V,A)
  - V = {1,2,3,4,5,6} e
  - A = {(1,2),(1,4),(2,5),(4,2),(5,4), (3,5),(3,6), (3,6)}



- G = (V,A)
  - V = (1,2) e
  - A = {(1,2),(2,2)}



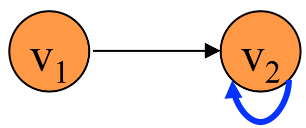
Grafos Direcionados
Vértices Adjacentes

- Em um grafo direcionado, se existe uma aresta *(u,v)*
  - o vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
  - a aresta **sai** do vértice *u* (origem)
  - a aresta **chega** no vértice *v* (destino)
  - a existência de (*u*,*v*) **não implica** na existência de (*v*,*u*), ou seja o vértice *u* **não é adjacente** ao vértice *v*
  - os vértices *u* e *v* são **vizinhos**

v_1 é adjacente a v_2 ?

v_2 é adjacente a v_1 ?

v_1 e v_2 são vizinhos ?



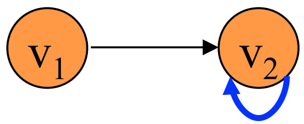
Grafos Direcionados
Vértices Adjacentes

- Em um grafo direcionado, se existe uma aresta *(u,v)*
  - o vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
  - a aresta **sai** do vértice *u* (origem)
  - a aresta **chega** no vértice *v* (destino)
  - a existência de (*u*,*v*) **não implica** na existência de (*v*,*u*), ou seja o vértice *u* **não é adjacente** ao vértice *v*
  - os vértices *u* e *v* são **vizinhos**

v_1 é adjacente a v_2 ? NÃO

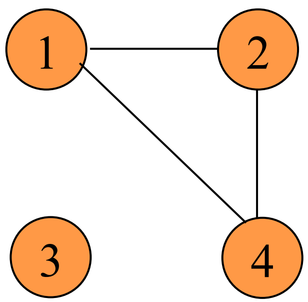
v_2 é adjacente a v_1 ? SIM

v_1 e v_2 são vizinhos ? SIM



DEFINIÇÃO – GRAFO NÃO DIRECIONADO

- Um **grafo não direcionado** *G* é um par *(V,A)*, em que o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados
  - *(u,v)* e *(v,u)* são considerados como uma única aresta
  - a relação de **adjacência** é **simétrica**
  - ***self-loops*** não são permitidos

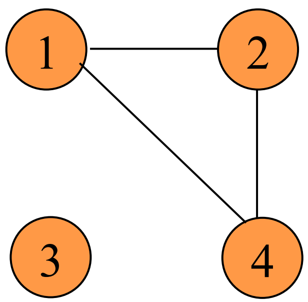


- G = (V,A)
  - V =
  - A =

DEFINIÇÃO – GRAFO NÃO DIRECIONADO

- Um **grafo não direcionado** *G* é um par *(V,A)*, em que o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados
  - *(u,v)* e *(v,u)* são considerados como uma única aresta
  - a relação de **adjacência** é **simétrica**
  - ***self-loops*** não são permitidos

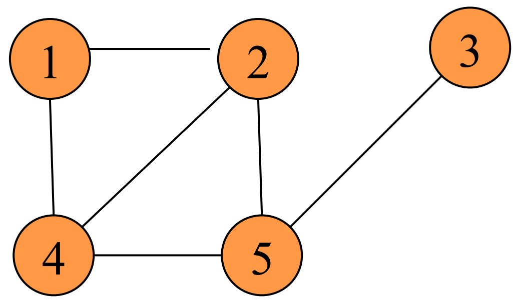
grafo simples: não possui laços ou arestas múltiplas



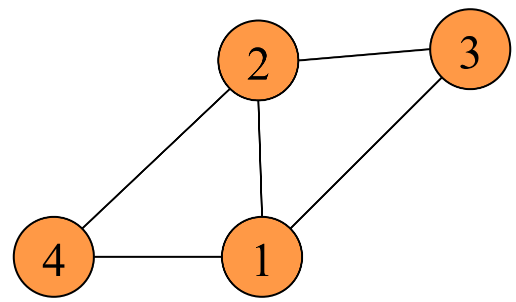
- G = (V,A)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - A = {(1,2),(1,4),(2,4)}

GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

- G = (V,A)
  - V =
  - A =

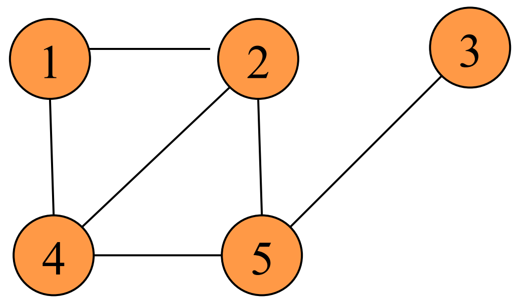


- G = (V,A)
  - V =
  - A =

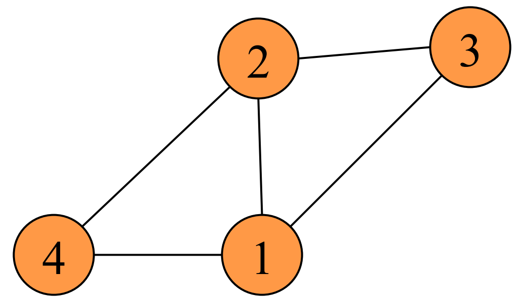


GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4,5} e
  - A = {(1,2),(1,4),(2,5),(4,2),(5,4),(3,5)}



- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4} e
  - A = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)}



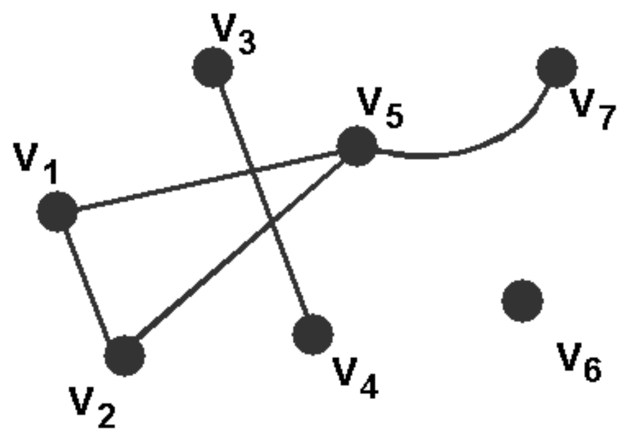
Grafos Não Direcionados
Vértices Adjacentes

- Dois vértices *u* e *v* de um grafo não direcionado são **adjacentes** (ou vizinhos) quando eles forem os extremos de uma mesma aresta (*u*,*v*).

v_3 é adjacente a v_4 ?

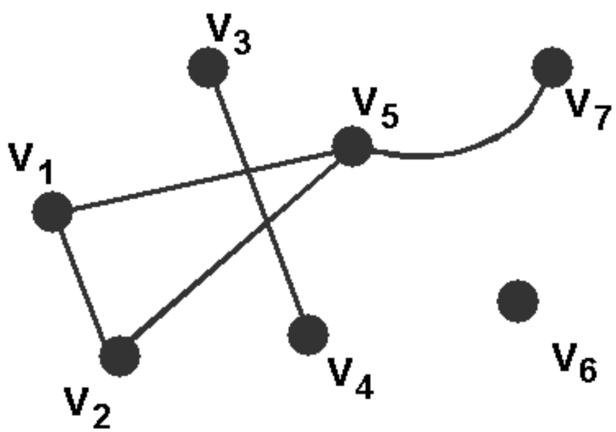
v_4 é adjacente a v_3 ?

v_5 é adjacente a v_4 ?



Grafos Não Direcionados
Vértices Adjacentes

- Dois vértices *u* e *v* de um grafo não direcionado são **adjacentes** (ou vizinhos) quando eles forem os extremos de uma mesma aresta (*u*,*v*).



v_3 é adjacente a v_4 ? SIM

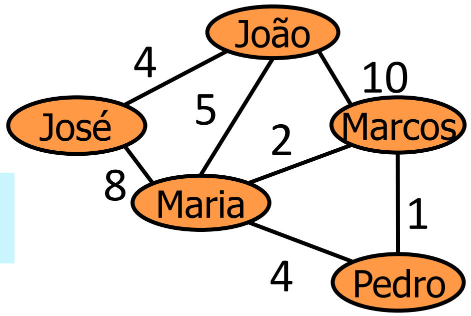
v_4 é adjacente a v_3 ? SIM

v_5 é adjacente a v_4 ? NÃO

A aresta (v_3,v_4) é dita incidente a v_3 e a v_4

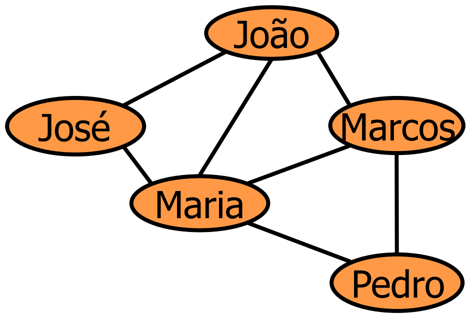
GRAFO SOBRE AMIZADE

- O quanto você é meu amigo?
  - **Grafo ponderado =>** as arestas possuem um peso (valor numérico) associado.



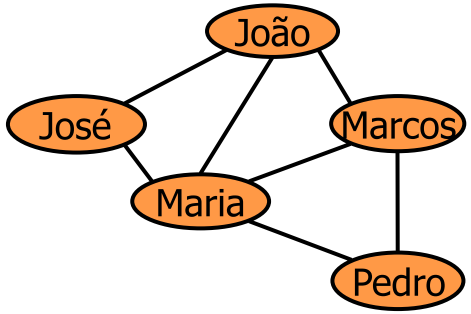
arestas: *triplas (u, v, valor)*

  - **Grafo não ponderado =>** todas as arestas possuem um mesmo peso.



arestas: *duplas (u, v)*

GRAFO SOBRE AMIZADE



- Quem possui mais (ou menos) amigos?
  - Quantidade de relacionamentos (conexões)
  - **Grau** do vértice **=>** número de vértices adjacentes a ele.
    - Pessoa mais popular tem o vértice de maior grau
    - "Ermitões" são vértices de grau zero.

vértice isolado: vértice de grau 0
vértice final: vértice de grau 1
vértice par: vértice com grau par
vértice ímpar: vértice com grau ímpar

DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

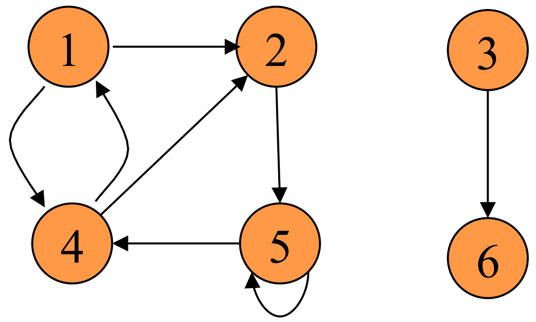
- O **grau** de um vértice em **grafos direcionados** é dado por:

  número de arestas que saem dele (***grau de saída ou out-degree***)

  +

  número de arestas que chegam nele (***grau de entrada ou in-degree***).

  - Ex: vértice 5 tem:
    - grau de entrada =
    - grau de saída =
    - grau =



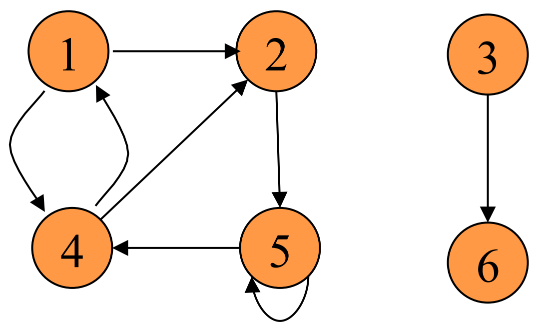
DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

- O **grau** de um vértice em **grafos direcionados** é dado por:

  número de arestas que saem dele (***grau de saída ou out-degree***)

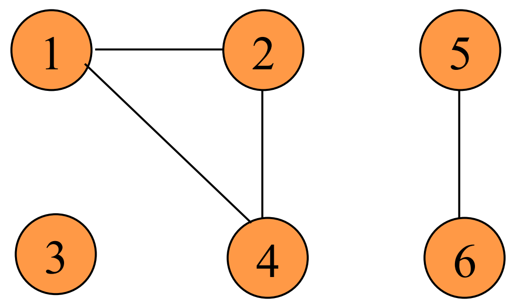
  número de arestas que chegam nele (***grau de entrada ou in-degree***).

  - Ex: vértice 5 tem:
    - grau de entrada = 2
    - grau de saída = 2
    - grau = 4



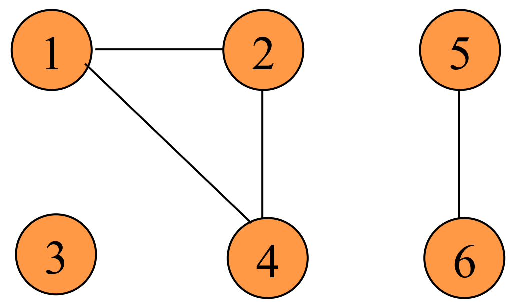
DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

- O **grau** de um vértice em **grafos não direcionados** é dado pelo número de arestas que incidem nele.
  - um vértice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.
    - grau do vértice 1:
    - grau do vértice 3:

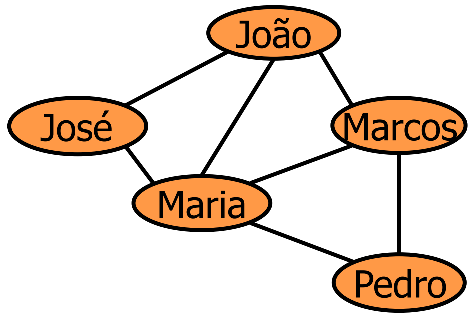


DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

- O **grau** de um vértice em **grafos não direcionados** é dado pelo número de arestas que incidem nele.
  - um vértice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.
    - grau do vértice 1: 2
    - grau do vértice 3: 0 (isolado)



GRAFO SOBRE AMIZADE



- Eu estou ligado a uma celebridade por uma cadeia de amigos?
  - existe um caminho entre mim e uma celebridade?
  - **caminho** **=>** sequência de arestas que conectam dois vértices.

DEFINIÇÕES - CAMINHO

- Um **caminho de comprimento *k*** de um vértice *x* a um vértice *y* em um grafo $G = (V,A)$ é uma sequência de vértices **$(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$** tal que:
  - $x = v_0$
  - $y = v_k$
  - e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1,2,\ldots,k$.

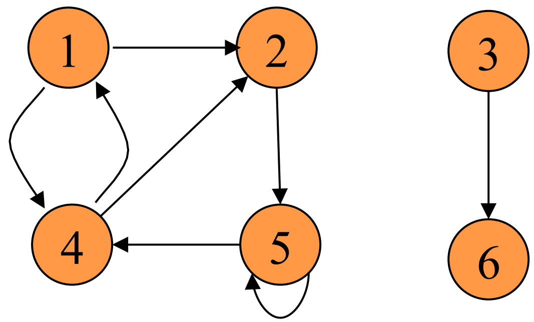
caminho de *k* vértices: formado por *k-1* arestas

- O **comprimento** de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém:
  - os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$
  - as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.

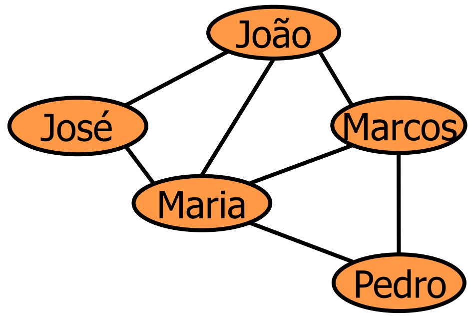
DEFINIÇÕES – CAMINHO

- Se existir um caminho ***c*** de ***x*** a ***y*** então *y* é **alcançável** a partir de *x* via *c*.
- **Caminho simples =>** todos os vértices do caminho são distintos.
- **Caminho Hamiltoniano =>** caminho que passa por todos os vértices de um grafo exatamente uma vez
- Ex.: caminho **(1,2,5,4)** => simples, com comprimento 3

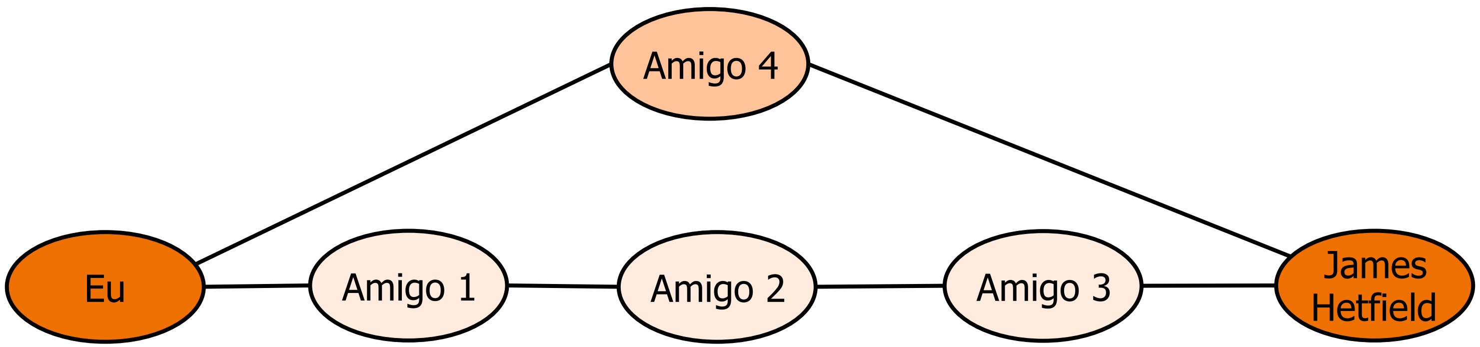
  caminho **(1,4,1,2)** => não é simples, com comprimento 3



GRAFO SOBRE AMIZADE

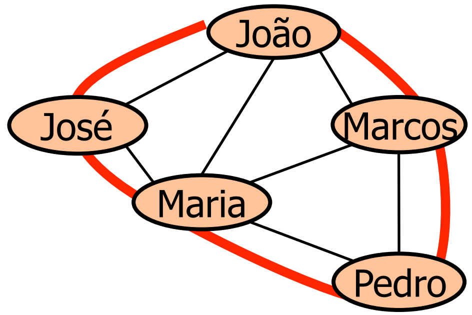


- Quão próxima é a minha ligação com essa celebridade?
  - Diversos caminhos que ligam dois vértices.
  - **Caminho mais curto (menor caminho)**
    - aquele com menor soma de pesos das arestas (ponderado)
    - ou com menor número de arestas (não ponderado).
  - **Caminho mais longo**
    - aquele com maior soma de pesos das arestas (ponderado)
    - ou com maior número de arestas (não ponderado).



GRAFO SOBRE AMIZADE

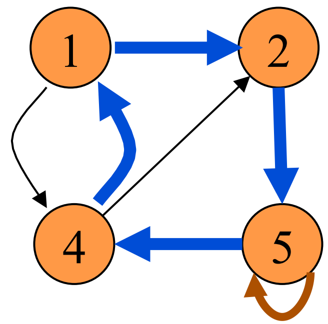
- Quanto tempo demora para que eu ouça uma fofoca que contei?



- **Ciclo =>** caminho no qual o primeiro e o último vértices são iguais.
- **Ciclo simples =>** ciclo em que nenhum vértice se repete (exceto primeiro e último).
- **Grafo cíclico =>** possui pelo menos um ciclo.
- **Grafo acíclico =>** grafo sem ciclos.

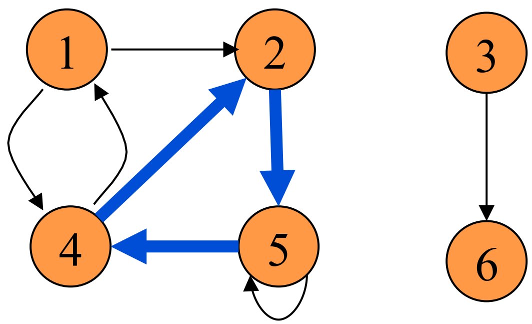
DEFINIÇÕES - CICLO

- Em um **grafo direcionado**:
  - Um caminho **(v_0, v_1,...,v_k)** forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos **uma aresta**.
    - ex: (1,2,5,4,1)
  - O ciclo é **simples** se os vértices **v_1, v_2,...,v_k** são distintos.
  - O ***self-loop*** é um ciclo de tamanho 1.
    - Ex: (5,5)



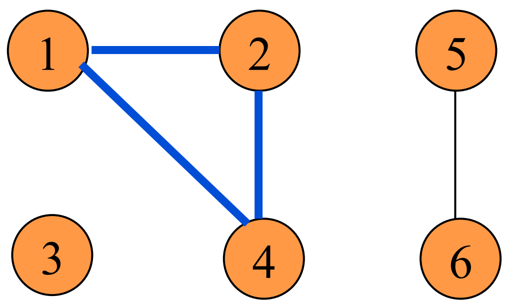
DEFINIÇÕES - CICLO

- Em um **grafo direcionado:**
  - Dois caminhos **(v_0, v_1,..., v_k)** e **(v'_0 ,v'_1 ,...,v'_k)** formam o **mesmo ciclo** se existir um inteiro **j** tal que **$v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$** para i = 0,1,...,k-1.
  - Ex.: caminhos que formam o mesmo ciclo:
    - (2,5,4,2)
    - (5,4,2,5)
    - (4,2,5,4).



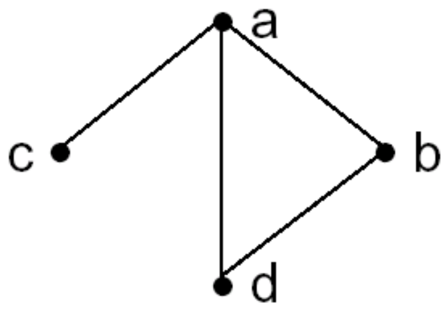
DEFINIÇÕES - CICLO

- Em um grafo **não direcionado**:
  - Um caminho **($v_0,v_1,...,v_k$)** forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos **três arestas**.
    - ex: (1,2,4,1)
  - O ciclo é **simples** se os vértices **$v_1,v_2,...,v_k$** são distintos.

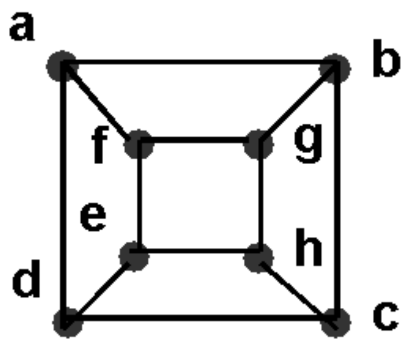


EXEMPLOS

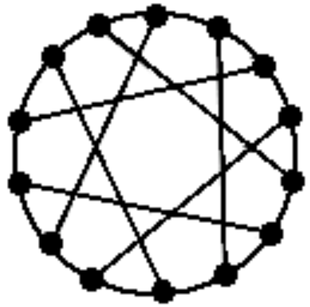
(a)



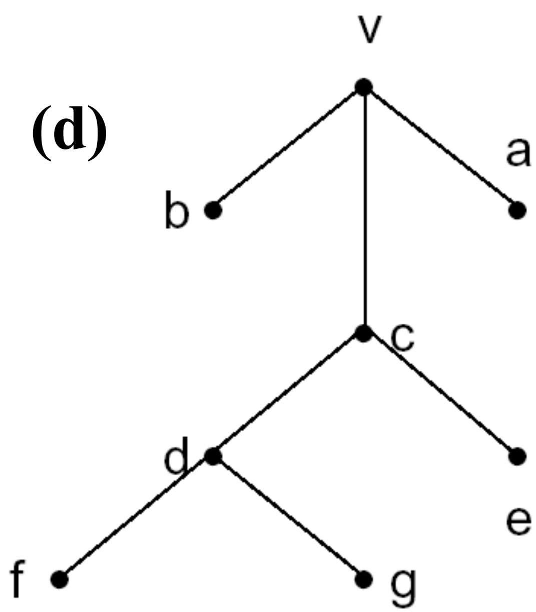
(b)



(c)



(d)



(a) é cíclico ?

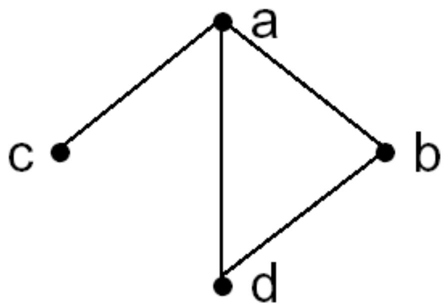
(b) é cíclico ?

(c) é cíclico ?

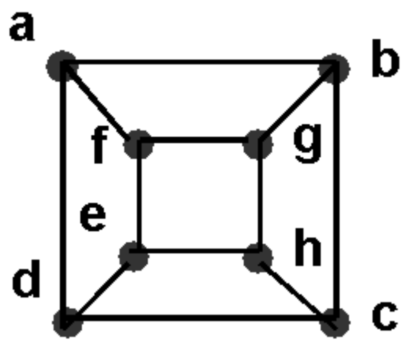
(d) é cíclico ?

Exemplos

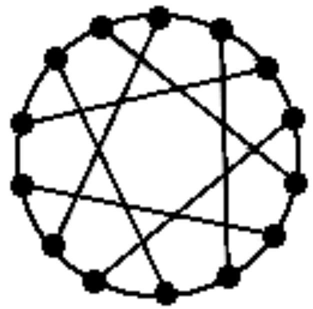
(a)



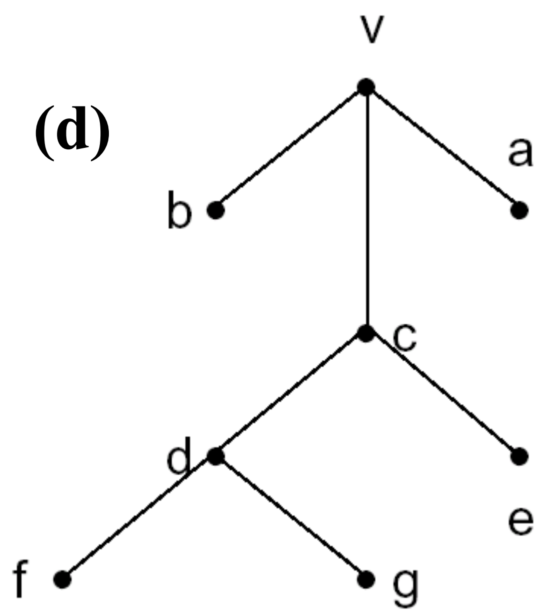
(b)



(c)



(d)



(a) é cíclico ? SIM

(b) é cíclico ? SIM

(c) é cíclico ? SIM

(d) é cíclico ? NÃO

Bibliografia

- N. Ziviani. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- Y. Langsam, M. J. Augenstein and A. M. Tenenbaum. Data Structures Using C and C++, Prentice Hall, 2a Edição, 1996.
- T. H. Cormen. C. E. Leiserson and R. L. Rivest, Introduction to Algorithms, MIT Press, 2nd Edition, 2001.