Árvores Binárias

9/11 e 11/11
Conceitos
Representação e Implementação

Árvore Binárias (AB)

- Uma Árvore Binária (AB) T é um conjunto finito de elementos, denominados nós ou vértices, tal que:
  - (i) Se T = ∅, a árvore é dita vazia, ou
  - (ii) T contém um nó especial, chamado raiz de T, e os demais nós podem ser subdivididos em
    - dois sub-conjuntos distintos T_E e T_D, os quais também são árvores binárias.
    - T_E e T_D são denominados sub-árvore esquerda e sub-árvore direita de T, respectivamente

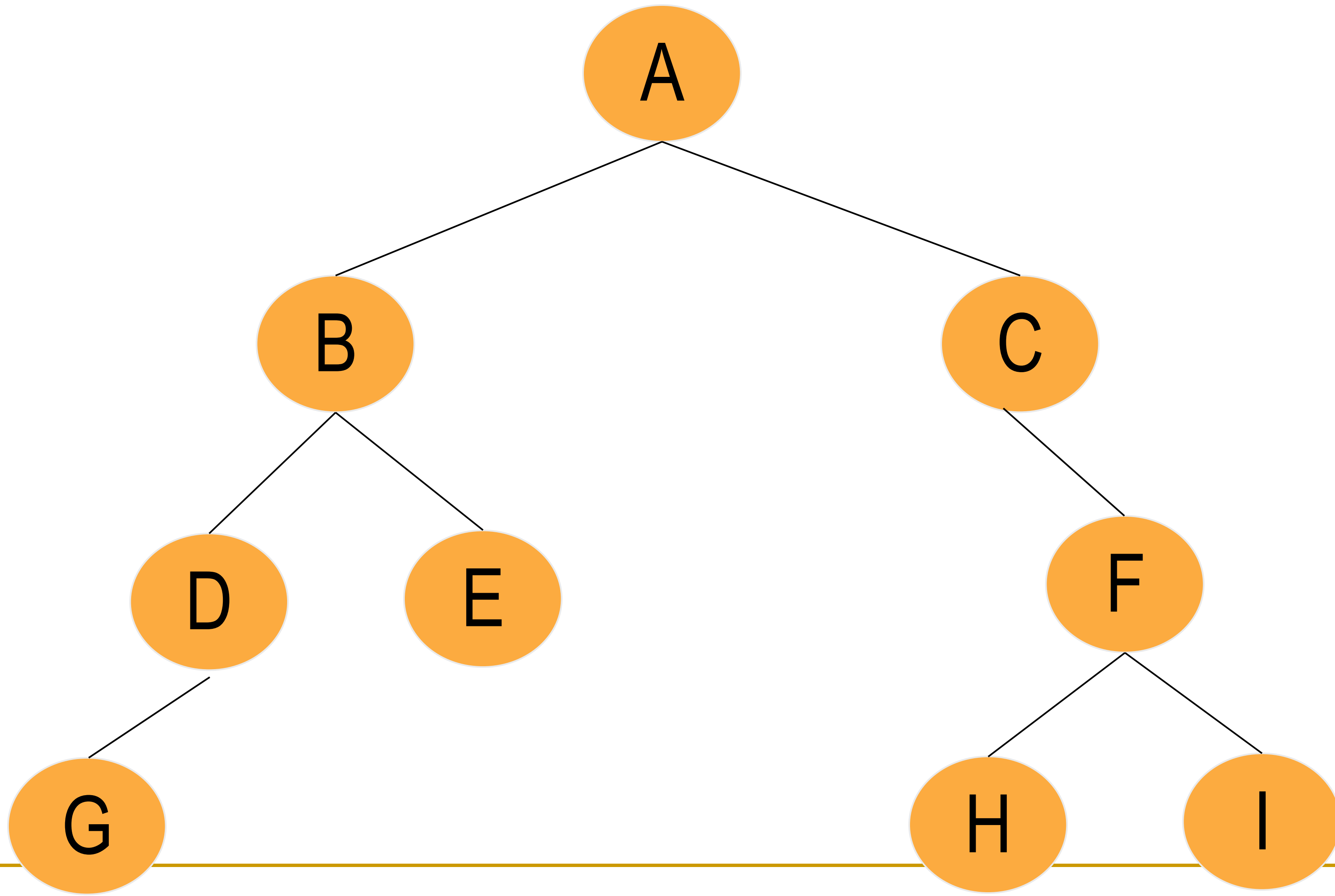
Árvore Binárias (AB) (cont.)

- A raiz da sub-árvore esquerda (direita) de um nó **v**, se existir, é denominada filho esquerdo (direito) de **v**. Pela natureza da árvore binária, o filho esquerdo pode existir sem o direito, e vice-versa

- Se **r** é a raiz de T, diz-se que T_{Er} e T_{Dr} são as sub-árvores esquerda e direita de T, respectivamente

- Árvore Binária é uma árvore ordenada de grau 2.

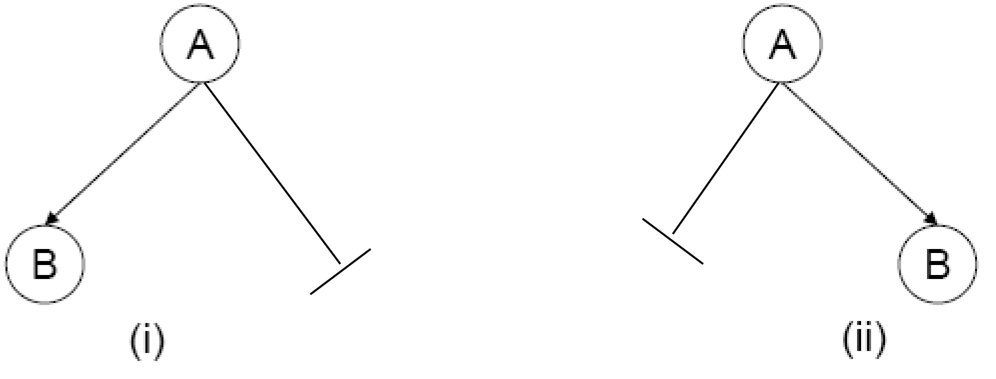
Exemplos de Árvore Binárias (AB)



Exemplos de Árvores Binárias

As duas AB seguintes são distintas

- (i) a primeira tem subárvore direita vazia
- (ii) a segunda tem subárvore esquerda vazia



Eficiência para as operações

- Árvores binárias podem ser usadas para guardar e recuperar informações, com número de operações proporcional à altura da árvore,
  - ou seja, variando, aproximadamente, entre $\log_2 n$ e n (quando se torna degenerada para uma lista).

- Mais tarde veremos como esta manipulação pode ser realizada de maneira a garantir a altura da ordem de $O(\log_2 n)$

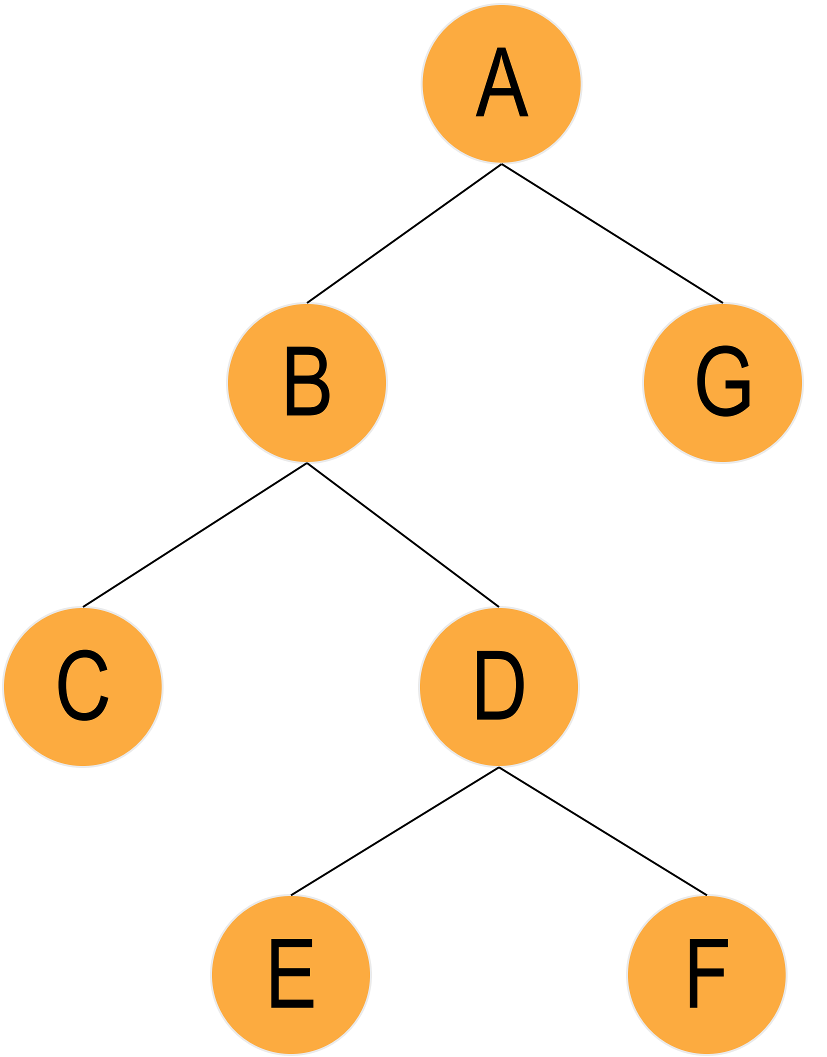
Tipos de AB

- Árvore Estritamente Binária
- Árvore Binária Completa
  - Há duas definições: (i) completa = cheia e (ii) completa = a definição de quase completa, dada abaixo
- Árvore Binária Quase Completa

- Árvore Binária Balanceada (altura difere max 1)
- Árvore Binária Perfeitamente Balanceada (número de nós difere max 1)

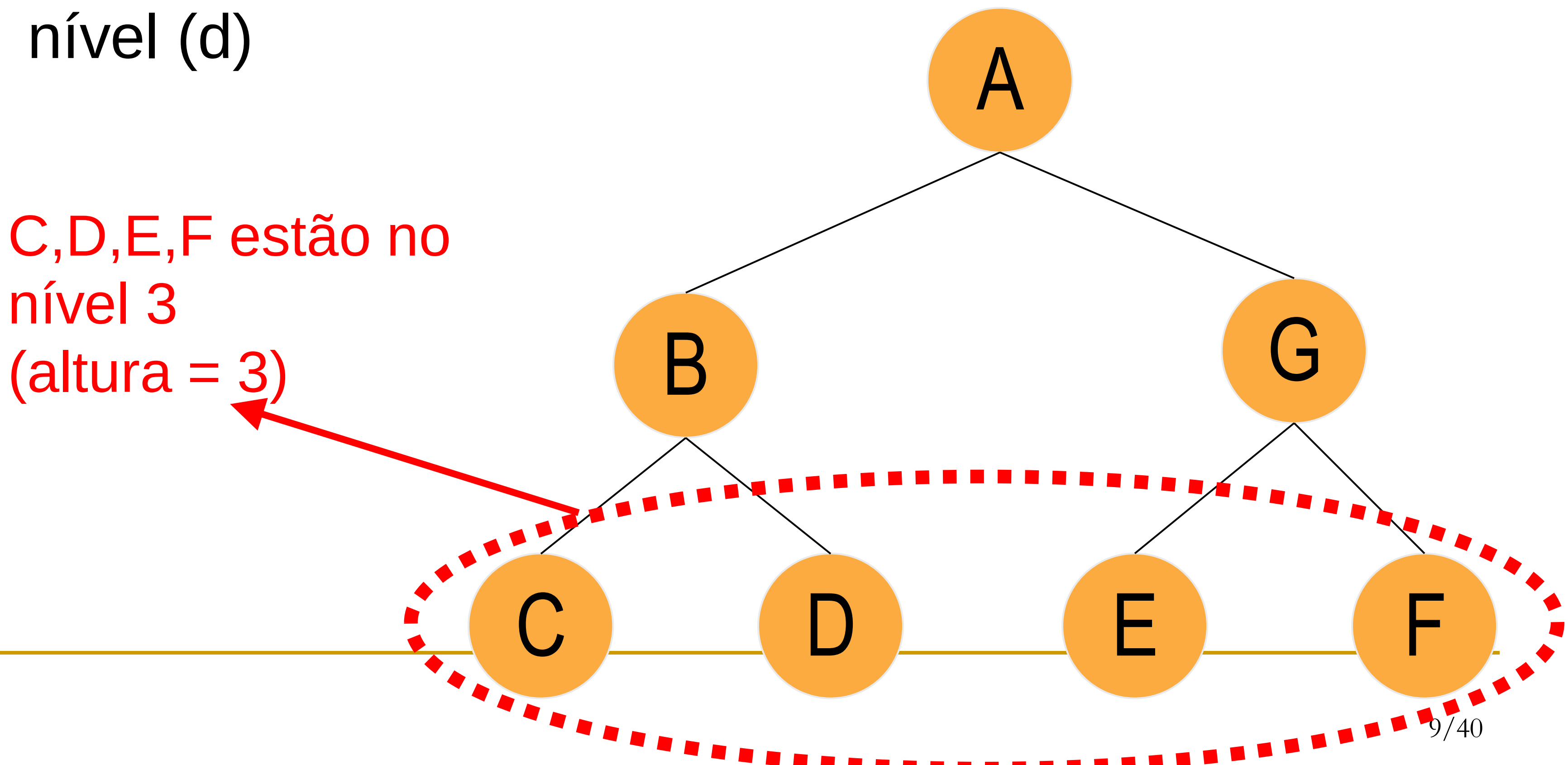
Árvore Estritamente Binária

- Uma **Árvore Estritamente Binária** tem nós que têm ou 0 (nenhum) ou dois filhos
- Nós internos (não folhas) sempre têm 2 filhos



Árvore Binária Completa (Cheia)

- Árvore Binária Completa (Cheia) (ABC)
  - é estritamente binária, de nível d; e
  - todos os seus nós-folha estão no mesmo nível (d)



Árvore Binária Completa (Cheia)

- Dada uma ABC e sua altura, pode-se calcular o número total de nós na árvore
  - p.ex., uma ABC com altura 3 tem 7 nós
    - Nível 1: => 1 nó
    - Nível 2: => 2 nós
    - Nível 3: => 4 nós
    - No. Total de nós = 1 + 2 + 4 = 7
  - Verifique que: se uma ABC tem altura h, então o número de nós da árvore é dado por:

$$\boxed{N = 2^h - 1}$$

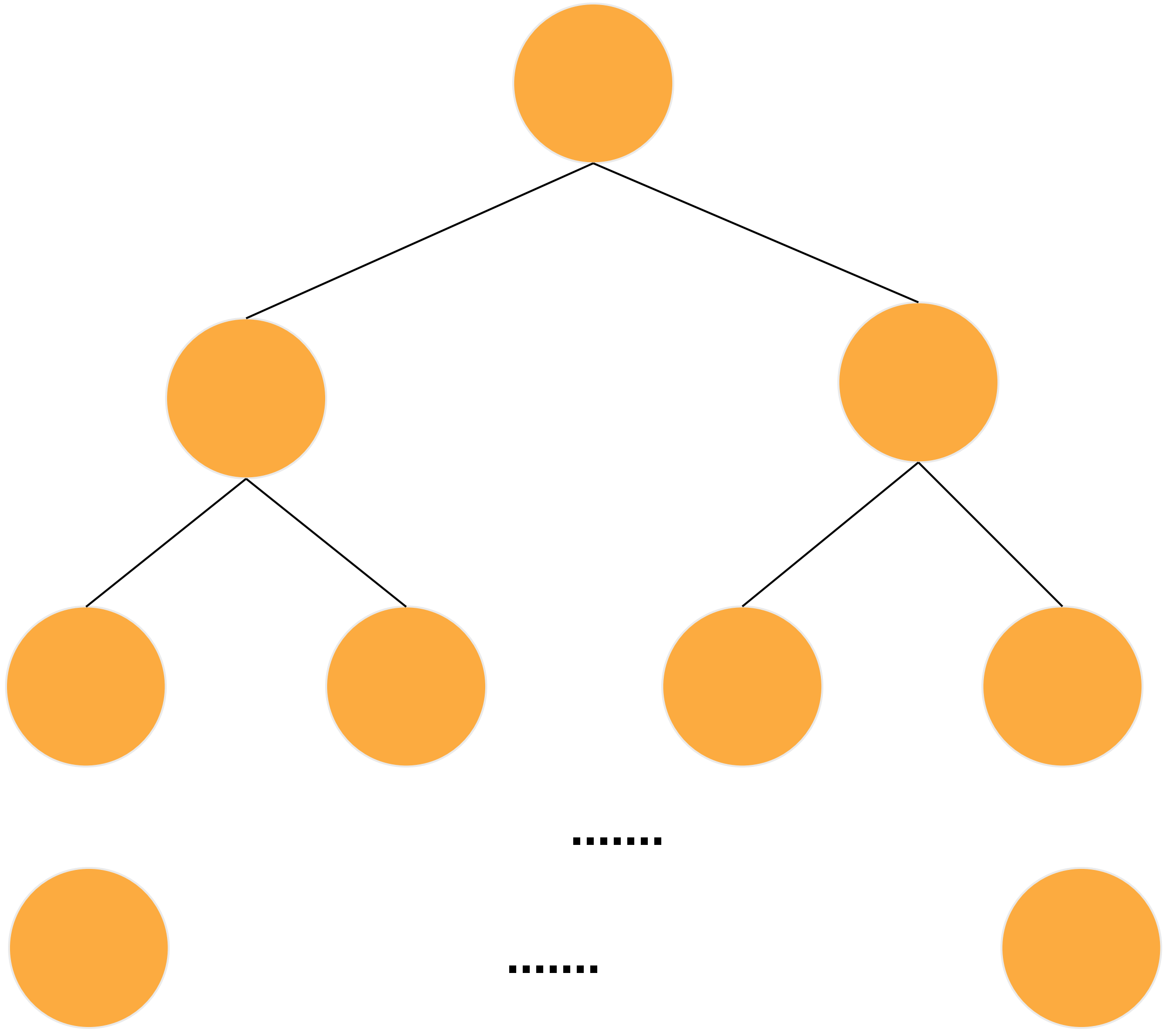
Nível | Número de nós por nível

1 | $1 = 2^0$

2 | $2 = 2^1$

3 | $4 = 2^2$

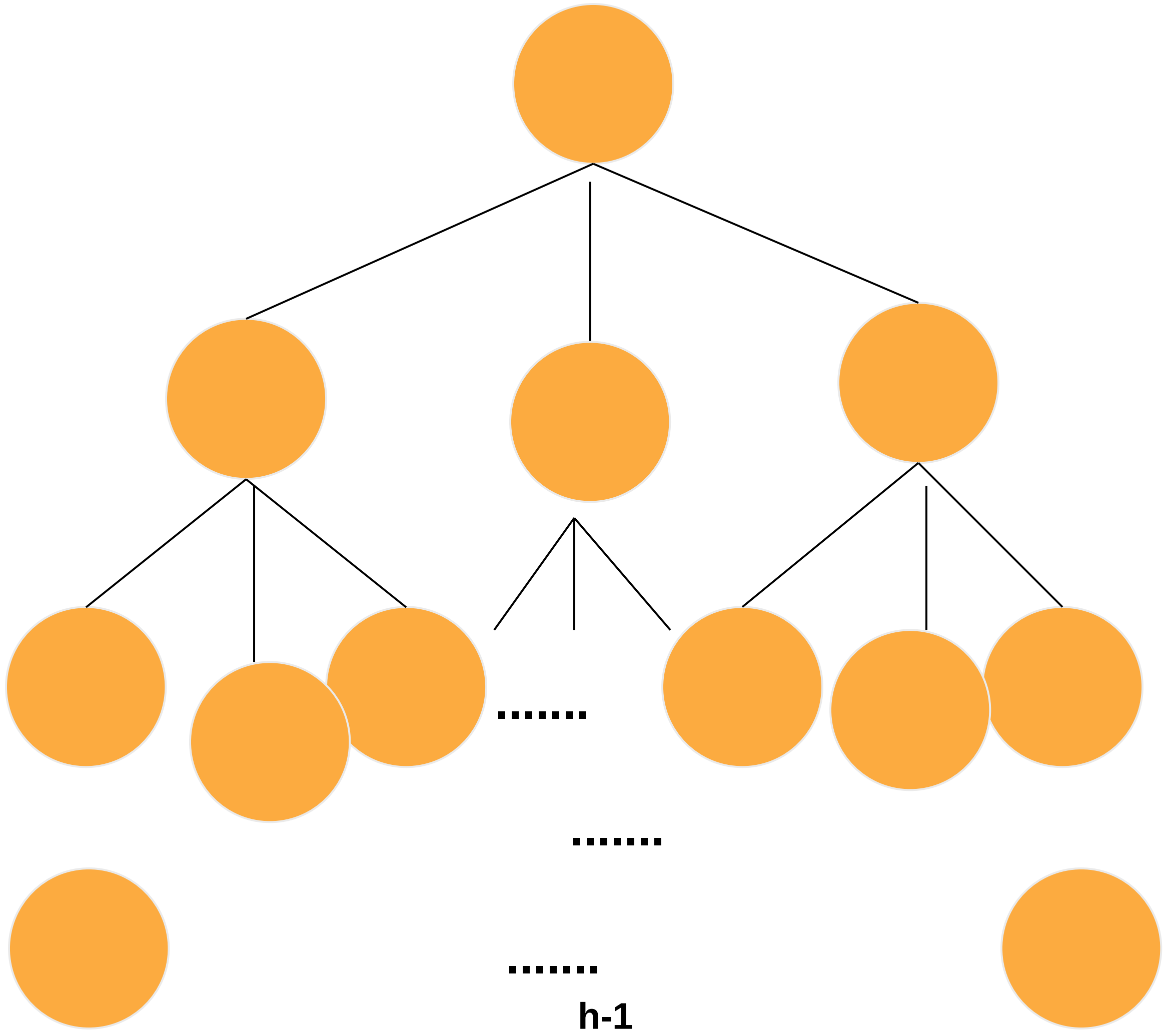
h | 2^{h-1}



$$\therefore\ N = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

Árvore Completa (Cheia) de grau **d** e altura **h**

Nível	Número de nós por nível
1	1
2	d
3	d^2
h	d^{h-1}



$$\therefore \; \mathbf{N(h)} = \sum_{i=0}^{h-1} d^i = \frac{d^h - 1}{d - 1}, \; d > 1$$

Inversamente:

- Se **N** é o número de nós de uma ABC, de grau **d**, qual é a altura **h** da árvore?

$$\mathbf{N(h) = \frac{d^h - 1}{d - 1}}$$

$$\mathbf{h = \log_d(N.d - N + 1)}$$

para d=2: h = $\log_2(N + 1)$

Árvore Binária Quase Completa

- Árvore Binária Quase Completa
  - Se a altura da árvore é **d**, cada nó folha está no nível **d** ou no nível **d-1.**
  - Em outras palavras, a diferença de altura entre as sub-árvores de qualquer nó é no máximo 1.

Implicações dos conceitos completa (cheia) e quase completa

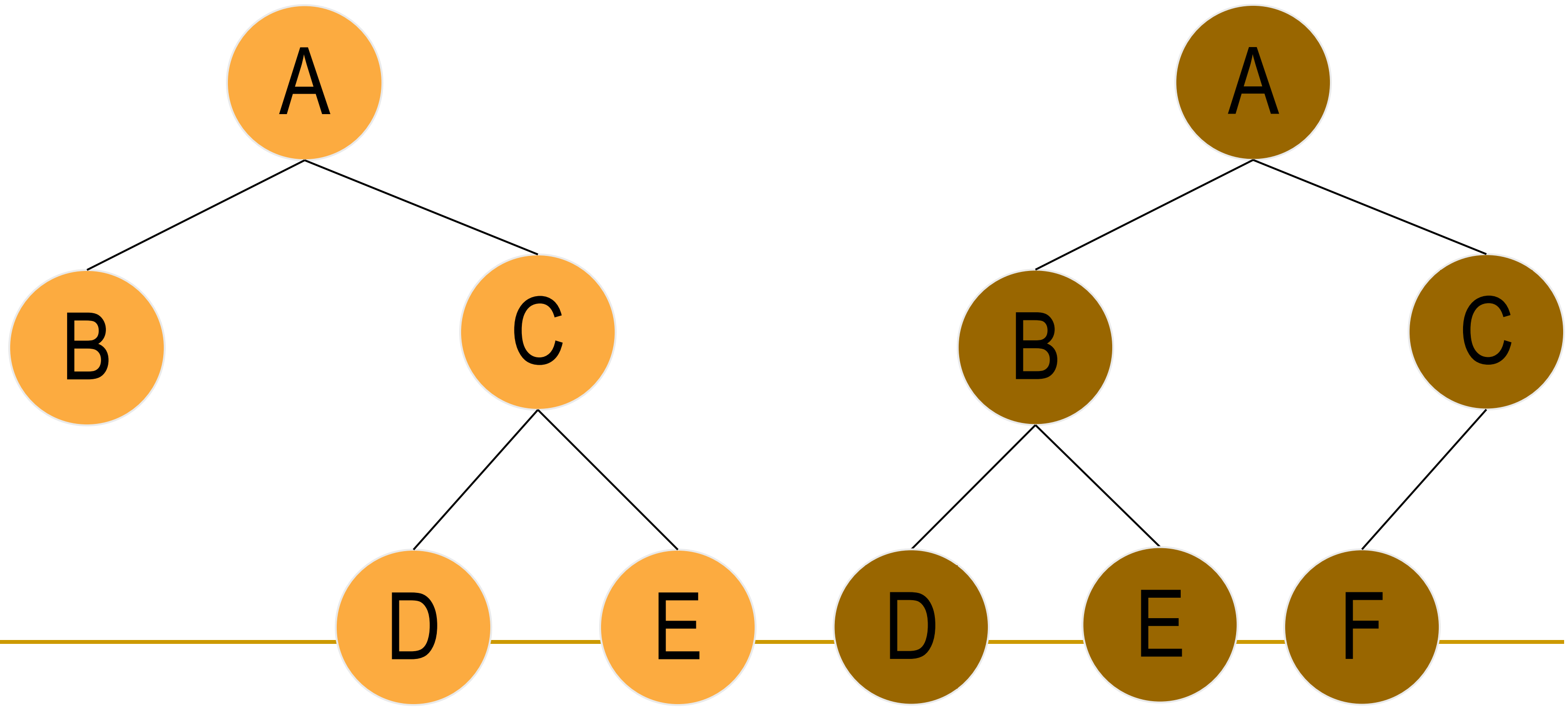
Importante para:

- sua alocação em vetores, pois quando é cheia não desperdiça espaço, e
- na definição do método de ordenação heapsort que trabalha com o conceito de árvore completa como se fosse nossa definição de quase completa.
    - Neste método a árvore (heap) é preenchida da esquerda para direita.

- Uma árvore completa é aquela em que se *n* é um nó com algumas de subárvores vazias, então *n* se localiza no penúltimo ou no último nível.

Árvore Binária Balanceada

- Árvore Binária Balanceada
  - para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1



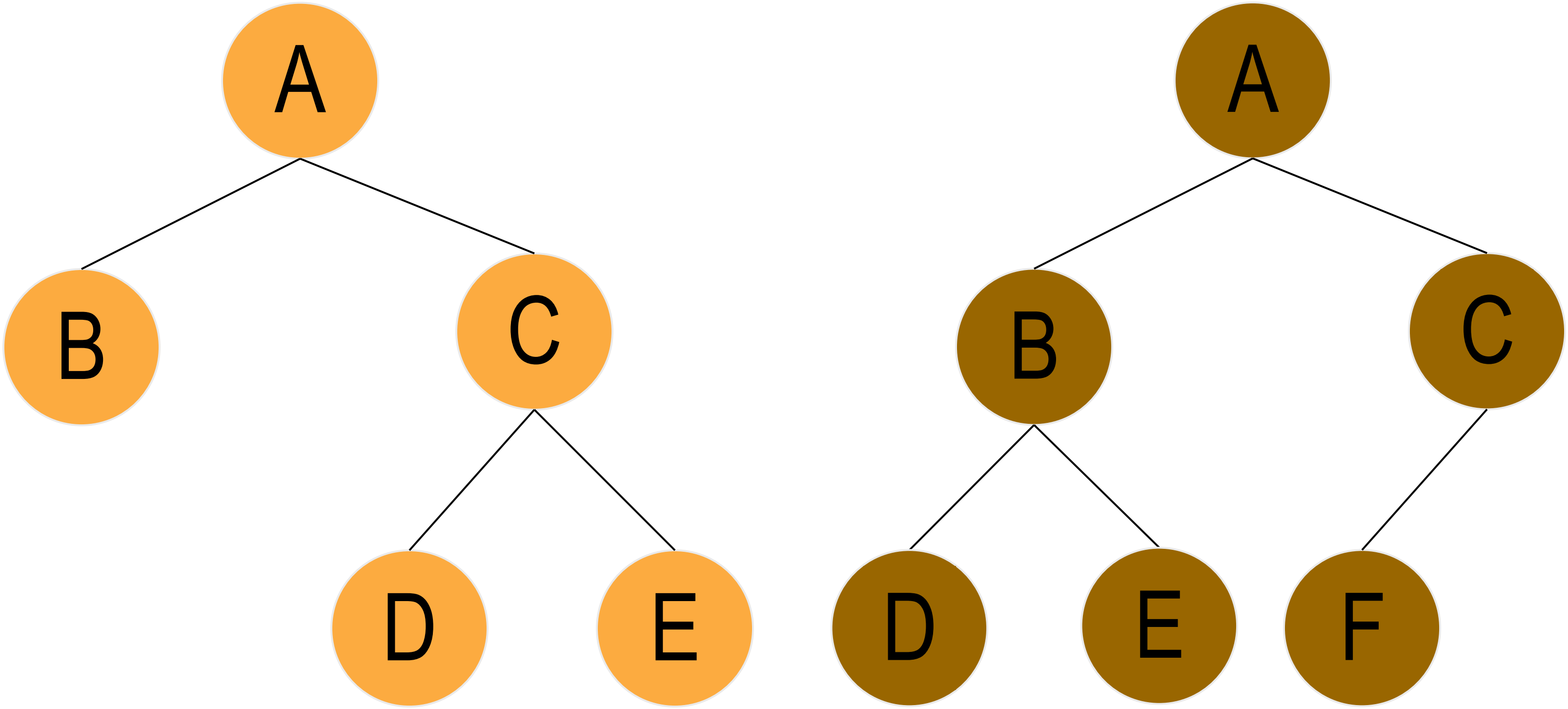
Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- **Árvore Binária Perfeitamente Balanceada**: para cada nó, o número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1

- Toda AB Perfeitamente Balanceada é Balanceada, mas o inverso não é necessariamente verdade.

- Uma AB com N nós tem altura mínima se e só se for Perfeitamente Balanceada.

Exemplo

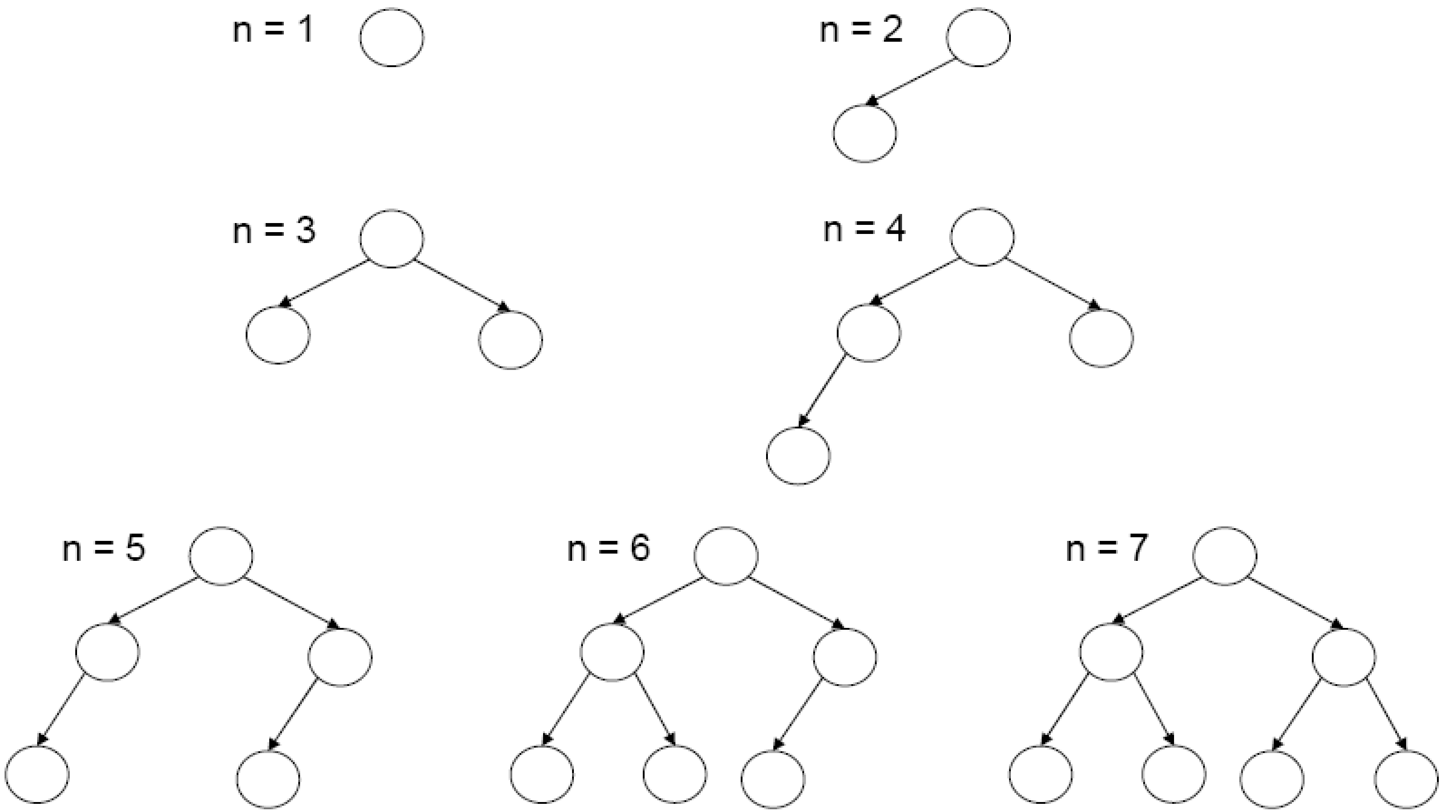


Árvore Balanceada

Árvore Perfeitamente Balanceada

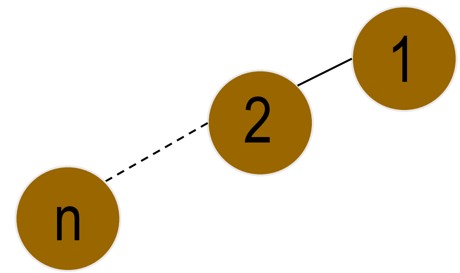
6 nós: $h_{min} = 3$

Árvores Perfeitamente Balanceadas de Grau 2

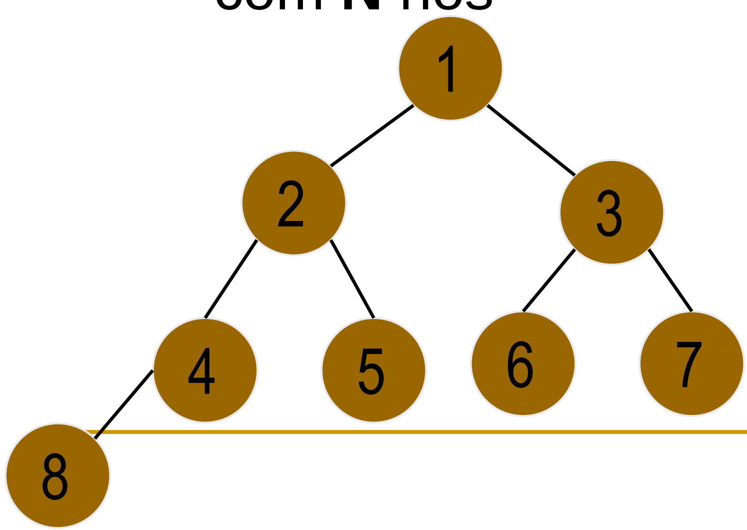


Questões

- Qual a altura máxima de uma AB com **n** nós?
  - Resposta: n



  - Árvore degenerada ≡ Lista
- Qual a altura mínima de uma AB c/ **n** nós?
  - Resposta: a mesma de uma AB Perfeitamente Balanceada com **N** nós



N=1; h=1

N=2,3; h=2

N=4..7; h=3

N=8..15; h=4

$$h_{min} = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$$

(maior inteiro ≤ $\log_2 N$) + 1

ou

$$h_{min} = \lceil \log_2 (N+1) \rceil$$

menor inteiro ≥ $\log_2 (N+1)$

Implicações dos conceitos de balanceada e perfeitamente balanceada

- Estas árvores permitem que a recuperação de informação possa ser realizada de maneira a garantir a altura da ordem de $O(\log_2 n)$ e
  - assim a eficiência em termos de tempo.